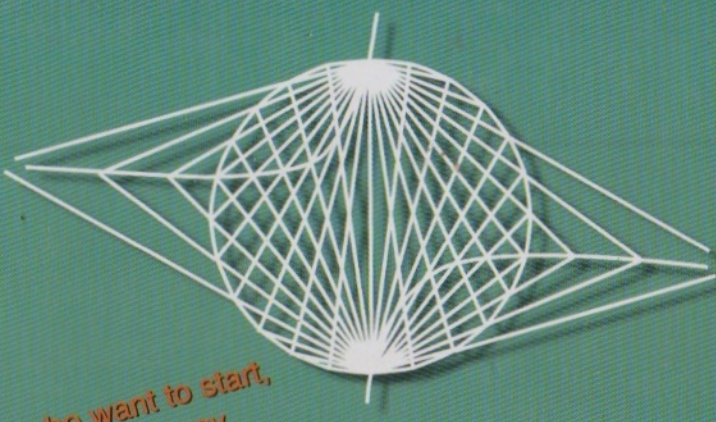
S.M. Zakir Hussain

গণিতের সৌন্দর্য

The Beauty of Mathematics

Book-1

the literature of mathematics for
would-be scientists and intellectuals



For those who want to start,
go easy, and finish easy.

আন্তর্জাতিক গণিতবিদ সম্প্রদায় (WMY) ২০০০
সালকে বিশ্ব গণিতবর্ষ হিসাবে ঘোষণা করেছেন।
বর্তমান গ্রন্থটিকে আন্তর্জাতিক স্তরে এই ধরনের
অন্বেষণের অগ্রদূত রূপে বিবেচনা করা যায়।
ড. শহীদুল্লাহ মৃধা

ROHEL PUBLICATIONS
Dhaka

The Beauty of Mathematics

Book – 1

(গণিতের সৌন্দর্য)

By

S. M. Zakir Husain, MBA

Author of

উদ্ভাবনী চিন্তার কাঠামো
আজকের নেতা : সফল নেতৃত্বের শত কৌশল
অন্ধকারের বস্ত্রহরণ : বৈজ্ঞানিক এবং বুদ্ধিবৃত্তিক
সৃজনশীলতার রাজ্যে এক গোপন অভিযান
নারীর মন
The Politics of Managing The Boss
Effective Writing Skills for Advanced Learners
Tactics for Effective Reading & Critical Thinking
A Systematic Approach to Critical Reasoning & Analytical Ability
A Passage to the English Language (Grammar)
A High Level English Course (Books 1, 2 & 3)
A High Level Dictionary of English Structures
Word Learning Magic (Books 1 , 2 , & 3)
Tactics for Learning Prepositions (Book 1 & 2)
Word Making Tactics (Books 1, 2 & 3)
How to Speak English Fluently
The Anatomy of the English Sentence
Natural Spoken English
British & American English Differentiated
Tough English Made Simple
Magic Rules of Pronunciation
Effective Listening And Smooth Speaking
A Comprehensive Textbook of Degree English
The Strength of Idiomatic English
বাংলা ভাষা পরিক্রমা (ব্যাকরণ ও রচনা)
চোখের তলে জলের ঝিলিক (কবিতা)
কল্পকণা (কবিতা)
Mastering Tense And Others

ROHEL PUBLICATIONS
38/2-Ka, Banglabazar (1st Floor), Dhaka-1100
Phone : 7175324 Mobile : 01716555580

প্রকাশক ঃ

মোঃ সফিউর রহমান

প্রথম প্রকাশ

আগষ্ট, ১৯৯৯

দ্বিতীয় প্রকাশ

মার্চ, ২০০২

চতুর্থ প্রকাশ

মার্চ, ২০০৭

প্রচ্ছদ

ক্যারিশমা কম্পিউটার গ্রাফিকস

৪৯/১, পুরানা পল্টন লেন, ঢাকা-১০০০

ফোনঃ ৯৩৩২৫৩১

কম্পোজ

বাংলাবাজার কম্‌পিউটার

৩৪ নর্থব্রুক হল রোড ৩য় তলা

ঢাকা ১১০০

অলংকরণ

এস. এম. মাসুম

রতন

পেস্টিং

সাইফুল ইসলাম (সাফা)

মুদ্রণে

আল-কাদের অফসেট প্রিন্টার্স

৫৭, হৃষিকেশ দাস রোড, ঢাকা-১১০০

বাঁধাই ঃ মুদ্রণ সংগ্রহ

মূল্য ঃ ১৯৫.০০ টাকা মাত্র।

ISBN 984-8487-10-7

Content

ভূমিকা

—ড. শহীদুল্লাহ মৃধা*

Mathematics is full of beauty and surprises,and many an author in the West has tried to convey this sense of wonder to the general reader but not a single one could be traced in Bengal who ever had attempted to do this. যত কিছুই লেখা হয়েছে তা নীরস গণিতের মরুভূমির গোলক ধাঁধাঁ মাত্র। শুধুমাত্র কতগুলো পাঠ্য বই।

স্কুলের কোন ছাত্রকে যদি জিজ্ঞেস করা যায়, 'কোন বিষয়টি তোমার সবচেয়ে শক্ত লাগে?' সে এক কথায় উত্তর দেবে, 'অংক'। যে কোনও সাধারণ শিক্ষিত লোককে ঐ প্রশ্ন করলে সম্ভবত হুবহু ঐ একই জবাব মিলবে। তবে এমন দু'চারজন লোকও আছেন (উদাহরণস্বরূপ বক্ষ্যমান গ্রন্থের প্রণেতা) যাদের কাছে অংক খারাপ লাগে না, বরঞ্চ তারা উল্টো আনন্দ পান এতে। তারা অংকের সৌন্দর্যটুকু দেখতে পান এবং তা উপভোগ করেন। বিজ্ঞানের সবগুলি শাখার মধ্যে গণিতই হল সবচেয়ে পুরোনো। মানুষ প্রয়োজনের তাগিদেই হাজার হাজার বছর (সম্ভবতঃ দশ-বিশ-পঞ্চাশ) আগে অংকের বিভিন্ন প্রক্রিয়া আবিষ্কার করতে বাধ্য হয়েছিল। অংকশাস্ত্র ছাড়া কোন বিজ্ঞানই এগোতে পারে না। তাই গণিতকেই সব বিজ্ঞানের রাণী বলা হয়। বলা হয় গণিত হচ্ছে প্রকৃতির ভাষা।

ছোটোবেলা থেকেই শুনে আসছি 'অংক' জানার জন্য দরকার 'মাথা' থাকার। এ যে-সে 'মাথা' নয়, আলাদা ধরনের শক্তিসম্পন্ন মাথা। অনেকটা ভাগ্যের দানের মত। ফলে 'কোটিতে গুটিকয়েক' ছাড়া আর সবাই অংকের নাম শুনলেই চমকে যায় মনে মনে। ব্যাপারটা আসলে কিন্তু তা নয়। অংক জানার জন্য আলাদা বিশেষ ধরনের মাথা লাগে না। যে কেউ-ই তা শিখতে পারেন। 'অংক কঠিন' দীর্ঘকাল থেকে চলে আসা এই সাধারণ ধারণাটিকেই বদলে দিতে চাইছেন আধুনিক গণিত বিশারদগণ। তারা বলছেন 'অংক' কেবলমাত্র একটি হিসাবের ব্যাপার নয়। 'অংক' হচ্ছে জীব ও জড় প্রকৃতির 'মৌলিক ভাষা'। তাই সকল কিছুর শুরুতেই 'গণিতের জ্ঞান' অনিবার্য। গণিতের সঙ্গে কেবল মানুষের সম্পর্ক নয় প্রকৃতির প্রতিটি ঘটনা শৃঙ্খল আবর্তিত-বিবর্তিত হচ্ছে সুনির্দিষ্ট গাণিতিক বিন্যাস অনুসরণ করে। তাই যে-ভাষায় প্রকৃতিকে অধ্যয়ন করা হয় সেই সুশৃঙ্খল ভাষাই হচ্ছে গণিত। প্রকৃতিতে জীব ও জড়ের সকল নিয়ম, সকল জীবের অস্তিত্বের মূল, এমনকি সৌন্দর্যের যে ধারণা—তাও গড়ে উঠেছে বিশেষ কতকগুলো

* মুখ্য বৈজ্ঞানিক কর্মকর্তা, বাংলাদেশ পরমাণু শক্তি কমিশন, ঢাকা।

গাণিতিক নিয়মের কারণে। যেমন ধাঁধার মধ্য দিয়ে বিনোদন হয়ে এসেছে অংক, লাভ-ক্ষতির হিসাবতো জন্মের শুরু থেকেই করছে অংকশাস্ত্র। প্রতিটি মানুষ নিজেই এক গাণিতিক জটিলতার সমষ্টি। মানুষের হাঁটা, চলা, হাত নাড়া, চোখ পিট পিট করা, কথা বলা, রাগা, ঘুমানো, মুদ্রাদোষ সবকিছুর পিছনে রয়েছে কিছু গাণিতিক ব্যাপার। দেহ-বৈশিষ্ট্য, লিঙ্গভেদ এমনকি স্বভাব-চরিত্রও গাণিতিকভাবেই নির্ধারিত।

শুধু মানুষই নয়, গাছ-পালা, জীবজন্তু, পশুপাখি সব প্রাণীরই যে আলাদা আলাদা বৈশিষ্ট্য তার পিছনে রয়েছে গণিতের নিয়ম। পৃথিবীর আবর্তন, নিজের কক্ষপথে সূর্যের চতুর্দিকে ঘোরা, মহাবিশ্বের জীবন-পথ—সবকিছুই গণিতের নিয়মে আবদ্ধ। আপনি অংক কষতে না পারেন কিংবা অংককে এড়িয়ে ভুলে থাকতে চান, ভয় পান—কিন্তু অংক আপনাকে ছাড়বে না। দিনের ঘণ্টার হিসাব, বেতন, বাজার খরচ, অফিসের টাইম, কাজের হিসাব সব কিছুতেই যে রয়েছে গণিত—গাণিতিক নিয়ম। সোজা কথায়, গণিত আপনাকে জড়িয়ে আছে জন্ম থেকে মৃত্যু পর্যন্ত এবং বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের জন্মের শুরু থেকে ধ্বংসের শেষ দিন পর্যন্ত। পালাবেন কোথায়? কোনও জায়গা নেই গণিতবিহীন রাজ্যের।

শহীদ মিনার, গাছের পাতা, পূজা-অর্চনা, গৃহসজ্জার আল্পনা, মুদ্রা সবই হচ্ছে গাণিতিক নিয়মেই। একটি ফুলকপিকে প্রকৃতি প্রতিটি স্তবকে সুশৃঙ্খল জ্যামিতিক নিয়মে প্রতিসাম্য ব্যবস্থাধীনে সাজিয়েছে। মৌচাকে দেখা যায় প্রতিটি কক্ষ ঠিক নির্দিষ্ট কোণে নির্দিষ্ট আকারে আয়তনে গায়ে গায়ে সেটে থাকে। **সব মিলিয়ে আজ প্রমাণ হয়ে গেছে গণিত শাস্ত্রের কাজ শুধু আর হিসাব মেলানো হয়। গণিতই হচ্ছে 'যুক্তি'।**

গণিত ছাত্রছাত্রীদের কাছে ভীতিকরভাবে অপ্রিয় হয়ে আছে—তার জন্য তাদের দোষ দিয়ে লাভ নেই। শিক্ষকরাই এর জন্য দায়ী। ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিজ্ঞানের 'রাণীর' সৌন্দর্য তারা তুলে ধরতে পারেননি।

বাংলাদেশে বিগত কয়েক বছরের বিভিন্ন পরীক্ষার ফল লক্ষ্য করলে দেখা যায়, বিজ্ঞান শাখায় অন্যান্য শাখার চেয়ে পরীক্ষার্থীর সংখ্যা অর্ধেক বা তারও কম। ডিগ্রীর (১৯৯৫) পাশ-করা ৬,৩৩০ ছাত্র-ছাত্রীর মধ্যে বিএসসি পাশ করে ৭০০ জন যার মধ্যে গণিত নিয়েছিল এমন ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ছিল মাত্র সাতশ' জন! ১৯৯৬-তে দেখা গেল বিএসসি পাশ করেছে মাত্র ২,৯১৬ জন! চার হাজার কম! আর গণিতের ছাত্র—তা ছয়শত জন মাত্র! গণিত ছাত্রছাত্রীদের কাছে ভীতিকরভাবে অপ্রিয় হয়ে আছে—তার জন্য তাদের দোষ দিয়ে লাভ নেই। শিক্ষকরাই এর জন্য দায়ী। ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিজ্ঞানের 'রাণীর' সৌন্দর্য তারা তুলে ধরতে পারেননি। গণিত ছাত্রছাত্রীদের কাছে ভীতিকরভাবে অপ্রিয় হয়ে আছে—তার জন্য তাদের দোষ দিয়ে লাভ নেই। শিক্ষকরাই এর জন্য দায়ী।

ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিজ্ঞানের 'রাণীর' সৌন্দর্য তারা তুলে ধরতে পারেননি। গণিত যে আসলেই সহজ-সুন্দর-সাবলীল-জীবনভিত্তিক বিষয় সাধারণ মানুষকেও তা আমরা বোঝাতে পারিনি। গণিতের ফর্মুলা বা সূত্রগুলো কিভাবে জীবনের ও পরিবেশের সঙ্গে যুক্ত তা বুঝিয়ে দিতে পারলেই শিক্ষার্থীদের কাছে গণিত শুধু সহজই নয় আনন্দের বিষয়েও পরিণত হবে। উন্নত বিশ্বে তাই ঘটেছে। তাই তারা উন্নতি করছে। কিন্তু আমাদের শিক্ষাঙ্গনের পদ্ধতিটাই সে রকম নয়। শুরু থেকেই অংককে তাদের কাছে এগিয়ে দেয়া হয়েছে সমস্যা হিসেবে। ফলে মাধ্যমিক পর্যায় পার হবার পর অংকের ভয়ে অনেকে বিজ্ঞান পড়াই ছেড়ে দেয়। কিন্তু সত্যিকার অর্থেই যদি আমরা শিক্ষিত হতে চাই তাহলে অংক নামক এই প্রকৃতির ভাষা জানতে আমাদের হবেই।

জাহাঙ্গীরনগর বিশ্ববিদ্যালয় ক্যাম্পাসের প্রফেসর এম এস রহমান সাহেব এ বিষয়ে ১৯৯৭ সনের প্রথম দিকে দৈনিক সংবাদ ও জনকণ্ঠে একটি বিষয় লিখেছিলেন যার মর্মার্থ হলো এরকম : স্বাধীনতার পর এদেশে মাধ্যমিক থেকে উচ্চতর পর্যায়ের গণিত পাঠক্রম 'সেকেলে' তথা 'যুগোপযোগী নয়' বলে আধুনিক গণিতের নামে তড়িঘড়ি করে কিছু পরিবর্তন করা হয়। তবুও 'নতুন কিছু করা'র প্রবণতায় গণিত শিক্ষা আজও এর অভীষ্ঠ লক্ষ্য অর্জন করতে পারেনি। গণিত শাস্ত্রে অনেক গুরুত্বপূর্ণ, কৌতুহলোদ্দীপক ও চমকপ্রদ তথ্য ও তত্ত্ব রয়েছে যদ্বারা গণিতের উৎকর্ষ সাধিত হচ্ছে। যা সহজেই পাঠককে মুগ্ধ করতে পারে। শিল্প-সাহিত্যের মত আনন্দ দান করতে পারে। সাহিত্যের পাঠ্য পুস্তকের মত গণিত পাঠ্য বইয়ে খ্যাতিমান গণিতবিদদের পরিচয় থাকলে শিক্ষার্থীরা প্রেরণা পেতেন। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি, ক্যালকুলাস ইত্যাদি বিষয়ের নামের বুৎপত্তি থেকে শুরু করে যোগ, বিয়োগ, গুণন, ভাগ, সমতা, অসমতাজ্ঞাপক ও করণী চিহ্ন, শূন্য, অসীম, শতকরা, ঋণাত্মক সংখ্যা, জটিল সংখ্যা, 'ই' সংখ্যা, 'পাই' সংখ্যা, দশমিক ভগ্নাংশ, দ্বিপদী উপপাদ্য, বিন্যাস ও সমাবেশ, নির্ণায়ক, স্থানাঙ্ক, লগারিদম প্রভৃতির পশ্চাতে যে ইতিহাস রয়েছে, কোমলমতি কিশোর থেকে সর্বস্তরের শিক্ষার্থীকে সে সম্পর্কে জ্ঞানদান করে তাদেরকে গণিতে উৎসাহিত করে তোলা যেত। গণিত শিক্ষার প্রসার ও গণিতের জনপ্রিয়তা বৃদ্ধির লক্ষ্যে গণিতের পাঠ্যসূচিতে এর ঐতিহ্যমণ্ডিত ইতিহাস সংযোজন করা হলে আমাদের ছাত্র-ছাত্রীদের মন থেকে গণিত ভীতি কমে যেত ।

পৃথিবীর প্রায় সমস্ত দেশেই এই সমস্যা কমবেশি বিদ্যমান। তাই শিশুদের নিকট 'গণিত' বিষয়টিকে জনপ্রিয় ও মজাদার করে তোলার উদ্দেশ্যে ডি কে মাল্টিমিডিয়া গণিতের সফটওয়্যার বাজারে ছেড়েছে। গণিত ভীতিকে মজায় রূপান্তরিত করাই এর উদ্দেশ্য।

উন্নত দেশগুলোতে জনগণের যুক্তি এবং গণিতকে শাণিত করার জন্য বিভিন্ন ধরনের উদ্যোগ নেয়া হয়। সে সমস্ত দেশে গণিতের অলিম্পিয়াড হয়। তাতে থাকে গণিত ও যুক্তির নানা ধরনের সমস্যা। ছোটবেলা থেকে গণিত ও লজিকের ভিত্তিতে যে জাতি গড়ে ওঠে তাদের মধ্যে অযৌক্তিক কর্মকাণ্ড বেশি দেখা যায় না। অথচ ঠিক এর উল্টোটাই ঘটে বাংলাদেশে, যেখানে যুক্তি ও গণিতের চেয়ে শক্তি ও ভক্তির আধিক্য বেশি। এজন্য হয়তো আমাদের একটি রাজনৈতিক দল যা করে, অপর রাজনৈতিক দল তার উল্টোটা করে।

কি নিয়ে আমরা একবিংশ শতাব্দীতে প্রবেশ করবো? . . . এ জন্যে আমাদের দরকার অনেক কিছু। কর্তব্যটি ছিল সরকারেরই। কিন্তু তারা তা করেননি। হয়ত বুঝতে পারেননি। একটা জাতিকে বিজ্ঞানমুখী ও প্রযুক্তিপ্রেমী করে তুলতে গেলে কিছু বইপত্র লাগে সে রকমের। . . . আমার চোখে অদ্যাবধি এমন কোন বই চোখে পড়েনি বাংলাদেশে। তরুণ চিন্তাবিদ লেখক এস. এম. জাকির হুসাইন এমন একটি গুরুদায়িত্ব নিজ থেকেই নিজের কাঁধে চাপিয়েছেন দেখে আশান্বিত হয়েছি যে, ব্যতিক্রম হলেও একজন নিঃসঙ্গ ব্যক্তি এটা অনুধাবন করেছেন এবং নিঃস্ব গণিতকে সহজবোধ্য করার চেষ্টা করেছেন।

এ যাবৎকালের সর্ববৃহৎ আন্তর্জাতিক শিক্ষা জরিপে (১৯৯৪-৯৫ সালে পরিচালিত তৃতীয় আন্তর্জাতিক গণিত ও বিজ্ঞান শিক্ষার প্রতিবেদন, নভেম্বর ১৯৯৬) দেখা যায়, অংক ও বিজ্ঞান পরীক্ষায় সিঙ্গাপুরের ১৩ বৎসর বয়স্ক ছাত্ররা অন্য ৪০টি দেশ এবং এলাকার একই বয়সের ছাত্রদের চেয়ে অনেক বেশি নম্বর পেয়ে থাকে। কোরিয়ার ছাত্ররা গণিতে দ্বিতীয় স্থান, এবং চেক প্রজাতন্ত্রের ছাত্ররা বিজ্ঞানে দ্বিতীয় স্থান লাভ করে। এছাড়া গণিতে থাইল্যান্ডের ছেলেমেয়েরা ডেনমার্ক, জার্মানি, স্পেন ও যুক্তরাষ্ট্রের মত অধিক সম্পদশালী দেশের ছেলেমেয়েদের চেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে এবং বিজ্ঞানেও প্রায় একরকমই ভাল করেছে। অংক ও বিজ্ঞানে প্রথম ১৫টি স্থানের মধ্যে ৬টি লাভ করেছে পূর্ব ইউরোপীয় দেশের ছেলেমেয়েরা। অথচ ফ্রান্স, জার্মানি ও যুক্তরাষ্ট্রসহ কয়েকটি উন্নত দেশ শীর্ষ ২০টি স্থানের মধ্যে ছিল না (সিঙ্গাপুর ৬৪৩ নম্বর, জাপান ৬০৫, চেক ৫৬৪, স্লোভাকিয়া ৫৪৭, সুইজারল্যান্ড ৫৪৫, বুলগেরিয়া ৫৪০, আফ্রিকা ৫৩৯, হাঙ্গেরি ৫৩৭, রাশিয়া ৫৩৫,

থাইল্যান্ড ৫২২, জার্মানি ৫০৯, নরওয়ে ৫০৩, ডেনমার্ক ৫০২, যুক্তরাষ্ট্র ৫০০, লাটভিয়া ৪৯৩, রুমানিয়া ৪৮২, লিথুনিয়া ৪৭৭, ইরান ৪২৮, কলম্বিয়া ৩৮৫, দক্ষিণ আফ্রিকা ৩৫৪ (৪০তম স্থান))।

বাংলাদেশ এসব প্রতিযোগিতার বাইরে। বাঙালি ভাবুকের জাত, কবিতার অনুরাগী, তর্কের বাহাদুরি এবং রাজনীতির কচকচানিতে অভ্যস্ত। বিজ্ঞানমনস্কতা তার নেই। অংকের থেকে বহু দূরে সে থাকে। এসব কথা আমরা জানি। বিংশ শতকের শেষ বৎসরটিতে এসে আমাদের একটু হিসাব মেলাতে হচ্ছে। কি নিয়ে আমরা একবিংশ শতাব্দীতে প্রবেশ করবো?

এ জন্যে আমাদের দরকার অনেক কিছু। কর্তব্যটি ছিল সরকারেরই। কিন্তু তারা তা করেননি। হয়ত বুঝতে পারেননি। একটা জাতিকে বিজ্ঞানমুখী ও প্রযুক্তিপ্রেমী করে তুলতে গেলে কিছু বইপত্র লাগে সে রকমের। বর্তমানে 'উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়' এ কাজে হাত দিয়েছে। কিন্তু সারাদেশের প্রথাসিদ্ধ স্কুল-কলেজগুলির গণিতের সিলেবাসে পরিবর্তন আনা হলেও গণিতের নিরস পর্বগুলিকে আকর্ষণীয় করে তোলার কোন চেষ্টাই গ্রহণ করা হয়নি এ যাবৎ। আমার চোখে অদ্যাবধি এমন কোন বই চোখে পড়েনি বাংলাদেশে। তরুণ চিন্তাবিদ লেখক এস. এম. জাকির হুসাইন এমন একটি গুরুদায়িত্ব নিজ থেকেই নিজের কাঁধে চাপিয়েছেন দেখে আশান্বিত হয়েছি যে, ব্যতিক্রম হলেও একজন নিঃসঙ্গ ব্যক্তি এটা অনুধাবন করেছেন এবং নিঃস্ব গণিতকে সহজবোধ্য করার চেষ্টা করেছেন।

আজ পর্যন্ত বাংলাদেশের কোনো অধ্যাপকই (অবশ্যই গণিতের) গণিতের সৌন্দর্য নিয়ে এমন ধরনের বই লেখেন নি। প্রকৃতিতে কোনো জায়গাই খালি থাকতে পারে না। এমনি সূত্র ধরেই ঘটল The Beauty of Mathematics শীর্ষক এমন একটি বইয়ের আবির্ভাব। **. . . গৎ-বাঁধা পথ থেকে সরে এসে আমাদের শিক্ষকরা যতদিন না গণিতকে জনপ্রিয় করে তুলবেন ততদিন বিজ্ঞানে আমাদের উন্নতি হবে না। তাই আমি মনে করি *The Beauty of Mathematics* বইটি ছাত্র-ছাত্রীদের পাশাপাশি শিক্ষকদেরও প্রভূত উপকারে আসবে। . . .**

জাকির হুসাইন তার The Beauty of Mathematics বইয়ে আধুনিক গণিতের বিষয়গুলি নিয়ে মনোজ্ঞ আলোচনা করেছেন। যেমন : বাস্তব সংখ্যার ভেতরকার রহস্য,

কাল্পনিক এবং জটিল সংখ্যা, বীজগণিতের দ্বিঘাত জগৎ—দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণের এবং রাশিমালার তত্ত্ব, সেট থিওরি, ফাংশান এবং রিলেশন, ধারা এবং অনুক্রম, গণনার বিধি বিন্যাস এবং সমাবেশ, প্রমাণের পদ্ধতি হিসাবে গাণিতিক আরোহ, নির্ণায়ক, ইত্যাদি। এই বিষয়গুলি আমরা ষাটের দশকে কলেজে পড়েছি। তখন ইউরোপে গিয়ে দেখি ওদের ক্লাস নাইন-টেনে এগুলি পড়ানো হয়। এখন আমাদের দেশেও নতুন সিলেবাস অনুসারে এর কিছু কিছু অংশ পড়ানো হয়, তবে যথেষ্ট ভক্তি-শ্রদ্ধা ছাড়া। *আজ পর্যন্ত বাংলাদেশের কোনো অধ্যাপকই (অবশ্যই গণিতের) গণিতের সৌন্দর্য নিয়ে এমন ধরনের বই লেখেন নি। প্রকৃতিতে কোনো জায়গাই খালি থাকতে পারে না। এমনি সূত্র ধরেই ঘটল The Beauty of Mathematics শীর্ষক এমন একটি বইয়ের আবির্ভাব।* বইটি খুবই সুললিত ভাষায় সহজবোধ্য করে লেখা হয়েছে। মাঝারি পরিমাণের বুদ্ধ্যঙ্ক (I. Q.) রয়েছে এমন ধরনের ছাত্র-ছাত্রীরাও বইটি অনুসরণ করতে পারবে। উদাহরণ দিয়ে জনপ্রিয় স্টাইলে কঠিন সমস্যাকে বুঝানো হয়েছে। বইটি অষ্টম শ্রেণী থেকে দশম শ্রেণীর ছাত্রদের জন্য অবশ্য পঠনীয় পাঠ্যবইয়ের মর্যাদা দাবি করতে পারে। আর কলেজের ছাত্রদের জন্য (একাদশ-দ্বাদশ) এটি সাহায্যকারী (Handbook) হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারবে। আর বিএসসি থেকে এমএসসি'র ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য এটি রেফারেন্স বই হিসাবে মর্যাদা পাবার যোগ্য। সাংবাদিক, বিজ্ঞান-পেশাজীবী এবং প্রকৌশলী ও প্রযুক্তিবিদদের কাছে বইটি কাজে আসবে তাদের কিছু জিজ্ঞাসার সহজীকরণ জবাবের উৎস হিসাবে। *সবচাইতে বেশি কাজে লাগবে টিচার্স ট্রেনিং কলেজ, বিশ্ববিদ্যালয়ের ও কলেজ-স্কুলের গণিতের শিক্ষকদের। গণিতের কঠিন বিষয়গুলিকে কেমন করে শিক্ষাদান করতে হবে তার টেকনিক রয়েছে বইটির ছত্রে ছত্রে, পাতায় পাতায়।* এ ব্যাপারে একটা জোক্ রয়েছে এ'রকম : ক্লাসের শতকরা কিছু ছাত্র সমস্যাটা বুঝতো শিক্ষকের প্রতিবার বুঝানোর ফলে। পঞ্চম বারের সময় শিক্ষক নিজেই বুঝে ফেললেন সমস্যাটার অন্তর্নিহিত তাৎপর্য (অবশ্য শেষ ছাত্রটি তখনও তা বুঝে ওঠেনি)। একজন শিক্ষক (নিজে পরীক্ষার চাপ থেকে মুক্ত) যে পরিস্থিতিতে অংকের ভাণ্ডারে চিন্তা করে করে প্রবেশ করতে পারেন, একজন ছাত্র তা পারে না। গৎ-বাঁধা পথ থেকে সরে এসে আমাদের শিক্ষকরা যতদিন না গণিতকে জনপ্রিয় করে তুলবেন ততদিন বিজ্ঞানে আমাদের উন্নতি হবে না। তাই আমি মনে করি The Beauty of Mathematics বইটি ছাত্র-ছাত্রীদের পাশাপাশি শিক্ষকদেরও প্রভূত উপকারে আসবে। এ ধরনের বই পশ্চিম বাংলায় কয়েকটি রয়েছে, ইংরেজিতে রয়েছে প্রচুর; যেমন : Edward Kasner and James Newman's *Mathematics and the Imagination,* Calvin Clawson's *Mathermatical Mysteries,* Reuber Hush's *What is*

Mathematics Really?, Alexander Hahn's *Basic Calculus : From Archimedes to Newton to its Role in Science*, Samuel Rapport and Helen Wright's *Mathematics . . .* etc. *কিন্তু বাংলাদেশে শুধুমাত্র জাকির হুসাইনের বইটি ছাড়া আর কোনও এমন ধারার গণিতের বই আমার চোখে পড়েনি।*

আন্তর্জাতিক গণিতবিদ সম্প্রদায় বিশ্ব গণিতবর্ষ হিসাবে (WMY) ২০০০ সালকে ঘোষণা করেছেন। তারা গণিতের সাংস্কৃতিক দিকের ওপর জোর দিয়েছেন। বর্তমান গ্রন্থটিকে আন্তর্জাতিক স্তরে এই ধরনের অন্বেষণের অগ্রদূত রূপে বিবেচনা করা যায়। এটি গাণিতিক চিন্তা-ভাবনার সার-সংক্ষেপ বিশ্ব গণিত বর্ষ WMY 2000-এর কাঙ্খিত ভাবনা-চিন্তার রূপদান প্রক্রিয়ায় বিরাট অবদান রাখবে।

আন্তর্জাতিক গণিতবিদ সম্প্রদায় বিশ্ব গণিতবর্ষ হিসাবে (WMY) ২০০০ সালকে ঘোষণা করেছেন। তারা গণিতের সাংস্কৃতিক দিকের ওপর জোর দিয়েছেন। বর্তমান গ্রন্থটিকে আন্তর্জাতিক স্তরে এই ধরনের অন্বেষণের অগ্রদূত রূপে বিবেচনা করা যায়। এটি গাণিতিক চিন্তা-ভাবনার সার-সংক্ষেপ বিশ্ব গণিত বর্ষ WMY 2000-এর কাঙ্খিত ভাবনা-চিন্তার রূপদান প্রক্রিয়ায় বিরাট অবদান রাখবে। আশা করা যায় গণিতরস পিপাসুদের দ্বারাতো বটেই, সাধারণভাবে শিক্ষিত পাঠক সমাজের দ্বারাও গ্রন্থটি সমাদৃত হবে।

৭ জুলাই, ১৯৯৯

অধ্যায় : ১

বাস্তব সংখ্যার ভেতরকার রহস্য
(The Hidden Mysteries of Real Numbers)

১.

অংক (digit) এবং সংখ্যার (number) ধারণা—অন্তত দৈনন্দিন জীবনের পরিমাপ এবং গণনার অভিজ্ঞতার প্রেক্ষিতে বলা যায়—আমাদের চিন্তা-চেতনায় এত স্বাভাবিকভাবে মিশে আছে যে এ ধরনের প্রশ্ন শুনেই আমরা বিস্মিত হই : 'সংখ্যা কী?' এবং স্বাভাবিকভাবেই বিরক্তিমিশ্রিত বিস্ময় প্রকাশ করি ঃ এ কোনো গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হলো? কিন্তু যখন প্রসঙ্গ ওঠে 'অবাস্তব' (অর্থাৎ কাল্পনিক) সংখ্যার, এবং বলা হয় যে সে-সংখ্যা গোনা-গাথার জন্য নয়, তা বিশেষ প্রয়োজনে 'সৃষ্টি' ক'রে নেয়া হয়েছে, তখন বিস্ময়ের মাত্রা আরেকটু বেড়ে যায়। সুতরাং সংখ্যার কোনো দার্শনিক তত্ত্বে না গিয়েই ঠিক এই মুহূর্তে অন্তত এটুকু বললে যথেষ্ট হবে যে, 'অবাস্তব' সংখ্যাকে যেহেতু 'অন্যের দ্বারা চাপিয়ে দেয়া' নিয়মের মাধ্যমে শিখতে হবে, সেহেতু 'স্বাভাবিকভাবে আত্মঃস্থ করা' বাস্তব সংখ্যাকেও প্রশ্নের মুখোমুখি এনে দাঁড় করাতে হবে। নইলে অবাস্তব সংখ্যাকে বুঝতে পারা যাবে না। অবাস্তব সংখ্যাকে বুঝা যেতে পারে কেবল বাস্তব সংখ্যার সাহায্য নিয়েই, এবং বাস্তব সংখ্যাকে নোতুন ক'রে বুঝেই। অর্থাৎ সচেতনভাবে বুঝতে হবে যে বুঝেছি। আর এরূপ বুঝার পরই সত্যিকার অর্থে বুঝতে পারা যাবে বাস্তব সংখ্যা আসলে কী।

২.

বাস্তব সংখ্যার (real number) প্রসঙ্গে প্রথমে আসে **স্বাভাবিক সংখ্যার (natural number)** কথা। এগুলি হলো বাস্তব সংখ্যার সরলতম উদাহরণ। প্রাচীনকালে (সম্ভবত মানব সৃষ্টির প্রাথমিক পর্বেই, যে ব্যাপারে এখন নিশ্চিতভাবে কোনো কিছু জানা সম্ভব নয়) মানুষ বস্তু-জগতের বিভিন্ন জিনিস-পত্র গণনা করতে গিয়ে এরূপ ধারাবাহিক পূর্ণ সংখ্যা উদ্ভাবন করেছিল, যা ছিল নিঃসন্দেহে সীমিত। এরূপ সংখ্যা হলো

T. B. M. – 2

1, 2, 3, 4, ... , -এভাবে গঠিত যাবতীয় যোগ-বোধক (positive) পূর্ণ-সংখ্যা (whole number)। এরূপ সংখ্যার মোট সংখ্যা অসীম।

কিন্তু প্রাথমিক পর্যায়ে সংখ্যার উদ্ভাবনের পেছনে উদ্দেশ্য ছিল শুধু গণনা করা।* তাই কোনো সংখ্যা, যেমন a, থেকে অন্য একটি সংখ্যাকে, যেমন bকে, বাদ দিতে বা তাদের একটির সাথে অন্যটিকে যোগ করতে হতো। বাদ দেয়ার কাজটা সম্ভব হতো ততক্ষণ যতক্ষণ a, b অপেক্ষা বড় হতো। এবং একটি নোতুন সংখ্যার প্রয়োজন বোধ হলো যখন, উদাহরণস্বরূপ, a থেকে a কে বাদ দেয়ার প্রয়োজন দেখা দিল। সাধারণ যুক্তি অনুসারে a – a = 'কিছু না' বা 'শূন্য'। এই 'কিছু না'-কে বা 'শূন্য'-কে বুঝানোর জন্য আবিষ্কৃত (এ হলো উদ্ভাবনের ভূবনের মধ্যে আবিষ্কার) হলো zero প্রতীকটির, যাকে আমরা 0 দ্বারা বুঝাই। ফলে সংজ্ঞা দাঁড়াল a – a = 0। এভাবে স্বাভাবিক সংখ্যার (natural number) সাথে যুক্ত হলো আরেকটি সংখ্যা, 0। কিন্তু যোগ, বিয়োগ, গুণন, ভাগ—এই সমন্বয় **(operation)**-গুলির ক্ষেত্রে শূন্য (zero) অন্যান্য সংখ্যার মতো আচরণ করে না (বা তাকে দিয়ে সেরূপ আচরণ করাতে হলে গণিতের যুক্তি মিথ্যে হয়ে যায়) ব'লে তার জন্য বিভিন্ন সঙ্গতিপূর্ণ নিয়মাবলী উদ্ভাবন করা হলো (যা আমরা পরে দেখব)।

তবে এ পর্যন্ত বিয়োগফলের নিম্নসীমা রইল শূন্য : অর্থাৎ কোনো সংখ্যা থেকে বড় জোর সেই সংখ্যাকেই বাদ দেয়া সম্ভব হলো; তা থেকে তার চেয়ে বড় সংখ্যাকে বাদ দিতে গেলে শূন্যের বিধান আর যথেষ্ট ব'লে প্রমাণিত না। এভাবে প্রয়োজন হলো চিহ্নের (sign operator) বিধানাবলীকে সংজ্ঞায়িত করার।

আসলে সংখ্যার ক্ষেত্রে এতক্ষণ পর্যন্ত সব ছিল স্বাভাবিক বা প্রাকৃতিক ঘটনা : ৫টি আম থেকে ১টি, ২টি, ৩টি, ৪টি, বা বড় জোর ৫টি আমই বাদ দেয়া যায়; তার বেশি বাদ দিতে গেলে বাস্তবতাকে (reality) অস্বীকার করা হয়। পাঁচটি আম থেকে ৬টি বা ৭টি আম কিভাবে বাদ দেয়া সম্ভব?

কিন্তু বাস্তবে তা সম্ভব না হলেও সংখ্যার ভূবনে (in the world/ domain of numbers) তাকে সম্ভব করতে হবে। অন্তত গণিতের, বা আরো সংকীর্ণ অর্থে সংখ্যার,

* তবে গণিতশাস্ত্রে সংখ্যা মানেই যে গণনার হাতিয়ার বুঝতে হবে তেমনটি আদৌ নয়। সংখ্যা কোনো গণনার কাজে ব্যবহৃত হবার যোগ্য নাও হতে পারে। এমনকি গণিতই যে বাস্তবতার কোনো না কোনো রূপ তুলে ধরবে, এমনটিও নয়। গণিতের আছে নিজস্ব ভূবন, নিজস্ব বাস্তবতা, যাকে বলে গাণিতিক বাস্তবতা বা mathematical reality.

একটি স্বয়ংসম্পূর্ণ সিস্টেম বা ব্যবস্থা গ'ড়ে তুলতে হলে তা দরকার। এভাবে প্রয়োজন হলো গণিতকে বাস্তবতা থেকে আলাদা ক'রে নেবার। সংজ্ঞায়িত হলো গণিতের নিজস্ব বাস্তবতা (mathematical reality)। সংখ্যা এখন উঠে এল গণনার জগৎ থেকে হিসেবের জগতে।

এভাবে নির্ধারিত হলো যে, কোনো সংখ্যা থেকে তার চেয়েও বড় কোনো সংখ্যাকে বাদ দিলে বিয়োগফলের মান হবে বড় সংখ্যাটি থেকে ছোট সংখ্যাটিকে বাদ দিলে যা হয় তাই, কিন্তু চরিত্র (অর্থাৎ চিহ্ন) হবে বিয়োগবোধক বা ঋণাত্মক (negative)। ফলে, $a > b$ হলে $a - b = c$ (যেখানে c হলো একটি যোগবোধক সংখ্যা), এবং $b - a = -c$ (যেখানে $-c$ হলো একটি বিয়োগবোধক সংখ্যা)। ফলে স্বাভাবিকভাবেই দেখা গেল যে, ক্ষুদ্রতর যোগবোধক সংখ্যা থেকে বৃহত্তর যোগবোধক সংখ্যাকে বাদ দিলে অসীম সংখ্যক যোগবোধক সংখ্যার প্রত্যেকটির বিপরীতে সমানসংখ্যক (অর্থাৎ অসীম সংখ্যক) বিয়োগবোধক সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন :

$$1 - 2 = -1$$
$$1 - 3 = -2$$
$$1 - 4 = -3$$

. . .   . . .

$1 - (n + 1) = -n$ যেখানে $n = 1, 2, 3 \ldots$

এভাবে বাস্তব সংখ্যার ভূবনে স্বাভাবিক সংখ্যার সাথে যুক্ত হলো ঋণাত্মক সংখ্যাও।*

এরূপ ঋণাত্মক সংখ্যা যে বাস্তবতাকে নির্দেশ করে না তা নয়। প্রথমত মনে হতে পারে যে অন্তত এরূপ সংখ্যা বাস্তবতাকে *সরাসরি* নির্দেশ করে না। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে এরূপ সংখ্যা তাও করে। যেমন, কোনো ব্যক্তির কাছে 1,000 টাকা আছে, যা তার নিজের। এই টাকায় তার এক সপ্তাহ চলার কথা। কিন্তু সপ্তাহ শেষে সে দেখল যে তার খরচ হয়েছে 1,200 টাকা। পাটীগণিতের (arithmetic) সামান্য জ্ঞানটুকু তার টাকার হিসেবের বেলায় প্রয়োগ করতে গিয়ে সে দেখল যে তার কাছে আছে :

(1,000 –1,200) টাকা = (–200) টাকা,

---

* মূলত সংখ্যার বা গণিতের ইতিহাসকে বর্ণনা করার জন্য এই আলোচনার অবতারণা করা হয়নি; সংখ্যার উৎপত্তির যৌক্তিক ধারাবাহিকতাকে তুলে ধ'রে তাকে 'যৌক্তিক মনন' দিয়ে 'উপলব্ধি' করার ক্ষেত্রে পাঠককে সাহায্য করার জন্যই এই আলোচনা। সুতরাং একে ইতিহাসের সমার্থক ভাবা ঠিক হবে না।

যা ঋণাত্মক। বাস্তব টাকা কি কখনো ঋণাত্মক হয়? কিন্তু সে গণিত ভালো না জানলেও তার নিজের টাকার উৎস সম্বন্ধে সে একেবারে অজ্ঞ নয়। সে চিন্তা ক'রে দেখল যে এই 200 টাকা সে ধার করেছে—এক বন্ধুর কাছ থেকে নিয়েছে 100 টাকা এবং দোকানে বাকি রেখেছে 100 টাকা। এভাবে ঋণাত্মক চিহ্নটি সম্পূর্ণ যুক্তিযুক্তভাবে তাকে একটি ব্যাখ্যাও প্রদান করল, সেই সাথে তার টাকার হিসেবটাও রাখল। এখানে 1,000 টাকা এবং 1,200 টাকার যে পার্থক্য (অর্থাৎ 200 টাকা), 1,200 টাকা এবং 1,000 টাকারও সেই পার্থক্য, শুধু চিহ্ন আলাদা। কিন্তু গণিত যদি তুচ্ছ মনে ক'রে তার চিহ্নটিকে অগ্রাহ্য করত বা প্রকাশ না করত, তাহলে লোকটি কি ধোকাই না খেত! সে কাগজে কলমে দু'শ টাকা জমিয়ে পরে পকেট হাতড়াত তা পাবার জন্য! সেক্ষেত্রে বরং সেটাই হতো অবাস্তব, নয় কি?

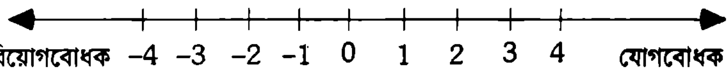
যাহোক, এ পর্যায়ে পূর্বের $a - a = 0$ সমীকরণটির নোতুন আরেকটি ব্যাখ্যাও পাওয়া গেল। $a - a$ এসেছে $a = a$ থেকে। অর্থাৎ কোনো সংখ্যাকে ঐ সংখ্যা থেকে বাদ দিলে যে ঘটনার সৃষ্টি হয় তা থেকে। এখন বুঝা গেল $a + (-a) = 0$। অর্থাৎ প্রত্যেক যোগবোধক সংখ্যার সাথে তার সমমানের বিয়োগবোধক সংখ্যা যোগ করলে যোগফল হবে শূন্য। এখানেই পাটীগণিত এবং বীজগণিতের মৌলিক পার্থক্য।

বীজগণিতে (algebra) 'বিয়োগ' ব'লে কিছু নেই, তাতে আছে একটি যোগবোধক সংখ্যার সাথে অন্য একটি বিয়োগবোধক সংখ্যার 'যোগ' (addition)। শুধু তাই নয়, বীজগণিতে বিয়োগবোধক সংখ্যার সাথেও অন্য কোনো বিয়োগবোধক সংখ্যাকে যোগ করা যায়। আসলে এক্ষেত্রে 'যোগের' ধারণাটাই সুবিধাজনক। কারণ, 'তোমার যা নেই (যেমন উপরোক্ত উদাহরণের 200 টাকা), তা থেকে আর ২০০ টাকা বাদ দাও' বলার চেয়ে 'তোমার যা নেই, তার সাথে আর (–200) টাকা যোগ দাও বা তার সাথে আরো এমন 200 টাকা যোগ দাও যেটাও তোমার নেই' একথা বলাই বেশি অর্থবহ। কারণ এখান থেকেই বুঝা যাচ্ছে $(-a) + (-a) = (-2a)$; অর্থাৎ চিহ্ন দু'টিকে হিসেবে না আনলে সংখ্যা দু'টিকে পাটীগণিতের নিয়মেই যোগ করতে হবে, বিয়োগ নয়।

তাহলে আমরা পেলাম স্বাভাবিক সংখ্যা (natural numbers) এবং শূন্য—যারা উভয়েই পূর্ণ সংখ্যার (whole numbers) অন্তর্গত। এই পূর্ণ সংখ্যা বলতে বুঝানো হচ্ছে যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যাকে, যাদের একটি (অর্থাৎ নিম্নতম মানসম্পন্ন সংখ্যাটি) হলো শূন্য। এই পূর্ণ সংখ্যাগুলির (শূন্য বাদে) বিপরীতে পাওয়া যাচ্ছে ঋণাত্মক সংখ্যা

(negative integers), যাদের উভয়কেই একত্রে বলা হয় integer। অর্থাৎ integer-এর মধ্যে পড়ে 0, 1, 2, 3 . . ., −1, −2, −3, . . . ইত্যাদি। কিন্তু বাস্তব সংখ্যার (real number) দৌড় আরো অনেক দূর। তবে তত দূর যাবার আগে আমরা সংখ্যা রেখা বা **number axis** বা **number line** এর সাথে পরিচিত হব।

সংখ্যা রেখা হলো দু'পাশে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত (যাকে বাস্তবে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হবার প্রয়োজন নেই, যা আমরা পরে জানব) একটি রেখা যার ওপর বিভিন্ন বিন্দু দ্বারা জ্যামিতিকভাবে বিভিন্ন সংখ্যাকে প্রদর্শন করা হয়। নিচের চিত্রটি একটি সংখ্যা রেখাকে বর্ণনা করছে।



দেখা যাচ্ছে যে এই সংখ্যা রেখার ওপর উভয় দিক বরাবর অসীম সংখ্যক যোগবোধক ও বিয়োগবোধক পূর্ণসংখ্যা স্থাপন করা যায়।

তাহলে কি এই সংখ্যাগুলিই সংখ্যার ভুবনের সবগুলি সংখ্যাকে ধারণ করছে? না। আরো বিভিন্ন চরিত্রের সংখ্যার অস্তিত্ব রয়েছে যাদের সঙ্গে এখনও আমরা পরিচিত হইনি।

এতক্ষণ আমরা যোগবোধক এবং বিয়োগবোধক পূর্ণ সংখ্যার যোগ (এবং একই সাথে বিয়োগ) দেখেছি। এই উভয় প্রকার সংখ্যাকে বলে integer। এদের যোগফল থেকে যে-সব অন্যান্য সংখ্যা পাওয়া যায় তারাও প্রত্যেকে integer। যেমন :

$-1-1 = -2$ (integer)
$100-99 = 1$ (integer)
$20+300 = 320$ (integer)
$-100+99 = -1$ (integer)

আসলে এই হিসাব যত ছোট বা বড় integer নিয়েই করি না কেন, তার ফল সর্বদাই একটি integer হবে। গুণনের (multiplication)ক্ষেত্রেও একই কথা। অর্থাৎ *যে-কোনো integer কে অন্য যে-কোনো integer দ্বারা গুণন ক'রে যে গুণফল (product) পাওয়া যায়, তাও হয় integer গোষ্ঠীর।* কারণ গুণন হলো মূলত যোগেরই

সংক্ষিপ্ত এবং 'দ্বিমাত্রিক'(two dimentional)রূপ [একে দ্বিমাত্রিক কেন বলা হচ্ছে তা আমরা পরে দেখব।) যেমন :

$$2 \times 6 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

অর্থাৎ 2 কে 6 বার যোগ করা; কিংবা

$$2 \times 6 = 6 + 6$$

অর্থাৎ 6 কে দুই বার যোগ করা। সুতরাং যোগের ফল যদি উক্ত সংখ্যা গোষ্ঠীর মধ্যে থাকে, তাহলে গুণণের ফলও একই সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে থাকবে, যে-কোনো সংখ্যাকে একই সংখ্যাগোষ্ঠীর অন্য যে-কোনো সংখ্যা দিয়েই গুণন করা হোক না কেন। *পাটীগণিতের operation-এর দ্বারা জানা সংখ্যা থেকে প্রাপ্ত ফল যদি ঐ সংখ্যা-গোষ্ঠীর (অর্থাৎ set) মধ্যে থাকে, তাহলে আর উক্ত গোষ্ঠীভুক্ত নয় এমন কোনো সংখ্যার সন্ধান করার প্রয়োজন হয় না।*

৩.

কিন্তু সংখ্যা নিয়ে আরো নাড়াচাড়া করতে গিয়ে দেখা যায় যে উপরোক্ত সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যকার বিভিন্ন সংখ্যার একটি বিশেষ operation -এর ফলে যে-সংখ্যা পাওয়া যায়, তা আর উক্ত সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে পাওয়া যায় না। এই operationটি হলো ভাগ, যা গুণের বিপরীত (inverse)। উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক :

$$(4 \div 2) \text{ বা } \frac{4}{2} = 2 \text{ (whole number, positive)}$$

$$(6 \div 3) \text{ বা } \frac{6}{3} = 2 \text{ (whole number, positive)}$$

$$\{(-14) \div 2\} \text{ বা } \frac{-14}{2} = -7 \text{ (whole number, negative)}$$

$$\{(-30) \div (-10)\} \text{ বা } \frac{-30}{-10} = 3 \text{ (whole number, positive)}$$

এসব ক্ষেত্রে ভাগফল (quotient) সর্বদা integer গোষ্ঠীতে থাকছে। কারণ এখানে ভাজকের চিহ্নবিহীন মান (absulute value) ভাজ্যের চিহ্নবিহীন মান অপেক্ষা ছোট এবং ভাজক ভাজ্যের একটি উৎপাদক (factor)। যেমন, 4 = 2 × 2 বলে (অর্থাৎ 2, 4-

এর একটি উৎপাদক ব'লে) 2 দ্বারা 4 কে ভাগ করলে একটি পূর্ণ সংখ্যা (whole number) পাওয়া যায়। কিন্তু অন্যান্য ক্ষেত্রে ভাগফল হিসেবে আর পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায় না। যেমন :

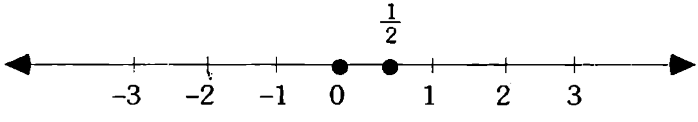
$\frac{m}{n}$ = পূর্ণ সংখ্যা নয় (অর্থাৎ integer নয়), $m > n$ হলেও, যদি n m-এর একটি উৎপাদক না হয়।

$\frac{n}{m}$ = পূর্ণ সংখ্যা নয় (অর্থাৎ integer নয়), যেহেতু $n < m$; n m-এর উৎপাদক হলেও এবার আর পূর্ণসংখ্যা পাওয়া সম্ভব নয়।

সংখ্যার মাধ্যমে দেখা যাক। $\frac{6}{5}$-এ $6 > 5$ হওয়া সত্ত্বেও ভাগফল কোনো পূর্ণ সংখ্যা (integer) নয়, কারণ 5 6-এর একটি উৎপাদক নয়। আবার $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{100}{101}$ ইত্যাদি সংখ্যাও integer নয়।

এই সমস্যা দেখা দেয় বাস্তব জিনিসকে ভাগ করার ক্ষেত্রে। ধরা যাক কেবল integer পর্যন্ত সংখ্যা আবিষ্কৃত হয়েছে এমন যুগে কেউ 3টি আমকে 6 জনের মধ্যে ভাগ ক'রে দিতে চাইল। সে প্রথমে 1টি ক'রে 1 জনকে দিতে গিয়ে দেখল যে 3 জনকে দেবার পর আম আর নেই, অথচ লোক আরো 3 জন বাকি রয়ে গেছে। সে লক্ষ্য করল যে যত জনকে আম দেয়া হয়েছে ঠিক তত জনই বাদ প'ড়ে গেছে।

ফলে তার মাথায় স্বাভাবিকভাবে একটি বুদ্ধি এসে গেল : যদি প্রতিটি আমকে কেটে দুই ভাগ করা হয়, তাহলে প্রত্যেকে এক খণ্ড ক'রে পাবে, একটি খণ্ডও বেশি বা কম হবে না! কিন্তু এখন 1 জনে 1টি ক'রে *আম* পাচ্ছে না, পাচ্ছে 1টি করে *খণ্ড*। এই একটি খণ্ড হলো 1টি আমের 2 ভাগের 1 ভাগ, যাকে *ইচ্ছাকৃত একটি প্রতীকের* মাধ্যমে লেখা হলো $\frac{1}{2}$। অর্থাৎ প্রত্যেকে $\frac{1}{2}$টি ক'রে আম পেল। অন্য কথায় বলা যায়, প্রত্যেকে 1টি আমের 2 ভাগের 1 ভাগ পেল। তাহলে $\frac{1}{2}$ (2-এর 1 বা one upon two) হলো একটি সংখ্যা, যার মান হলো, স্বাভাবিক চিন্তায়, 'অর্ধেক'। সংখ্যা রেখায় এই সংখ্যাটিকে দেখা যাক :



সংখ্যা রেখার একটি সংখ্যা থেকে পরবর্তী সংখ্যাটি পর্যন্ত দূরত্বকে 1 সংখ্যাটির সম-মান হিসেবে ধ'রে নিলে দেখা যায় যে প্রতি দু'টি সংখ্যার মধ্যে কিছু না কিছু দূরত্ব আছে। এই সব অন্তবর্তী স্থানে বসানোর জন্য যদি কোনো সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহলে তা নিশ্চয়ই integer গোষ্ঠীর বাইরের কোনো সংখ্যা হবে। এভাবে $\frac{1}{2}$ কে 0 এবং 1-এর ঠিক মধ্যস্থানে বসানো যায়। কারণ $0 < \frac{1}{2} < 1$ এবং $(0 + 1) / 2 = \frac{1}{2}$।

কিন্তু $\frac{1}{2}$ বললে শুধু একটু বুঝা যায় যে তা একটি প্রতীক (symbol) যার অর্থ হলো '1 কে 2 দ্বারা ভাগ করতে হবে'। [অবশ্য যে-কোনো সংখ্যা মানেই প্রতীক]। কিন্তু ভাগ করার পর ভাগফল কত হবে? $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ইত্যাদি সরল-সোজা সংখ্যা ব'লে এদেরকে এই আকারে দেখেও আমরা এদের মর্মার্থ বুঝতে পারি—যেমন $\frac{1}{4}$ মানে হলো 4 ভাগের 1 ভাগ, অর্থাৎ 1 কে (কিংবা একটি সমষ্টিকে) 4 দ্বারা ভাগ করতে হবে। কিন্তু $\frac{203}{301}$, $\frac{17}{19}$, $\frac{2001}{9810}$ ইত্যাদি সংখ্যাকে ঠিক এই রূপে রেখে তাদের মর্মার্থ অনুধাবন করা বড় কষ্টকর। এটুকু হয়তো বুঝা যাচ্ছে যে সংখ্যা রেখার কোনো একটি শূন্যস্থানে (অর্থাৎ অন্তর্বর্তী স্থানে) এদের একেকটি বসবে। কিন্তু কোথায়? তা জানতে হলে এদেরকে ভাগ করতেই হবে।

কিন্তু, যদি ধ'রে নেই আমরা কমপক্ষে সাত হাজার বছরেরও আগের যুগের মানুষ এবং আমাদের সংখ্যার জ্ঞানের দৌড় কেবল integer-এর মধ্যে সীমিত, তাহলে আমরা বড় জোর $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2001}{9810}$ ইত্যাদি *প্রতীকগুলিকে* কিছুটা বুঝতে পারব, এদের *মান* যে কী তা হিসেব ক'রে বের করতে পারব না। কারণ যে-ভাগের ফল integer-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যাবে না, তা আমরা চিনব কিভাবে? উপরোক্ত প্রতীকগুলিকে কিছুটা বুঝতে পারা সম্ভব হবে, কারণ সেগুলিতে লব (numerator) এবং হর (denominator) উভয়ই integer। বাস্তবতা অংকের চেয়ে সোজা; যেমন, একটি আমকে একাধিক ব্যক্তির মধ্যে ভাগ করতে গিয়ে সমস্যা হলে তা কেটে ফেললে সমস্যা আর থাকে না (অবশ্য আমের উদাহরণের বদলে আমাদের উচিত ছিল আপেলের উদাহরণ নেয়া। আমের আঁটির কারণে তা কাটা সম্ভব না হলে কিংবা সুষমভাবে ভাগ করা সম্ভব না হলে integer-এর বাইরে পড়ে এমন সংখ্যা আবিষ্কার করতে দেরি হয়ে যাবে!), কিন্তু একটি

আমকে কাটা যত সোজা, 1কে (অর্থাৎ 1 সংখ্যাটিকে) কাটা তত সোজা নয়। তাই ব'লে থেমে থাকলে তো চলবে না—সংখ্যা রেখার 'অন্তর্বর্তী' স্থানগুলিতে অন্যান্য বিন্দুর দ্বারাও যে আরো অন্যান্য সংখ্যাকে তুলে ধরা যায় একথা যখন আবিষ্কার করতে পেরেছি, তখন ঐ বিন্দুগুলিকেও আবিষ্কার করতে হবে। $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{200}{201}$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে জ্যামিতিক উপায়ে (অন্তত বাস্তবে না হলেও তত্ত্বীয়ভাবে) তাদের যথাযথ বিন্দুতে বসানো যায় ঠিকই, তবে আমাদের দরকার উক্ত বিন্দুর (যতদূর সম্ভব) সঠিকতম *সংখ্যাগত মান* হিসেবে ক'রে বের করা।

কিন্তু তার আগে আমরা যে-পদ্ধতিতে প্রতীকের সাহায্যে সংখ্যা লিখি তার সম্বন্ধে কিছুটা জানতে হবে। ভগ্নাংশের (fraction—অর্থাৎ $\frac{n}{m}$ যেখানে $n < m$) ভাগ প্রক্রিয়া না জানলে তার মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

৪.

আমরা যে-পদ্ধতিতে সংখ্যা লিখি তাকে বলে দশমিক পদ্ধতি (decimal system)। কিন্তু কাকে বলে দশমিক পদ্ধতি? অনেকেই এর উত্তর দিতে গিয়ে হিমশিম খেয়ে যায়। কিন্তু আসলে ব্যাপারটি খুব সোজা, যদিও এর উদ্ভাবন মানব চিন্তার ইতিহাসে সবচেয়ে বড় সার্থকতার মধ্যে অন্যতম একটি সার্থকতা। তবে একটি মজার ব্যাপার হলো এই যে, এই পদ্ধতিতে আমরা ছোট বেলা থেকে এত বেশি অভ্যস্ত হয়ে গেছি যে তাকেও যে বিশ্লেষণ করা যেতে পারে কিংবা এও যে মানুষকে অনেক ঠেকায় পড়ে হিসেব ক'রে আবিষ্কার করতে হয়েছে, তা ভাবতেও আমাদের অবাক লাগে।

প্রথমে নিজেকে প্রশ্ন করার মাধ্যমেই শুরু করা যাক। আমরা, উদাহরণস্বরূপ, এগার সংখ্যাটিকে 11 প্রতীকটি দ্বারা লিখি কেন? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9-এগুলোর জন্য ভিন্ন ভিন্ন প্রতীক ব্যবহার করি, অথচ দশ এর পর থেকে সবকিছু একটি নিয়ম মেনে চলে কেন? যেমন এগার, বার, তের, চৌদ্দ, পনর, ষোল—ইত্যাদি লেখার জন্য 1-এর পর যথাক্রমে1, 2, 3, 4, 5, বা 6 বসালেই চলে কেন? ধরা যাক রোমান সংখ্যা লেখার পদ্ধতির কথা, যা সবারই জানা। রোমান পদ্ধতিতে কয়েকটি সংখ্যা লেখা যাক :

1 = I	7 = VII	35 = XXXV
2 = II	8 = VIII	38 = XXXVIII

3 = III	9 = IX	40 = XL
4 = IV	10 = X	50 = L
5 = V	11 = XI	60 = LX
6 = VI		70 = LXX

দেখা যাচ্ছে যে 1 থেকে 3 পর্যন্ত সংখ্যার জন্য এবং5-এর জন্য আলাদা প্রতীক। এগুলিকে ব্যবহার করেই 4 , 6, 7, 8 সংখ্যাগুলিকে লেখা হয়। বড় সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের বামে ছোট সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক বসালে বড়টির মান থেকে ছোটটির মান বাদ যায়। ফলে V (= 5)-এর বামে I (= 1)-বসিয়ে পাওয়া যায় IV (= 4), এবং তার ডানে I বসিয়ে পাওয়া যায় VI (=6)। এখানে এটুকু বুঝতে অসুবিধা হবার কথা নয় যে রোমান পদ্ধতিতে প্রতীকগুলির *অবস্থানগত* (বা স্থানিক, positional) চরিত্র (characteristic) আছে, কিন্তু স্থানগত মান নেই। অর্থাৎ কোনো সংখ্যাকে (অর্থাৎ প্রতীককে) অন্য কোনো সংখ্যার ডানে বসানো হলো নাকি বামে বসানো হলো, এবং তা অন্যটির তুলনায় ছোট নাকি বড়, তা দ্বারা নির্ধারিত হবে উক্ত প্রতীক দু'টির মানকে যোগ নাকি বিয়োগ করতে হবে তা। কিন্তু কোনো প্রতীককে যে অবস্থানেই বসানো হোক, তার মান (value) পাল্টায় না। যেমন—I বা II কে যেখানেই বসানো হোক, তা সর্বদা I বা II থাকে, এবং পার্শ্ববর্তী প্রতীক-মান থেকে I বা II-ই বাদ যায়, বা তার সাথে I বা II-ই যোগ হয়। (কিন্তু 2-এর ডানে 0 বসালে কি তার মান 2 + 0 হয়? 20 এর ডানে আরেকটা 0 বসালে তার মান কি 20 + 0 হয়? কিংবা 10-এর বামে 1 বসালে তার মান কি 10 – 1 = 9 হয়? এর রহস্য আমরা একটু পরেই জানব।)

তাহলে I, II, III এবং V-এই প্রতীকগুলি দিয়ে উক্ত নিয়মে 30 সংখ্যাটিও লেখা সম্ভব : VVVVVV। 36- ও লেখা যায় : VVVVVVVI। কিংবা 103 ও লেখা যায় : VVVVVVVVVVVVVVVVVVVVIII। অর্থাৎ এভাবে যে-কোনো সংখ্যাই লেখা যায়। কিন্তু, দুর্ভাগ্যবশত, সংখ্যার মানের সাথে প্রতীকের সংখ্যা পাল্লা দিয়ে বাড়তে থাকবে। এই সমস্যা বুঝতে পেরে প্রাচীন রোমানরা আরো কিছু প্রতীকের ব্যবহার উদ্ভাবন করেছিল : 10 = X, 50 = L, 100 = C, 1000 = M। তাতে লাভ হলো শুধু এই যে, বড় সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রতীক-সমষ্টির দৈর্ঘ্য কমল, কিন্তু প্রতীকের *স্থানিক সম্পর্কের* নিয়ম দু'টি আগের মতোই রয়ে গেল। ফলে, VV-এর বদলে লেখা হলো X, XXXXX-এর বদলে লেখা হলো শুধু L। কিন্তু 11 বা 51 লেখার সময় X বা L এর সাথে আগের নিয়মেই I কে বসানো হলো : 11 = XI; 51 = LI। ঘুরে ফিরে যে লাঠি সেই ঠ্যাঙ্গা । আরো দেখা যাক :

XXXXXXXXXX = 100
বা, (XXXXX) (XXXXX) = 100
বা, (L) (L) = 100
বা, LL = 100
বা, C = 100

শুধু প্রতীকের সংক্ষেপন, আর কোনো অভিনবত্ব এলো না।

এবার রোমান পদ্ধতিতে কয়েকটি যোগ-বিয়োগ ক'রে দেখা যাক :

X + X = XX
(10 + 10) = 1010 কি?
(অর্থাৎ XX= 20, কিন্তু 1010 = 20 কি?)
V.+VI = VVI = XI
5 + 6 = 56 কি?
(অর্থাৎ VVI= 11; কিন্তু 56 = 11 কি?)
L – X = XL
(50 – 10) = 1050 কি?
(অর্থাৎ XL= 40, কিন্তু 1050 = 40 কি?)

এবার দৃষ্টি দেয়া যাক আমাদের দ্বারা ব্যবহৃত দশমিক পদ্ধতির দিকে। এই পদ্ধতিতে :

50 + 1 = 501 নয়, 51
50 – 1 = 150 নয়, 49

অর্থাৎ 50 এবং 1 প্রতীকগুলি যোগের সময়ে পাশাপাশি ব'সে যায় না, একটি আরেকটিকে গ্রাস ক'রে বৃদ্ধি পায় বা হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। আবার :

$50 \times 10 = 500$

$50 \div 10 = 5$

অর্থাৎ গুণনের সময়ে গুণক (multiplier) যদি হয় 10 বা 10-এর গুণিতক, তাহলে গুণ্যের (multiplicand) ডান পাশে (রোমান সংখ্যার যোগের মতো) 1-এর শূন্যগুলি পরপর বসে যায়। এবং ভাগের ক্ষেত্রে হয় ঠিক তার উল্টো : শূন্যের সংখ্যা কমে যায় (যদি গুণ্যে শূন্য থাকে) ; তবে রোমান পদ্ধতির মতো শূণ্যের বাম পাশে এসে শূন্য ব'সে যায় না।

তাহলে অন্তত এটুকু তো বুঝা গেল যে রোমান এবং দশমিক পদ্ধতি এক নয়, এবং আমরা যে-দশমিক পদ্ধতি ব্যবহার করি তার গঠনতত্ত্ব না জেনেও আমরা অনেকে তা নিয়ে রীতিমতো কাজ চালিয়ে যাচ্ছি। এই *সচেতনতাটুকুই* এ পর্যায়ে যথেষ্ট। এখন আমরা আরো পদ্ধতিগতভাবে দশমিক পদ্ধতির গঠনতত্ত্ব উৎঘাটন করব।

দশমিক পদ্ধতির ভিত্তি (base) হলো দশ। অনুমান করা হয়ে থাকে যে প্রাচীন মেসোপটেমীয় সভ্যতার যুগে এই পদ্ধতি উদ্ভাবিত হয়। তখন মানুষ গণনার জন্য হাতের দশটি আঙুলের সাহায্য নিত। উহারণস্বরূপ, কারো ত্রিশটি পাখি গোনার দরকার হলে সে দুই হাতের আঙুলগুলো একত্র ক'রে দশটি ক'রে তিনবার গুনত। হয়তো তখন 'ত্রিশ' সংখ্যাটির জন্য আলাদা কোনো নাম ছিল না, 'তিন বার দশ' এভাবে হয়তো তারা গুনত। এমনকি এখনও তো আমাদের দেশের অনেক অশিক্ষিত মানুষ (সচরাচর গ্রামের লোকজন) 'কুড়ি' দিয়ে টাকা বা দ্রব্যাদি গণনা করে। তাদের অধিকাংশই 'পঞ্চাশ' কাকে বলে বোঝে না, বোঝে 'দুই কুড়ি এবং দশ' বলে কী বুঝায়। এভাবে তারা 'চল্লিশ' না বুঝলেও বোঝে 'দুই কুড়ি' মানে কত। ফলে তাদের প্রতীক—যাকে আমরা বলি অংক বা digit—দরকার হতো মাত্র 9টি : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, এবং 9।* ধরা যাক তারা একটি 'দশ' লিখত একটি তারকা চিহ্নের '(*) মাধ্যমে। তাহলে এই পদ্ধতিতে দশ পর্যন্ত তারা লিখত এভাবে।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,*

এখন স্পষ্টই বুঝা যাচ্ছে তারা কিভাবে 'কুড়ি' লিখত। তারা তো আর 'কুড়ি' বা 'twenty' বলত না, তারা বলত 'দুই দশ' বা '২(*)'। এভাবে ত্রিশ, চল্লিশ, পঞ্চাশ

* ঠিক এই প্রতীকগুলি তারা ব্যবহার করত না। এমনকি তাদের সংখ্যাপাতন পদ্ধতিও এখনকার মতো ছিল না।

ইত্যাদি সংখ্যার প্রতীক হিসেবে তারা ব্যবহার করত যথাক্রমে 3(*), 4(*), 5(*) . . . ইত্যাদি, যেগুলোকে হয়তো তারা উচ্চারণ করত এভাবে : তিন দশ, চার দশ, পাঁচ দশ . . . ইত্যাদি। এখানে লক্ষ্য করতে হবে যে, তারা রোমান পদ্ধতির মতো দুই দশ, তিন দশ, চার দশ ইত্যাদির জন্য পাশাপাশি '*' চিহ্নটি একাধিকবার ব্যবহার করেনি। তা করলে সংখ্যাগুলি হতো এরূপ :

কুড়ি = (*) (*)
ত্রিশ = (*) (*) (*)
চল্লিশ = (*) (*) (*) (*)
পঞ্চাশ = (*) (*) (*) (*) (*)

যার সাথে রোমান পদ্ধতির কোনো মূল পার্থক্য থাকত না। কিন্তু তারা তাদের উদ্ভাবিত 1থেকে 9 অংকগুলি ব্যবহার ক'রেই সংখ্যাগুলিকে এভাবে লিখত :

কুড়ি = 2টি (*) = 2 (*)
ত্রিশ = 3টি (*) = 3 (*)
চল্লিশ = 4টি (*) = 4 (*)
পঞ্চাশ = 5টি (*) = 5 (*)

ফলে রোমান পদ্ধতিতে যেখানে সংখ্যাতে প্রতীকগুলির মানকে *যোগ* করা হতো, সেখানে দশমিক পদ্ধতিতে সেগুলিকে করা হতো *গুণন*। অর্থাৎ দশমিক পদ্ধতি হলো ***গুণাত্মক*** (multiplicative)। এতে দারুন সুবিধাও হলো। দুই দশ এবং তিন দশকে যোগ করা হতো খুব সহজে :

2 (*) + 3 (*) = (2 + 3) (*) = 5 (*)

কিন্তু এর চেয়ে বড় উদ্ভাবন হলো দশের গুণিতকগুলির মাঝামাঝি সংখ্যাগুলি লেখার পদ্ধতি। ধরা যাক তারা (*) + 1 কে এভাবে লিখত :

এক দশ + এক
= 1(*) + 1
= 11

এক্ষেত্রে তারা '(*)' চিহ্নটিকে তুলে দিয়ে ডানের 1 কে তার স্থানে বসাল। পাওয়া গেল 11 = এগার। একে উল্টোভাবে বিশ্লেষণ করলেই সংখ্যাটির গঠন-রহস্যটি বেশি ভালোভাবে বুঝা যাবে :

$$11 = 1(*) + 1$$

অর্থাৎ ডান থেকে বাম দিকের দ্বিতীয় সংখ্যাটির সাথে একটি দশ গুণন করা আছে। এভাবে :

এক দশ + দুই = 1 (*) + 2 = 12
এক দশ + তিন = 1 (*) + 3 = 13

. . .   .

এক দশ + নয় = 1(*) + 9 = 19
এক দশ + দশ = 1 (*) + 1(*) = (1 + 1) (*) = 2 (*) (= দুই দশ)
দুই দশ + এক = 2 (*) + 1 = 21

. . .   .

নয় দশ + নয় = 9 (*) + 9 = 99
নয় দশ + দশ = 9 (*) + 1 (*) = . . .?

এবার কী বসবে? কিছুক্ষণের জন্য আমাদেরকে জানা রীতি ভুলে গিয়ে ভাবার চেষ্টা করতে হবে। এবার হবে : (9 + 1) (*) = (এক দশ) দশ = 1 (*) (*)।

এবার দেখা যাচ্ছে যে কোনো সংখ্যায় ব্যবহৃত সর্বডানের প্রতীকের সাথে 1গুণন করা আছে, এবং তার বাম পাশের প্রতীকের সাথে **একটি দশ** গুণন করা আছে, এবং তার বাম পাশের প্রতীকের সাথে আছে **দশটি দশ** গুণন করা। এভাবে :

দশ দশ + এক   = 1 (*) (*) + 1
= 1 (*) 1

অর্থাৎ 1 থেকে 9 পর্যন্ত কোনো অংক যোগ করা হলে তা *শেষের* (*) চিহ্নটির স্থান দখল করছে। কিন্তু 9 এর বেশি মানের কোনো সংখ্যাকে যোগ করলে কী হয় দেখা যাক :

দশ দশ + নয় = 1 (*) (*) + 9 = 1 (*) 9
দশ দশ + দশ = 1 (*) (*) + 1 (*)
= . . . .?

কী হবে? খুবই সোজা। উভয় সংখ্যার ডানে আছে (*) চিহ্নটি। সুতরাং ডানে উক্ত চিহ্নই বসবে। প্রথম সংখ্যাটির বাম থেকে ডান দিকে দ্বিতীয় প্রতীক হলো (*), যা 1 থেকে 9 পর্যন্ত অন্য কোনো অংকের আক্রমণে উধাও হয়ে যায়। দ্বিতীয় সংখ্যার উক্ত অবস্থানে আছে1। সুতরাং উক্ত 1পূর্ববর্তী সংখ্যার মাঝের (*) কে উচ্ছেদ ক'রে দিয়ে তার জায়গা দখল করবে। ফলে 1 (*) (*) + 1 (*) = 11 (*) = এক শত দশ। এভাবে :

'দশ এবং এক দশ + এক
= এগার দশ + এক
= 11 (*) + 1 = 111

. . . .
উনিশ দশ + নয় = 19 (*) + 9 = 199

. . . .
নিরানব্বই দশ† + নয় = 99 (*) + 9 = 999
নিরানব্বই দশ + দশ = 99 (*) + 1 (*) = ...?

এবার হলো আরেক সমস্যা। কী হবে এখানে? আসলে নিরানব্বই দশ + দশ
= নব্বই দশ + নয় দশ + একদশ
= 9 (*) (*) + 9 (*) + 1 (*)

---

†. নিরানব্বই = নয় দশ + নয়
= 9 (*) + 9
=99

= 9 (*) (*) + দশ দশ

= 9 (*) (*) + 1 (*) (*)

= এক শত দশ

= (9 + 1) (*) (*)

=1 (*) (*) (*)

= এক হাজার।

তাহলে দেখা গেল যে দশমিক পদ্ধতির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ কথা হলো এই যে, তাতে 'দশ' ক'রে সংখ্যার উপরের দিকে এগুনো হয়। *কোনো সংখ্যার মান শেষের ঘরে সর্বোচ্চ 9 পর্যন্ত বাড়তে পারে, তার চেয়ে তার মান 1 বাড়লে তা হয়ে যায় 'দশ', যে-কারণে তখন হিসেব চলে যায় দশকের ঘরে* (যেহেতু 9-এর পরের সংখ্যাটি হয় দুই প্রতীকের)। যেমন—

নয় দশ = 9 (*)

নয় দশ + নয় = 9 (*) 9 নয়, হবে 99

নয় দশ + দশ = 9 (*) + এক দশ

= 9 (*) + 1 (*)

= (9+ 1) (*)

= {1 (*)} (*)

= 1 (*) (*)।

সংখ্যার ক্রমবৃদ্ধির সাথে সাথে তার মধ্যকার প্রতীকগুলির এই অবস্থান পরিবর্তনের এই সুনির্ধারিত নিয়মটিই দশমিক পদ্ধতির সবচেয়ে বড় সুবিধা। এতে কোনো সংখ্যার প্রতীক-সংখ্যা বৃদ্ধি করলে উক্ত সংখ্যার মান জ্যামিতিক হারে বৃদ্ধি পায় ব'লে বিশাল বিশাল সংখ্যাকেও অত্যন্ত সংক্ষেপে লেখা যায়।

এতক্ষণে নিশ্চয়ই বুঝা গেছে যে আমাদের ব্যবহৃত (*) চিহ্নটি হলো বর্তমানে ব্যবহৃত শূন্য বা 0। এই শূন্যকে আবিষ্কার করতে মানুষের হাজার হাজার বছর সাধনা করতে হয়েছে!*

---

* আবারও স্মরণ করিয়ে দেয়া যেতে পারে যে এতক্ষণ আমরা যে-আলোচনা করলাম তা ইতিহাসের অনুগামী তবে হুবহু ইতিহাস নয়।

৫.

এবার আমরা বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কিত পুরনো আলোচনায় ফিরে যাব। আমাদের আলোচনার বিষয় ছিল কিভাবে ভগ্নাংশকে (অর্থাৎ $\frac{n}{m}$ কে, যেখানে $n<m$) ভাগ করা যায়। আমরা দেখেছিলাম যে বস্তুকে কেটে ভাগ করা সহজ হলেও সংখ্যাকে, যেমন—1কে, কেটে ভাগকরা সহজ নয়। কিন্তু এখন আমরা তা পারব। প্রথমেই ধরা যাক $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ এর ব্যাপার।

1 কে 2 দ্বারা ভাগ করা যাচ্ছে না? তাহলে দশমিক পদ্ধতি (ভিত্তি বা base 10 বলেই পদ্ধতিটির এরূপ নাম হয়েছে) অনুসারে একে 1 থেকে পুরোপুরি10-এ নিয়ে আসি। পাওয়া গেল $\frac{10}{2}$। এবার একে ভাগ করা সম্ভব। $\frac{10}{2} = 5$। কিন্তু $\frac{1}{2}$ যেহেতু 1 এর চেয়ে ছোট, সেহেতু এই 5-ও নিশ্চয়ই এমন একটি সংখ্যা যা 1এর চেয়ে ছোট। অর্থাৎ এই 5-এর মান যদি r হয়, তাহলে $r < 1$। এই r-এর এই বৈশিষ্ট্যকে বুঝানোর জন্য তার বামে একটি ডট (·) চিহ্ন দেয়া হয়, যাকে বলে দশমিক বা decimal point। তাহলে $\frac{1}{2} = \cdot 5$।

আবার \f(1,4) সংখ্যাটিও 1-এর চেয়ে ছোট। তাহলে 1 কে 10-এ উন্নীত করা যাক : $\frac{10}{4}$। 10 কে 4 ভাগ করলে এক ভাগে 2 ক'রে পড়ে এবং আরো 2 বেশি রয়ে যায়, যাকে ভাগ করা যায় না। অর্থাৎ :

$$\frac{10}{4} \rightarrow 2 + \frac{2}{4} \text{ [কারণ, } \frac{10}{4} = \frac{8+2}{4} = \frac{8}{4} + \frac{2}{4} = 2 + \frac{2}{4} \text{]}$$

কিন্তু, আমাদের পূর্ববর্তী সংখ্যা মতে, এই 2 কিন্তু পূর্ণ সংখ্যা 2 নয়; এর মান 1 অপেক্ষা কম। ফলে লেখা যাক :

$$\cdot 2 + \frac{\cdot 2}{4} = \frac{1}{4}$$

দ্বিতীয় রাশিটির 2 এর আগে দশমিক বিন্দু বসল কেন? কারণ এই ·2-ও পূর্ববর্তী 10-এর অংশ—অর্থাৎ 'দশমিক পদ্ধতির' কাছ থেকে 'ধার করা'। এই সুবিধাকে আমাদের যোগ্যতার কারণে আমরা পাচ্ছি তা নয়, এ হলো দশমিক পদ্ধতির কৃতিত্ব। তাহলে এই

$\dot{}2$ কে (এখানে ($\dot{}$) চিহ্নটিও একটি প্রতীক মাত্র) 4 দ্বারা ভাগ করা যাচ্ছে না বলে একে আরো 10 ধাপ ওঠানো যাক :

$$\frac{\dot{}2}{4} \rightarrow \frac{\dot{}2 \times 10}{4} \rightarrow \frac{\ddot{}20}{4} \rightarrow \ddot{}5$$

এবার খটকা লাগলো—*দু'টি* দশমিক বিন্দু কেন? আগেই তো বলা হয়েছে যে এখানে দশমিক বিন্দুও একটি প্রতীক। 2-এর আগে এমনিতেই একটি দশমিক বিন্দু আছে, তার পর তাকে আরেকবার 10 ধাপে উন্নীত করা হলো ব'লে সে পদ্ধতির কাছে আরেক বার ঋণী। ফলে আপাতত তার মাথায় দু'টি দশমিকে কলংকের টিপ দিয়ে তাকে দাগী ক'রে রাখা হলো। বুঝানো হলো সে দুই বার 10 ধাপে উন্নীত হয়েছে। অন্য কথায় তার মান $10 \times 10 = 100$ গুণ বৃদ্ধি করা হয়েছে, ভাগের সুবিধার জন্য। ফলে তার প্রকৃত মান হলো তাকে এখন যতটুকু দেখা যাচ্ছে (অর্থাৎ 5), তার একশ'ভাগের এক ভাগ, অর্থাৎ $\frac{5}{100}$। কিন্তু আমরা নিয়ম করেছি এই যে কোনো সংখ্যার বামে **কেবলমাত্র একটি** দশমিকের কলংকের ছাপ দেয়া যাবে, তার বেশি নয়। সংখ্যাটি যদি একের অধিক বার 'পদ্ধতির' কাছ থেকে 10 ঋণ নিয়ে থাকে তাহলে তার একটি দশমিককে রেখে বাকিগুলির বদলে শূন্য লিখতে হবে। ফলে :

$$\ddot{}5 \rightarrow \dot{}05 = \frac{5}{100}$$

তাহলে $\frac{1}{4} = \dot{}2 + \dot{}05$

$= \dot{}20 + \dot{}05$

$= \dot{}25^*$

$\frac{1}{5}$-কেও একই ভাবে দশমিক ভগ্নাংশে (decimal fraction) রূপান্তরিত করা যায় :

$$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{10}{5} \rightarrow \dot{}2$$

* দশমিক সংখ্যার ডানে ইচ্ছে মতো যতগুলো দরকার শূন্য নেয়া যায়। তাতে সংখ্যার মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন $\dot{}1 = \dot{}10 = \dot{}100$। অর্থাৎ $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}$: অর্থাৎ কোনো জিনিসের 10 ভাগের 1 ভাগ যা, তার 100 ভাগের 10 ভাগও তাই, তার 1000 ভাগের 100 ভাগও তাই। অধিকন্তু, যোগ বা বিয়োগ করার সময়ে বাম পাশের দশমিক বিন্দু থেকে সংখ্যাগুলিকে সাজাতে হয়। (কেন?)

এবার একটি অপেক্ষাকৃত বড় উদাহরণ নেয়া যাক। $\frac{1}{25}$ =—? প্রথমে 1 কে 10 ধাপ বাড়িয়ে দেই : $\frac{10}{25}$। কিন্তু এখনও লব হর অপেক্ষা ছোট। সুতরাং ·10 কে আরো 10 ধাপ বাড়িয়ে দেই : $\frac{\cdot\cdot 100}{25}$। এবার ভাগ করা সম্ভব : $\frac{\cdot\cdot 100}{25} = \cdot\cdot 4$। একটি দশমিকের স্থলে 0 বসালে পাওয়া যায় ·04। একই ভাবে $\frac{1}{2000}$ এর মান বের করতে গিয়ে 1 কে প্রথমে 10 ধাপে = ·10,তারপর 10 ধাপে = ··100, তারপর 10 ধাপে = ···1000, এবং অবশেষে আরো 10 ধাপে = ····10000, উন্নীত করতে হবে। ফলে $\frac{\cdot\cdot\cdot\cdot 10000}{2000} = \cdot\cdot\cdot\cdot 5 = \cdot 0005$।

আসলে যতক্ষণ না পর্যন্ত হর দ্বারা লবকে ভাগ করা যাচ্ছে, ততক্ষণ পর্যন্ত লবকে 10 ধাপ করে বৃদ্ধি করতে হবে।*

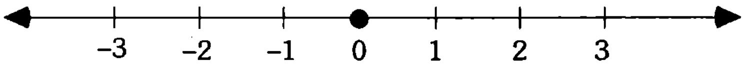
৬.

এখন প্রশ্ন হলো : এই যে দশমিক ভগ্নাংশগুলি পেলাম, এদের মানেটা কী? অর্থাৎ ·5, ·25, ·05, ·04, ·0005 ইত্যাদি দ্বারা আসলে কী বুঝানো হচ্ছে? এরা যদি 1 অপেক্ষা ছোটই হয়, তাহলে এদের পরিমাণকে অনুভব করা যাবে কিভাবে? আসলে এসব প্রশ্নের উত্তর গভীরভাবে বুঝতে না পারলে বাস্তব সংখ্যার চরিত্র, অমুলদ সংখ্যা (যা আমরা পরে জানব), এবং কাল্পনিক সংখ্যা (এটি সম্বন্ধে বিস্তারিতভাবে জানা যাবে পরবর্তী অধ্যায়ে) সম্পর্কে কোনো ধারণাই করা যাবে না। *বিজ্ঞান তথা জ্ঞানকে ভালোবাসতে হলে গণিতকে ভালোবাসতে হবে, আর গণিতকে ভালোবাসতে হলে ভালোবাসতে হবে সংখ্যাকে*। উপরোক্ত মৌলিক প্রশ্নের উত্তর পরিচ্ছন্নভাবে না দিতে পারা পর্যন্ত সংখ্যাকে ভালোবাসার যোগ্যতা অর্জন করা যায় না।

এরূপ প্রশ্নের জবাব খোঁজার জন্য আমাদেরকে আবারও সংখ্যা রেখার সাহায্য নিতে হবে।

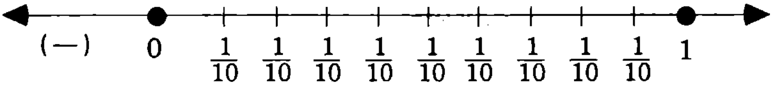
---

* 1 কে বিভিন্ন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করাই যথেষ্ট; উক্ত ভাগফলকে ব্যবহার ক'রেই অন্যান্য লবের জন্য মান বের করা যায়। যেমন $\frac{3}{5}$ এর জন্য প্রথমে $\frac{1}{5} = \cdot 2$ নির্ণয় করে তাকে 3 দিয়ে গুণন করলেই পাওয়া যাবে বাঞ্ছিত সংখ্যাটি। অর্থাৎ $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times 3 = \cdot 2 \times 3 = \cdot 6$। $\frac{1}{m}$ এ আকারের ভগ্নাংশকে বলে unit fraction বা এককের ভগ্নাংশ।



সংখ্যা রেখার ওপর আমরা 1 থেকে 2 কে এবং 2 থেকে 3 কে (ইত্যাদি . . .) ইচ্ছাকৃত একটি ব্যবধানে রেখেছি। এই ব্যবধানকে বড় বা ছোট করলে সংখ্যার মানের বা অন্তবর্তী সম্ভাব্য সংখ্যার সংখ্যার (number of numbers) ওপর কোনো প্রভাব পড়বে না। কিন্তু বিশ্লেষণের সুবিধার জন্য ধরা যাক 1 থেকে 2-এর (এবং 2 থেকে 3-এর . . . ইত্যাদি) মধ্যে 1 ইঞ্চি দূরত্ব আছে। তাহলে $\frac{1}{2}$ সংখ্যাটিকে 1 এবং 2 এর মাঝামাঝি বসাতে হবে। অর্থাৎ 1 ইঞ্চিকে ঠিক 2 ভাগে ভাগ ক'রে মধ্যবিন্দু দ্বারা $\frac{1}{2} =$ ·5 কে চিহ্নিত করতে হবে। এভাবে $\frac{1}{4}$ কে চিহ্নিত করতে গেলে উক্ত 1 ইঞ্চিকে ঠিক চার ভাগে ভাগ করে সবচেয়ে বামপাশের যে বিন্দুটি পাওয়া যাবে (মোট 3টি বিন্দু পাওয়া যাবে) তা দ্বারা তাকে চিহ্নিত করতে হবে, ইত্যাদি। কিন্তু এ তো গেল জ্যামিতিক ব্যাখ্যা। ভাবখানা এমন যেন রেখাংশটিকে রুলার দিয়ে মেপে কিংবা ভাঁজ ক'রে উক্ত বিন্দুগুলি বের করা হচ্ছে। আমাদের দরকার উক্ত বিন্দুগুলির 'দশমিক ব্যাখ্যার' যার পদ্ধতি একই, তবে যা আমাদেরকে দশমিক সংখ্যা সম্বন্ধে প্রকৃত ধারণা দিবে।

দশমিক পদ্ধতির ভিত্তি (base) যেমন10, তেমনি তাতে দশমিক *ভগ্নাংশের* ভিত্তিও 10। অর্থাৎ সংখ্যা রেখার 1 ঘর = 10 হলে, এই দশকে আবার 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 এই দশটি ভাগে ভাগ করা যায়; অন্য কথায়, রেখাংশের একটি একক রেখাংশকে আবারও $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, —এই নয়টি বিন্দু দ্বারা বিভক্ত করা যায় :



(+) →

(0-1 রেখাংশটিকে একটু বড় ক'রে দেখানো হলো।)

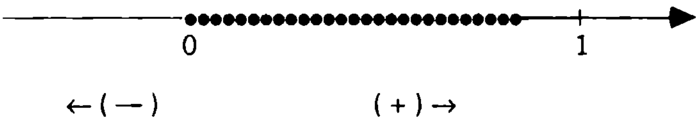
আসলে এই বিন্দুগুলি হলো ·1 বা 1-এর দশ ভাগের এক ভাগ। এবার এই ক্ষুদ্রতর একটি ভাগকেও আবার 10 ভাগে ভাগ করা যায়, যেখানে প্রতিটি ক্ষুদ্রতর খণ্ডের মান হবে :

$$\frac{.1}{10} = \frac{1}{100} = .01 \text{ ।}$$

এই আরো-ক্ষুদ্রতর অংশটিকে (অর্থাৎ সংখ্যাটিকে) আরো দশ ভাগে ভাগ করা যায় :

$$\frac{.01}{10} = \frac{1}{1000} = .001 \text{ ।}$$

অর্থাৎ এবার সেই পূর্ণ-সংখ্যা 1 কে সমান 1,000 ভাগে ভাগ করা হয়েছে। এভাবে একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে (এবং ফলত 1 কে বা কোনো একক মানকে) লক্ষ, কোটি, বিলিয়ন বা অসীম সংখ্যক ভাগে ভাগ করা যায়। এক পর্যায়ে গিয়ে সংখ্যা-রেখাংশটির উপরস্থ বিন্দুগুলিকে আর খালি চোখে দেখা যাবে না। তখনও যদি ক্ষুদ্র কোনো পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলিকে চিহ্নিত করা যায়, এবং অনুবীক্ষণ যন্ত্র দ্বারা তা দেখা সম্ভব হয়, তাহলে দেখা যাবে যে রেখাতে পর-পর দু'টি বিন্দুর মধ্যে আর কোনো স্থান খালি নেই (নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য)।



কিন্তু আসলে কি দু'টি বিন্দুর মধ্যে কোনো স্থান খালি নেই? অবশ্যই আছে। কারণ 1 কে .1, তাকে .01, তাকে .001, ..., .0000000000000000001 কিংবা হাজার হাজার কোটি ভাগের এক ভাগে, এবং উক্ত ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র ভাগের একটিকে আবারও হাজার হাজার কোটি ভাগের এক ভাগে, ভাগ করা যায়, এবং এই প্রক্রিয়া চিরকাল চলতে পারে। *তার পরও সংখ্যারেখায় নোতুন নোতুন সংখ্যার জন্য জায়গা রয়ে যাবে!*

ব্যাপারটি আসলে খুব চিত্তাকর্ষক। তবে কারো কারো কল্পনায় আসতে চায় না। একটি ছোট এবং সরল উদাহরণ দিয়ে ব্যাপারটির সম্ভাব্যতা 'যাচাই করা যাক। ধরা যাক যে-রেখাটিকে আমরা ব্যবহার করছি তা অতি-সূক্ষ্ম, মসৃণ, এবং অসীম মাত্রার স্থিতিস্থাপক একটি রাবারের সুতো (আমরা এখানে 'স্থিতিস্থাপক' শব্দটিকে সাধারণ অর্থে ব্যবহার করছি), যাকে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের এক প্রান্ত থেকে অন্য প্রান্তের দিকে (কোথায় প্রান্ত?) টেনে নিয়ে গেলেও তা ছিড়বে না। তাহলে তাই করা যাক। যখন মনে হবে যে রেখাংশটিতে আর কোনো জায়গা খালি নেই, তখন নিজের চোখের মায়া বা চিন্তাশক্তির দুর্বলতা

কাটানোর জন্য তার দু'প্রান্তকে দু'টি কাল্পনিক রকেটের সাথে বেঁধে দেয়া যাবে, যারা একে অপর থেকে ঠিক বিপরীত দিকে ছুটছে। এভাবে রেখাটিকে কিছুটা বড় করলে তার মধ্যকার খালি জায়গাগুলি সংখ্যার অসীমত্বের সন্দেহাকারীকে লজ্জা দিয়ে হেসে উঠবে। দেখা যাবে যে বিন্দু-দেয়া জায়গার চেয়ে বিন্দু-না-দেয়া জায়গাই বেশি! এবার 1 কে আরো হাজার হাজার কোটি ভাগে ভাগ করে আরো আরো বিন্দুকে খালি স্থানগুলিতে বসিয়ে তা 'পূরণ' করা হোক। তারপর রকেট দু'টিকে পরস্পরের গতিপথে আরো কয়েক হাজার মাইল এগিয়ে গিয়ে থেমে যেতে বলা হোক, এবং আবারও খালি স্থানগুলি 'পূরণ' করা হোক, এবং আবারও রকেট দু'টিকে . . . .। এ প্রক্রিয়ার কোনো শেষ নেই!

যাহোক, এই ভগ্নাংশ, এবং পূর্ববর্তী আলোচনার পূর্ণ সংখ্যা—সবগুলিকে একত্রে বলা হয় rational number। সব rational number কেই $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যায় (শুধু তাই নয়, $\frac{m}{n}$ আকারে কোনো সংখ্যাকে প্রকাশ না করা গেলে তা rational number নয়)। যেমন :

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{0}{\text{যে-কোনো সংখ্যা}} = 0$$

$$\frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{-3}{1} = -3$$

আর, দশমিক ভগ্নাংশ তো আমরা আগেই দেখেছি।

অবশ্য এই পর্যায়ে পাঠকের মনে প্রশ্ন জাগতে পারে : 1 কে গাদা গাদা ভাগে ভাগ করা হলো, কিন্তু অন্যান্য সংখ্যার, যেমন ˙125 এর, ব্যাখ্যা দেয়া হলো কই? আসলে আমাদের আলোচিত অসীম-সংখ্যক rational সংখ্যার যে-কোনোটিকে 1এর বিভিন্ন ভগ্নাংশ দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। শুধু তাই নয়, তা 1-এর বিভিন্ন ভগ্নাংশের সমষ্টি ছাড়া আর কিছু নয়। যেমন :

$$
\begin{aligned}
\dot{}125 = \quad & \dot{}1 \\
& \dot{}01 \\
+ \quad & \dot{}01 \\
+ \quad & \dot{}001 \\
+ \quad & \dot{}001 \\
+ \quad & \dot{}001 \\
+ \quad & \dot{}001 \\
\underline{+ \quad} & \underline{\dot{}001} \\
= \quad & \dot{}125
\end{aligned}
$$

এ প্রসঙ্গে সংখ্যার স্থানীয় মানের কথা স্মরণ করা যেতে পারে, যা আগেই আলোচিত হয়েছে। দশমিক বিন্দু বাদ দিয়ে যদি পূর্ণ-সংখ্যা 125 কে বিবেচনা করা হয়, তাহলে তাকে এভাবে দেখানো যায় :

$$125 = 5 + 2 \times 10 + 1 \times 10 \times 10$$

এভাবে, $1254321 =$

$$1 + 2 \times 10 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^4 + 2 \times 10^5 + 1 \times 10^6$$

আসলে একই 10-এর ভিতের ওপর দাঁড়িয়ে আছে এই সব হিসাব। দশমিক ভগ্নাংশের বেলায় কোনো অংক (digit)দশমিক বিন্দু থেকে যত ডানে অবস্থান করবে, তার মান বের করতে হলে তাকে ক্রমে ক্রমে $10, 10^2, 10^3, \ldots$, ইত্যাদি দ্বারা ভাগ করতে হবে। বিপরীতক্রমে, পূর্ণ-সংখ্যার ক্ষেত্রে কোনো অংক এককের (সর্বডানের স্থান) ঘর থেকে

বাম দিকে যত সরে আসবে, তার মান বের করতে হলে তার সাথে 10-এর তত ঘাত *গুণন* করতে হবে।

এখন হয়তোবা স্বস্তির নিঃশ্বাস ফেলা যায় এই ভেবে যে, বিশ্ব-ব্রহ্মাণ্ডে যত ধরনের সংখ্যা থাকতে পারে তা এই rational number এর গৌষ্ঠীভুক্ত হবে। অর্থাৎ, আরো পারিভাষিকভাবে, *rational গোষ্ঠীর একাধিক সংখ্যাকে নিয়ে যোগ, গুণ, বিয়োগ এবং ভাগ—এই operation গুলি চালালে এমনও একটি সংখ্যা পাওয়া যাবে না যা rational গৌষ্ঠীর নয়। কিন্তু না, ব্যাপারটি অত সহজ হলে এত কথার প্রয়োজন হতো না। Rational গোষ্ঠীর বাইরেও অন্য ধরনের সংখ্যা রয়েছে, যাদেরকে* $\frac{m}{n}$ *আকারে প্রকাশ করা যায় না।* অন্য কথায়, সংখ্যা রেখাকে আমরা পূর্ববর্ণিত কায়দায় যতই অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত করি না কেন এবং যতই তার শূন্যস্থান 1 এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র ভগ্নাংশ দ্বারা পূরণ করি না কেন, *তার পূর্ণ স্থানের ফাঁকেই শূন্যস্থান রয়ে যাবে,* যা 1 এর ভগ্নাংশ দ্বারা পূরণ করা আদৌ সম্ভব নয়, এবং যার জন্য দরকার *সম্পূর্ণ ভিন্ন ধরনের সংখ্যা।* তবে এরূপ সংখ্যা সম্বন্ধে জানার আগে আর এক ধরনের দশমিক ভগ্নাংশকে জেনে নেয়া যাক।

৭.

$\frac{1}{n}$ কে কিভাবে.দশমিক ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করতে হয় তা আমরা দেখেছি। আমরা দেখেছি যে 1 কে ক্রমে ক্রমে 10-গুণ ক'রে বৃদ্ধি করা হয় যতক্ষণ না পর্যন্ত n উক্ত সংখ্যার একটি উৎপাদক হিসেবে গণ্য হতে পারে। ঠিক যখন 10 এর ঘাত-এর মান, ধরা যাক 10^r, এমন হয় যে 10^r n-এর গুণিতক বা, বিপরীতক্রমে, n 10^r-এর একটি উৎপাদক, তখন n দ্বারা 10^rকে নিঃশেষে ভাগ করা যায়। এভাবে :

$$\frac{1}{2} = \cdot 50$$

$$\frac{1}{3} = \text{——?}$$

$$\frac{1}{4} = \cdot 25$$

$$\frac{1}{5} = \cdot 20$$

$$\frac{1}{6} = \text{——?}$$

$$\frac{1}{7} = \text{——?}$$

$$\frac{1}{8} = {}^{\cdot}125$$

$$\frac{1}{9} = \text{——?}$$

উপরের উদাহরণগুলি থেকে বুঝা যাচ্ছে যে 2, 4, 5 এবং 8 দ্বারা 10 এর কোনো না কোনো ঘাতকে (অর্থাৎ 10×10 বা $10 \times 10 \times 10$ বা $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ইত্যাদিকে) ভাগ করলে তা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়। কিন্তু 3, 6, 7, এবং 9 দ্বারা 10 এর কোনো ঘাতকে ভাগ করলেই তা নিঃশেষে বিভাজ্য হয় না। সরলতার খাতিরে একই কথাকে অন্যভাবে পুনরাবৃত্ত করা যায় : 10 কে (যেমন একটি আপেলের সমান দশ ভাগকে) তিন জন লোককে দেয়ার জন্য 3 ভাগ করলে 1 (একটি ভাগ) অবশিষ্ট থাকে। ঐ একটি ভাগকে আবারও সমান 10 ভাগ ক'রে ঐ ভাগগুলিকে 3 ভাগ করলে এবং আগের ভাগগুলিকে যার যার প্রাপ্য অংশ দিয়ে দিলে ক্ষুদ্রতর একটি খণ্ড অবশিষ্ট থাকে। ঐ খণ্ডটিকেও আবারও (সরাসরি 3 ভাগে ভাগ না ক'রে) সমান 10 ভাগে ভাগ ক'রে উক্ত ভাগগুলিকে মোট তিন ভাগ করলে আরো ক্ষুদ্রতর একটি খণ্ড অবশিষ্ট থাকে। ঐ খণ্ডটিকে আবারও 10 ভাগে . . . .। এই প্রক্রিয়া অনন্ত কাল পর্যন্ত চালালেও ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর থেকে আরো ক্ষুদ্রতর থেকে আরো আরো ক্ষুদ্রতর . . . . একটি না একটি খণ্ড অবশিষ্ট থাকবেই (যদিও এরূপভাবে ভাগ করা মানবীয় ক্ষমতায় সম্ভব নয়)। একথা ঠিক যে আপেলটিকে যে-তিন ভাগে ভাগ করা **হচ্ছে** ('হয়েছে' নয়) তাদের একেকটি ভাগের পরিমাণ $\frac{1}{3}$ এর কাছাকাছি পৌঁছাচ্ছে। ক্রমে ক্রমে অবশিষ্টের পরিমাণ কমে গিয়ে ভাগ প্রক্রিয়াটি বেশি বেশি নিখুঁত বা ত্রুটিমুক্ত হচ্ছে, কিন্তু পুরোপুরি ত্রুটিমুক্ত হচ্ছে না কোনোভাবেই। কিছু না কিছু—লক্ষ লক্ষ বা কোটি কোটি ভাগের এক ভাগ হলেও—অবশিষ্ট রয়ে যাচ্ছে। একেক ভাগ আপেলের পরিমাণ $\frac{1}{3}$ এর কাছাকাছি এগুচ্ছে, কিন্তু তা ঠিক $\frac{1}{3}$-এ পৌঁছাতে পারছে না। এরূপ সংখ্যাও দশমিক ভগ্নাংশ, এবং এরাও rational number গোত্রের অন্তর্ভুক্ত। এদের আরেকটি বৈশিষ্ট্য হলো এই যে, এদের প্রত্যেকটিতে এক বা একাধিক অংক (digit) বারবার একই নিয়মে *আবর্তিত* হয়, যে কারণে এদেরকে বলা হয় *আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ* (periodic decimal fraction)। যেমন :

$$\frac{1}{3} = \cdot 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 \cdots$$

$$\frac{1}{6} = \cdot 1\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6\,6 \cdots$$

$$\frac{1}{7} = \cdot 1\,4\,2\,8\,5\,7\,1\,4\,2\,1\,5\,7\,1 \cdots$$

$$\frac{1}{9} = \cdot 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \cdots$$

কিন্তু এই দশমিক ভগ্নাংশগুলি যতই অসীম পর্যন্ত পৌঁছাক না কেন, এদেরকে $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যায় ব'লে (যেমন $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \ldots$) এরা rational number।*

FOOD FOR THOUGHT

$\frac{1}{2}$ এর ঠিক পরের (অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর মানের সংখ্যাটি কী?

[**Hint :** কোনো ভগ্নাংশের ঠিক পরবর্তী বা পূর্ববর্তী কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা নেই। যদি বলা হয় $\frac{1}{3}$, তাহলে প্রমাণ ক'রে দেখানো যায় যে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ এর মধ্যেও আরো সংখ্যা আছে। যদি বলা হয় $\frac{1}{6}$, তাহলেও দেখানো যায় যে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{6}$ এর মধ্যেও আরো সংখ্যা আছে। এমনকি যদি বলা হয় যে সংখ্যাটি $\frac{1}{100000}$, তাহলেও দেখানো যায় যে এমন অসংখ্য (অসীম সংখ্যক) সংখ্যা আছে যাদের প্রত্যেকে $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ছোট কিন্তু $\frac{1}{100000}$ অপেক্ষা বড়। সংখ্যাগুলির দশমিক ভগ্নাংশের রূপ নিয়ে একথা প্রমাণ করা আরো সহজ।]

এবার কয়েকটি সমীকরণ দেখা যাক।

কোন সংখ্যাকে ঠিক সেই সংখ্যা দ্বারা গুণন করলে গুণফল হয় 4?

উঃ 2 (কারণ $2 \times 2 = 4$)

---

* দশমিক ভগ্নাংশগুলি থেকেও হিসাব ক'রে $\frac{m}{n}$ রূপে পৌঁছানো যায়। তবে তা নিয়ে এখানে আলোচনা করতে গেলে আমরা মূল আলোচনা থেকে লক্ষ্যচ্যুত হয়ে যাব।

এই প্রশ্নটিকে সংক্ষেপে $x^2 = 4, x =$ ——? এভাবে লিখলেও চলে। তাহলে :

$x^2 = 9 ; x =$ ——? উত্তর : 3

$x^2 = 16 ; x =$ ——? উত্তর : 4

$x^2 = 25 ; x =$ ——? উত্তর : 5

$x^2 = 2 ; x =$ ——?

শেষোক্ত প্রশ্নটির উত্তর এই উপায়ে দেয়া সম্ভব নয়। এমন কোনো সংখ্যা নেই যাকে তার নিজের সাথে গুণন করলে গুণফল হবে 2। ধরা যাক এমন একটি সংখ্যা আছে, যাকে $\sqrt{2}$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। তাহলে $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, একথা পুরোপুরি সত্য। কিন্তু rational number-এ $\sqrt{2}$ = কত? কিংবা $\sqrt{2}$ (এর মান) কি আদৌ কোনো rational number? এই প্রশ্নের উত্তর খুব সহজেই বের করা যায়। ধরা যাক $\sqrt{2}$ একটি rational number। ফলে তাকে $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে, যেখানে m এবং n উভয়ের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক (common factor) নেই। (থাকলে তাকে ক্ষুদ্রতম অবস্থায় আনার পর তাকেই $\frac{m}{n}$ হিসেবে বিবেচনা করতে হবে।) তাহলে:

$$*\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$\rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\rightarrow m^2 = 2n^2$$

যেহেতু m^2 হলো 2 এর একটি গুণিতক, সেহেতু m^2 একটি জোড় (even) সংখ্যা। তাহলে m-ও জোড় সংখ্যা, কারণ বিজোড় সংখ্যার বর্গ সব সময়ে বিজোড়ই হয় (যেমন $7^2 = 49$ (বিজোড়); $9^2 = 81$ (বিজোড়))। তাহলে লেখা যায় $m = 2r$ (m জোড় সংখ্যা ব'লে)। ফলে :

* আপাতত মনে করতে হবে যে $\sqrt{2}$ একটি প্রতীক মাত্র, সংখ্যা নয়। এর সংখ্যা-মান আমরা এখনও জানি না।

$m^2 = 2n^2$

$\rightarrow (2r)^2 = 2n^2$ [$m = 2r$ বসিয়ে]

$\rightarrow 4r^2 = 2n^2$

$\rightarrow 2r^2 = n^2$

এবার দেখা যাচ্ছে যে n^2 হলো 2 এর একটি গুণিতক; অর্থাৎ n^2 হলো জোড় সংখ্যা। এবং পূর্ববর্ণিত কারণে, n-ও জোড় সংখ্যা। আমরা পাচ্ছি যে m এবং n উভয়ে জোড় সংখ্যা। তার অর্থ দাঁড়ায় এই যে, তাদের মধ্যে *কমপক্ষে একটি* সাধারণ উৎপাদক (common factor) আছে, যা হলো 2 [জোড় সংখ্যা মানেই তো 2 এর গুণিতক, নয় কি?]। কিন্তু আমরা প্রথমেই ধ'রে (assume ক'রে) নিয়েছিলাম যে m ও n এর মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। তাহলে আমরা *আত্মবিরোধী সিদ্ধান্তে এসে উপনীত হয়েছি। সুতরাং $\sqrt{2}$ এর মান আছে, তবে তা rational number এর গোত্রভুক্ত নয়।* সুতরাং, আবারও স্মরণ করা যাক, rational number **এর গোত্রের মধ্যে যে-সব সংখ্যা অন্তর্ভুক্ত, তাদের বাইরেও অনেক সংখ্যা আছে।**

তাহলে $\sqrt{2}$ এর মান rational number-এ প্রকাশ করা যায় কিভাবে? এর মান নির্ণয় করা হয় বার বার চেষ্টা ক'রে trial-and-error প্রক্রিয়ার মাধ্যমে। **আমাদেরকে ক্রমে ক্রমে এমন সংখ্যা খুঁজতে হবে যার বর্গ (square) 2 এর কাছাকাছি আসবে, যদিও কোনো দিন সঠিকভাবে 2-তে পৌঁছবে না। চেষ্টা ক'রে দেখা যাক :**

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$

$$(1{\cdot}4)^2 = 1{\cdot}96 < 2 < (1{\cdot}5)^2 = 2{\cdot}25$$

$$(1{\cdot}41)^2 = 1{\cdot}9881 < 2 < (1{\cdot}42)^2 = 2{\cdot}0264$$

$$(1{\cdot}414)^2 = 1{\cdot}999396 < 2 < (1{\cdot}415)^2 = 2{\cdot}002225$$

$$(1{\cdot}4142)^2 = 1{\cdot}99996164 < 2 < (1{\cdot}4143)^2 = 2{\cdot}00024449 \text{ etc.}$$

এভাবে দশমিকের পর সাত অংক পর্যন্ত রেখে $\sqrt{2}$ এর মান $\approx 1{\cdot}4142135$। এখানে একটি জিনিস লক্ষণীয় : $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ ইত্যাদির দশমিক মানের ক্ষেত্রে আমরা যেমন দেখেছি যে কয়েকটি অংকের পর একই অংক বা একাধিক অংকের একই সমষ্টি বারবার আবর্তিত

হয়, $\sqrt{2}$ এর ক্ষেত্রে তেমনটি নয়। এক্ষেত্রে অংকগুলি কোনো নির্দিষ্ট pattern অনুসরণ ক'রে আবর্তিত হয় কি না তা আজও মানুষের অজানা। এরূপ সংখ্যাকে বলে **irrational number** বা **অমূলদ সংখ্যা**। আরো সাধারণভাবে বলা যায় : কোনো সংখ্যা b কে যদি a এর মাধ্যমে এমনভাবে প্রকাশ করা যায় যে, b এর m ভাগ = a এর n ভাগ (যেখানে a, m, এবং n হলো rational number), তাহলে b-ও rational number। অর্থাৎ :

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$$

$$\rightarrow b = \frac{m}{n} a$$

এই আকারে b কে a-এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারলে b-ও rational number হবে। যেমন :

$$12 = \frac{12}{13} \times 13$$

$$20 = \frac{5}{1} \times 4$$

$$27 = \frac{9}{1} \times 3$$

এক্ষেত্রে বলা হয় যে 12 13-র সাথে **commensurable;** 20, 4-এর সাথে commensurable; 27, 3-এর সাথে commensurable। *অর্থাৎ, উদাহরণস্বরূপ, সংখ্যারেখায় 12 এবং 13 এককের (unit) দু'টি দৈর্ঘ্যকে $\frac{12}{13}$ একক মাপের কোনো মাপকাঠি দিয়ে নিঃশেষে মেপে ফেলা যাবে, যেখানে 12 এককের দূরত্বকে মাপতে কাঠিটিকে 13 বার এবং 13 এককের দৈর্ঘ্যটিকে মাপতে কাঠিটিকে 12 বার উঠাতে হবে (অর্থাৎ* $12 \times 13 = 13 \times 12$) *এবং দৈর্ঘ্য বরাবর ফেলতে হবে।* **সব rational numberই একে অপরের commensurable**। কিন্তু একটি rational number এবং একটি irrational number-কে (যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ কে) $b = \frac{m}{n} a$ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

উপরের আলোচনা থেকে একথা স্পষ্ট যে rational number এর সংখ্যারেখা সংখ্যা দ্বারা যতই ভরাট করা হোক না কেন, তাতে irrational number এর জন্য ফাঁকা জায়গা রয়েই যাবে। Irrational সংখ্যা যতই irrational হোক না কেন, তা বাস্তব (real) সংখ্যাই।

সুতরাং সংখ্যারেখাকে পুরোপুরি ভরাট করতে হলে তাতে যাবতীয় বাস্তব সংখ্যাকে স্থান দিতে হবে। আর এভাবে পুরোপুরি ভরাট করা সম্ভব কেবল বাস্তব সংখ্যার সংখ্যারেখাকে। কিন্তু তাতেও সংখ্যার পূর্ণ ক্ষেত্রটিকে ভরাট করা যাবে না। **ভরাট রেখার পার্শ্ববর্তী** শূন্যস্থান শূন্য রয়ে যাবে, কারণ সংখ্যার জগতে 'অবাস্তব' সংখ্যাও রয়েছে! তখন শুধু আর 'রেখা'র কথা বললে তা যথেষ্ট হবে না; তখন একমাত্রিক রেখা থেকে দ্বিমাত্রিক তলের প্রসঙ্গে চ'লে যেতে হবে। শুধু এরূপ সংখ্যাই পরবর্তী অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়।*

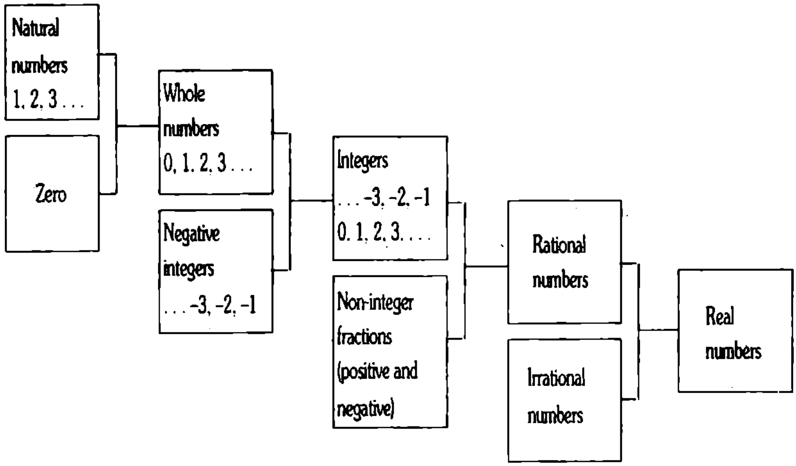
FOOD FOR THOUGHT

একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুই বাহুর মান যথাক্রমে 1 মি. এবং 1 মি.। ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত? একই এককের এমন কোনো দৈর্ঘ্যের রুলার বানানো কি সম্ভব যা দিয়ে যে-কোনো বাহু এবং অতিভুজ *উভয়কেই* নিঃশেষে মেপে ফেলা যাবে?

Hint : আগে অতিভুজের দৈর্ঘ্য বের করতে হবে (সূত্র : অতিভূজ = $\sqrt{\text{বাহু}^2 + \text{বাহু}^2}$। তারপর প্রাপ্ত দৈর্ঘ্যকে $b = \frac{m}{n}a$ আকারে প্রকাশ করা যায় কি না তা দেখতে হবে।

পরবর্তী পৃষ্ঠায় প্রবাহ-চিত্রের (flow-chart) মাধ্যমে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণীবিভাগ দেখানো হলো।

* সংখ্যাভূবনের একটি ধাপ থেকে **আবশ্যিকভাবে** উচ্চতর ধাপে গিয়ে পড়ার প্রয়োজন হয়। এবং সেই উপায়ে মানবীয় চিন্তার চরম সীমায় কিভাবে পৌঁছানো যায় সে সম্বন্ধীয় দার্শনিক আলোচনার জন্য দেখুন এই লেখকের *'সৃষ্টিকর্তা সত্যিই আছে!'* (জ্ঞানকোষ প্রকাশনী)।


Natural numbers 1, 2, 3 . . .
Zero
Whole numbers 0, 1, 2, 3 . . .
Negative integers . . . -3, -2, -1
Integers . . . -3, -2, -1 0, 1, 2, 3. . . .
Non-integer fractions (positive and negative)
Rational numbers
Irrational numbers
Real numbers

সহপাঠ (অধ্যায়-১ এর জন্য)

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণনের ধর্ম

(Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers)

এবার বাস্তব সংখ্যার যোগ এবং গুণন কিভাবে করতে হয় তা জানা যাক। প্রথমে দেখা যাক যোগের বৈশিষ্ট্যাবলী।

যোগের ধর্ম :

1. আবদ্ধতা (Closure) : a এবং b এই দুটি বাস্তব সংখ্যাকে যোগ করলে সব সময়েই যোগফল হিসেবে আরেকটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যাবে। এজন্য বলা হয় যে যোগের ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যা আবদ্ধ (closed with respect to addition)। যেমন :

$$7 + 9 = 16$$
$$10^{10} + 10^{12} = 10^{22}$$

2. Commutative Property : $a + b = b + a$ অর্থাৎ, উদাহরণস্বরূপ, 2-এর সাথে 9 যোগ করা যা, 9 এর সাথে 2 যোগ করাও তাই।

পাঠকের মনে প্রশ্ন জাগতে পারে—এ কথা আবার উল্লেখ করার দরকার কী? এ তো সবারই জানা যে $2 + 9 = 9 + 2$। এর ব্যতিক্রম যখন নেই তখন একথা বিশেষভাবে চিহ্নিত ক'রে বলার গুরুত্বটা কী?

প্রশ্নটি অতি স্বাভাবিক, কারণ বাস্তব সংখ্যার যোগের এই ধর্মের সাথে আমরা সবাই এত বেশি পরিচিত যে তা আমাদের 'গাণিতিক স্বভাবের' সাথে একাকার হয়ে আছে। কিন্তু এর ব্যতিক্রম আছে বলেই একে বিশেষভাবে উল্লেখ করার দরকার আছে। অবশ্য বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এর ব্যতিক্রম নেই।

'যোগ' করা শব্দটিকে আমরা যদি গাণিতিক অর্থে না গ্রহণ ক'রে দৈনন্দিন অর্থে গ্রহণ করি, তাহলে কি এ কথা বলতে পারি—পানি + এসিড = এসিড + পানি? ঠিক পুরোপুরি তা বলা যায় না। কারণ, উদাহরণস্বরূপ, এক গ্লাস ক্তিশালী সালফিউরিক এসিডের মধ্যে পানি ঢালতে থাকলে, সমগ্র এসিডের সান্নিধ্যে সহসা পানি আসার কারণে, বিপজ্জনক বিষ্ফোরণও ঘটে যেতে পারে। অপরপক্ষে এক গ্লাস পানির মধ্যে একটু একটু ক'রে এসিড ঢালতে থাকলে, এক সাথে অনেকখানি এসিডের সান্নিধ্যে পানি না আসতে পারায়, কোনো বিষ্ফোরণ ছাড়াই তরল এসিড তৈরি হবে।

যোগের এই বৈশিষ্ট্যের বিশাল ব্যতিক্রম লক্ষ্য করা যায় শব্দের ব্যবহারের ক্ষেত্রে। 'দুধ মেশানো পানি' আর 'পানি মেশানো দুধ' কথা দু'টি প্রায় কাছাকাছি, কিন্তু এদের মর্মার্থ কি এক? 'টিপ্ ক'রে তাল পড়ে' নাকি 'তাল প'ড়ে টিপ করে'? যদি কেউ প্রশ্ন করে : 'নামাজ পড়ার সময় কি ধূমপান করা যায়?' তাহলে তাকে পাল্টা প্রশ্ন করা উচিত 'ধূমপান করার সময় কি নামাজ পড়া যায়?' 'চিন্তার দারিদ্র্য' আর 'দারিদ্র্যের চিন্তা' কি এক কথা? এরূপ অসংখ্য উদাহরণ দেয়া যায়। পাঠক নিজেই এরূপ অনেক উদাহরণ তালিকাবদ্ধ করতে পারবেন। একটি কথা মনে রাখতে হবে : **গণিত বিশুদ্ধ যুক্তি বটে, তবে তার মধ্যে—অন্তত সৃজনশীলতা বৃদ্ধির খাতিরে কিংবা নোতুন চিন্তার দিগন্তে চেতনাকে পৌঁছে দেয়ার ক্ষেত্রে ভালো সম্ভাবনা অর্জনের জন্য—রসবোধ, কল্পনা, স্বজ্ঞা (intuition) ইত্যাদির স্থান আছে।**

যাহোক, কিছু কিছু রাশির যোগের ক্ষেত্রে $a + b = b + a$ নিয়মটি খাটে না। যেমন matrix-এর (অধ্যায় ১০ দ্রঃ) গুণনের ক্ষেত্রে $A \times B = B \times A$ সত্য নাও হতে পারে। ফাংশানের ক্ষেত্রেও এ নিয়ম খাটে না (অধ্যায়–৫)।

চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায় যে যোগ হলো একটি এক-মাত্রিক (one-dimensional) প্রক্রিয়া (operation)। একে একটি row বা সারি দ্বারা বুঝানো যায়। যেমন, $3 + 5$ কে নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায় :

●●● + ●●●●● = ●●●●●●●●

= ●●●●● + ●●●

3. Associative Property : $(a + b) + c = a + (b + c)$। এই বৈশিষ্ট্যটিও আগেরটির মতো এত মৌলিক যে আমরা এর জন্য কোনো প্রমাণ খুঁজি না।

(●●● + ●●) + ● = ●●●●●●

= (●●●) + (●●●)

= (●●●) + (●● + ●)

$(3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1)$

$= 6 \qquad = 6$

4. Identity Property : $a + 0 = a = 0 + a$

5. Inverse Property : $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

এখানে $(-a)$ হলে a এর যোগবোধক বিপরীত বা additive inverse। a এবং $(-a)$ একে অপরের বিপরীত ব'লে এদেরকে যোগ করলে এরা একে অপরকে নিশ্চিহ্ন ক'রে দেয়।

সাপ + বেজি = ——? অনেক সময় কিন্তু লড়াই ক'রে দু'জনেই মরে!

$2 + (-2) = 2 - 2 = 0 = (-2) + 2$

6. Distributive Property : $a\,(b + c) = ab + ac$

$$\bullet\bullet\bullet \times (\bullet\bullet + \bullet) = a\,(b + c)$$

$$= \bullet\bullet\bullet \times (\bullet\bullet\bullet)$$

$$= \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$= \left|\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right|$$

$$= (\bullet\bullet\bullet \times \bullet\bullet) + (\bullet\bullet\bullet \times \bullet) = ab + ac$$

এই চিত্রটির মর্ম বোঝা যাবে গুণনের বৈশিষ্ট্যের আলোচনা পড়লে।

$$6\,(3 + 2) = (6 \times 3) + (6 \times 2)$$

$$= 6 \times 5 \quad \Big| \quad = 18 + 12$$

$$= 30 \qquad\qquad = 30$$

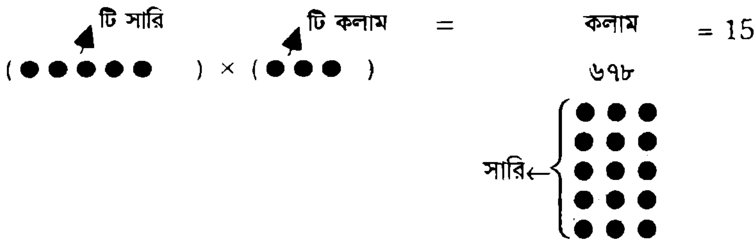
গুণনের ধর্ম :

1. Closure : a এবং b যদি বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে a · b (অর্থাৎ a × b) হলো একটি বাস্তব সংখ্যা।

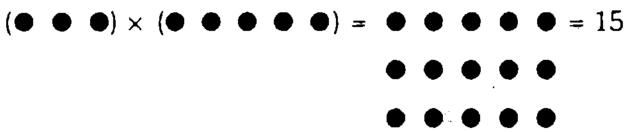
2. Commutative Property : a · b = b · a

গুণনের ক্ষেত্রে প্রথম রাশিকে a সংখ্যক row বা সারি এবং দ্বিতীয় রাশিকে b সংখ্যক column বা স্তম্ভ হিসেবে বিবেচনা ক'রে গুণফলকে একটি চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল হিসেবে দেখানো যায় (ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)। যেমন :

5 × 3 = 3 × 5 = 15

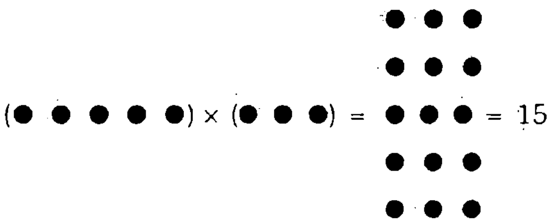


আবার :

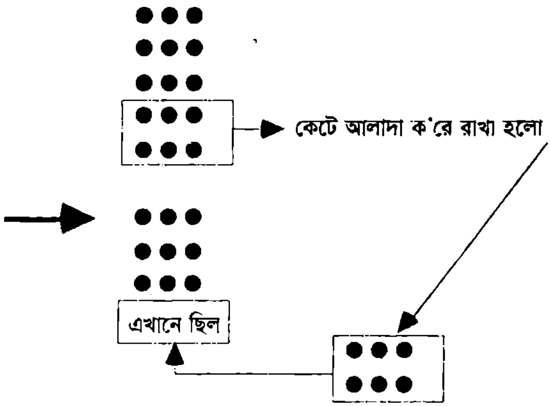


কিন্তু এই ধর্মটিকে আরো চমৎকারভাবে দেখানো যায়। আগের উদাহরণটিই নেয়া যাক।

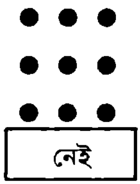
5 × 3 =



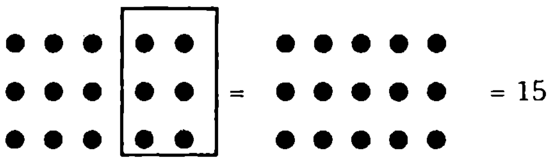
কিন্তু 5 এবং 3 এর পার্থক্য কত? $5 - 3 = 2$। অর্থাৎ সারি-সংখ্যা 2টি কমিয়ে কলাম সংখ্যা দুইটি বাড়ানো যায় :



যে ক্ষেত্র থেকে কাটা হয়েছিল তার অবস্থা এখন এই :



এবার এর ডান পাশে কাটা অংশটি লাগিয়ে দেয়া যাক :



অর্থাৎ (● ● ●) × (● ● ● ● ●)

$$5 \times 3 = 3 \times 5$$

এভাবে কাটলে মূল ক্ষেত্রটিতে সব সময়ে একটি **বর্গ** (square) অবশিষ্ট থাকে। শুধু তাই নয়, বৃহত্তর পার্শ্ব থেকে কাটলে সব সময় কর্তিত অংশ ক্ষুদ্রতর পার্শ্বের সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।

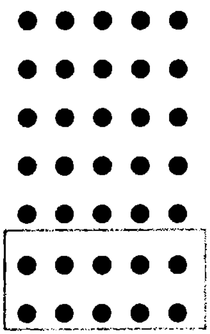
আরো একটি উদাহরণ নেয়া যাক।

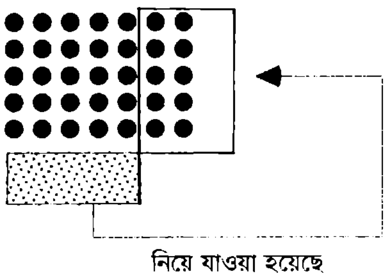
$$7 \times 5 = 5 \times 7$$

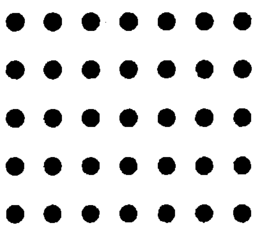
এখানে $7 - 5 = 2$

সুতরাং সারি-সংখ্যা ২টি কমিয়ে কলাম-সংখ্যা বাড়ানো যায়।

(●●●●●●●) × (●●●●●)

=  = 35 (= 7 × 5)

= 

=  = 35 (= 5 × 7)

সংখ্যার মাধ্যমেও একই কাজ করা যায় :

$8 \times 12 = (8 + 4) \times (12 - 4)$

$= 12 \times 8$

$= 96$

6×26

$= (6 + 20) \times (26 - 20)$

$= 26 \times 6$

$= 156$

আরো একটু বিস্তারিতভাবে :

$15 \times 21 = 315$

এখানে $21 - 15 = 6$। সুতরাং

$(15 + 6) \times (21 - 6) = 315$

বা $21 \times 15 = 315$

তবে সাবধান! যে-কোনো সংখ্যা ছোটটির সাথে যোগ এবং বড়টির সাথে বিয়োগ করলে গুণফল আর অভিন্ন থাকবে না। নিজেই যাচাই করে দেখুন। কারণ কী? ছবির দিকে তাকালেই কারণ বুঝা যাবে। আসলে যে-কোনো সংখ্যা নিয়ে কলাম কেটে সারিতে বা সারি কেটে কলামে বসালে তা খাপ খাবে না। সুতরাং কেবল সারি ও কলামের কিংবা কলাম ও সারির বিয়োগফলকেই এই স্থানান্তরের কাজে ব্যবহার করা যাবে।

3. Associative Property : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

এই ধর্মটিও মূলত 2নং ধর্মের মতোই। নিচের চিত্রটি দেখলেই এর ভেতরকার ব্যাপারটি বুঝা যাবে।

$(2 \times 3) \times 4$	=	$2 \times (3 \times 4)$
$= 6 \times 4$		$= 2 \times 12$
$= 24$		$= 24$

টি সারি টি কলাম

((● ●) × (●●●)) × (● ● ● ●) = (●●● / ●●●) × (●●●●)

= ● ● ● ● = 24
● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●
● ● ● ●

[2 × 3 ক্ষেত্রটির বিন্দু সংখ্যা অবশেষে number of rows হিসেবে ব্যবহৃত হয়েছে।]

আবার :

(●●) × ((●●● × (●●●●)) = (● ●) × (●●●● / ●●●● / ●●●●)

= ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

= 24

[3 × 4 ক্ষেত্রটির বিন্দুগুলি অবশেষে number of columns হিসেবে ব্যবহৃত হয়েছে।]

4. Identity : $a \cdot 1 = a = 1 \cdot 1$

$4 \times 1 = 4 = 1 \times 4$

টি সারি টি কলাম

(●●●●) × (●) = ●
●
●
●

5. Inverse : $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a \; [a \neq 0]$

এখানে $\frac{1}{a}$ কে a-এর গুণাত্মক বিপরীত বা multiplicative inverse বলে।

$5 \cdot \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5$

6. Distributive Property : $a \cdot (b + c) = ab + ac$

এবং $(a + b) \cdot c = ac + bc$

$7(3 + 4)$	$=$	$(7 \times 3) + (7 \times 4)$
$= 7 \times 7$		$= 21 + 28$
$= 49$		$= 49$

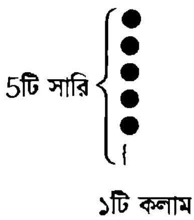
$(7 + 3)\,4$	$=$	$(7 \times 4) + (3 \times 4)$
$= 10 \times 4$		$= 28 + 12$
$= 40$		$= 40$

কোনো সংখ্যার সাথে 0 এর গুণন :

$$\mathbf{a \cdot 0 = 0}$$

$$\mathbf{5 \times 0 = 0}$$

5টি সারি এবং শূন্য কলামের কোনো ক্ষেত্র থাকতে পারে কি? সারি থাকলে কলাম থাকবেই। যেমন :



বাম থেকে ডান দিকে সারি এবং উপর থেকে নিচের দিকে কলাম। এখানে পাঁচটি সারি : প্রতি সারিতে 1টি ক'রে বিন্দু ও একটি কলাম, তাতে মোট 5টি বিন্দু। কলামকে উধাও ক'রে দিলে সারিও উধাও হয়ে যাবে, যেহেতু সারির উপাদানই কলামের উপাদান। সুতরাং—

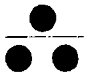
$$(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet) \times (\quad) = \left(\quad\right) = 0$$

মূলদ সংখ্যার সমতা (Equivalence of Rational Numbers) :

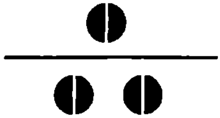
$\frac{m}{n}$ একটি rational number হলে $\frac{a\,m}{a\,n} = \frac{m}{n}$, $a \neq 0$ হলে। যেমন :

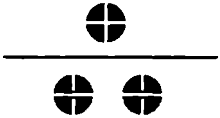
$$\frac{1}{4} = \frac{2\times 1}{2\times 4} = \frac{2}{8} = \frac{3\times 2}{3\times 8} = \frac{6}{24}$$

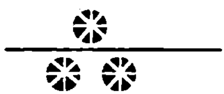
অর্থাৎ $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{6}{24}$ সবগুলি সংখ্যার মান একই। চিত্রের মাধ্যমে দেখা যাক।

 $= \frac{1}{2}$

একটি আপেল উপরে, দুইটি আপেল নিচে। একটিকে যত ভাগ করা হবে, বাকি প্রত্যেকটিকে ঠিক তত ভাগ করতে হবে।

 $= \frac{2 \text{ ভাগ}}{4 \text{ ভাগ}} = \frac{2}{4}$

 $= \frac{4 \text{ ভাগ}}{8 \text{ ভাগ}} = \frac{4}{8}$

 $= \frac{8 \text{ ভাগ}}{16 \text{ ভাগ}} = \frac{8}{16}$

অর্থাৎ : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$

বিপরীতক্রমে : $\frac{8}{16} = \frac{4\times \cancel{2}}{8\times \cancel{2}} = \frac{4}{8} = \frac{2\times \cancel{2}}{4\times \cancel{2}} = \frac{2}{4}$

$$= \frac{1\times \cancel{2}}{2\times \cancel{2}} = \frac{1}{2}$$

অধ্যায় : ২

কাল্পনিক এবং জটিল সংখ্যা (Imaginary and Complex Numbers)

কাল্পনিক সংখ্যা কেন কাল্পনিক (উৎপত্তি) :

(Why are Imaginary Numbers Imaginary?)

আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে দেখেছি যে সমগ্র integer এর ভূবনকে (domain) যদি যাবতীয় সংখ্যা মনে করা হয়, তাহলে আমাদেরকে সমস্যায় পড়তে হয়। যোগের (এবং বিয়োগের) বেলায় দুই বা ততোধিক integer মিলে যে-যোগফল সৃষ্টি করে তাও integer domain এর মধ্যে পড়ে। ফলে গাণিতিক (এবং বাস্তব) কাজ-কর্ম চালাবার জন্য নোতুন কোনো ধরনের সংখ্যার প্রয়োজন অনুভূত হয় না। কিন্তু গুণনের inverse operation এর (অর্থাৎ ভাগের) ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম ঘটে। Integer a এর সাথে যদি integer b এর গুণাত্মক বিপরীত (multiplicative inverse) গুণন করা হয় (অর্থাৎ $a \div b$), এবং $a < b$ হয় কিংবা a ও b এর মধ্যে কোনো common factor না থাকে, তাহলে $a\left(\frac{1}{b}\right) = c$ হলে c এমন একটি সংখ্যা হবে যাকে integer domain-এ খুঁজে পাওয়া যাবে না। এরূপ সংখ্যাকে বলে fraction বা ভগ্নাংশ। ফলে গণিতের সংখ্যার ভূবনকে স্বয়ংসম্পূর্ণ রাখার জন্য integer domain কে **বিস্তৃত (extend)** ক'রে তাতে উক্ত ভগ্নাংশও অন্তর্ভুক্ত করতে হয়। এই বিস্তৃত number domain কে বলে rational number domain। এখন integer domain এর চেয়ে rational number domain আরো বেশি শক্তিশালী। কিন্তু এও যথেষ্ট ব'লে বিবেচিত হয় না যখন এরূপ প্রশ্ন করা হয় : কোন সংখ্যার সাথে সেই সংখ্যা গুণন করলে গুণফল হবে, উদাহরণস্বরূপ, 2 ? গুণফলের দিকে তাকিয়ে সাধারণভাবে মনে হতে পারে যে, সংখ্যাটি যাই হোক, 1 এবং 2 এর মাঝামাঝি কোনো rational number হবে (কারণ $1 \times 1 = 1$, সুতরাং সংখ্যাটি হবে 1 এর চেয়ে বড়)। অর্থাৎ তাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ না

করলে ভগ্নাংশ $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে (যে-কোনো rational দশমিক ভগ্নাংশকে $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে m এবং n integer বা পূর্ণসংখ্যা।)। কিন্তু প্রমাণ ক'রে দেখানো যায় যে তা সম্ভব নয় (অধ্যায়-১ দ্রষ্টব্য।) অর্থাৎ $x^2 = 2$ হলে $x = \sqrt{2}$. যেখানে $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না। এভাবে সংখ্যার domain কে আরো বিস্তৃত ক'রে তাতে $\sqrt{2}$ এর মতো irrational number কেও স্থান দিতে হয়। এই যাবতীয় rational এবং irrational সংখ্যাকে একত্রে বলে **real number**।

কিন্তু এখনও সংখ্যার ভূবন স্বয়ংসম্পূর্ণ নয়। কারণ, যদিও

$$ax = b$$
$$x = \frac{b}{a}$$

এই সমীকরণ আমরা এখন অনায়াসে সমাধান করতে পারি, যেহেতু এখানে x হলো rational, এবং যদিও

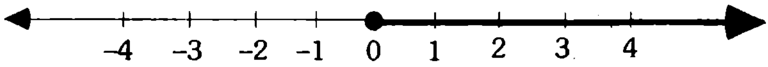
$$x^2 = b$$
$$x = \pm\sqrt{b}$$

এই সমীকরণও আমরা সমাধান করতে পারি, যেহেতু x হয় rational (যেমন $\sqrt{25} = \pm 5$), না হয় irrational (যেমন $\sqrt{2}$, π), তবুও

$$x^2 = -2$$
$$x = \sqrt{-2}$$

এইরূপ সমীকরণ আমরা সমাধান করতে পারি না—এখনও তার পদ্ধতি আমরা জানি না—কারণ আমাদের জানা নেই কিভাবে ঋণাত্মক (negative) সংখ্যার বর্গমূল বের করতে হয়। অর্থাৎ সংখ্যাজগতের (number domain) স্বয়ংসম্পূর্ণতার জন্য real domain-ই যথেষ্ট নয়। আর এজন্যেই নোতুন ধরনের সংখ্যার প্রয়োজনীয়তা দেখা দিচ্ছে।

তবে তার আগে গুণনের চিহ্নের রীতিটি একটু দেখা যাক। নিচের সংখ্যা রেখাটির দিকে লক্ষ্য করুন।



এখানে, উদাহরণস্বরূপ, $2 \times 2 = 4$। অর্থাৎ +2 কে +2 দ্বারা গুণন করলে গুণফল সংখ্যারেখার ধনাত্মক পার্শ্বেই থেকে যায় (অর্থাৎ 0 থেকে ডান দিকে)। আবার $(-2) \times (-2) = 4$। অর্থাৎ ঋণাত্মক দু'টি সংখ্যার গুণফলও সংখ্যারেখার ধনাত্মক পার্শ্বে থাকে। (অন্যান্য সংখ্যা নিয়ে আপনি নিজেই আরো যাচাই ক'রে দেখতে পারেন।) এ থেকে বুঝা যাচ্ছে যে একই সংখ্যাকে তার চিহ্ন সমেত দুইবার গুণন করলে সব সময়েই একটি ধনাত্মক গুণফল পাওয়া যাবে। আর যে-কোনো সংখ্যার সাথে তার গুণফল হলো ঐ সংখ্যাটির বর্গ, এবং বিপরীতক্রমে, উক্ত সংখ্যাটি হলো উক্ত গুণফলের (অর্থাৎ বর্গের) বর্গমূল। তাহলে স্পষ্ট হয়ে গেল যে বর্গ সংখ্যা (square) কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না, এবং যে-কোনো বর্গ-সংখ্যার বর্গমূল দুইটি—একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক।

এখন ধরা যাক এমন একটি সংখ্যা r আছে যাকে তার সাথে গুণন করলে গুণফল হবে যে-কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা—হিসেব সহজ করার জন্য ধরি (-4)। তাহলে :

$$
\begin{aligned}
& (r) \times (r) = (-4) \\
\Rightarrow \quad & r^2 = -4 \\
\Rightarrow \quad & r = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

কিন্তু $r =$ কত? $r =$ যদি ± 2 হয়, তাহলে—

$$
\begin{aligned}
(+2) \times (+2) &= 4 \\
(-2) \times (-2) &= 4
\end{aligned}
$$

অর্থাৎ ঋণাত্মক কোনো সংখ্যার বর্গমূল অন্তত এভাবে বের করা যাবে না। একটাই উপায় আছে : সংখ্যাটি থেকে '—' চিহ্নটিকে সরিয়ে নিতে হবে। তা করা অবশ্য খুব সহজ। আমরা জানি :

$$-4 = 4 \times (-1)$$
$$-7 = 7 \times (-1)$$

এভাবে—

$$-n = n \times (-1)$$

অর্থাৎ যে-কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাকে ধনাত্মক সংখ্যায় রূপান্তর করা যায় তাকে (–1) দ্বারা গুণ ক'রে এবং তার চিহ্নটিকে অপসারিত ক'রে। তাহলে একটি কাজ করা যায় : আমরা যদি (–1) এর বর্গমূল বের করতে পারি, তাহলে যে-কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল বের করতে পারব। কিন্তু আমরা আগেই দেখেছি যে, কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার, হোক তা (–1) কিংবা অন্য কিছু, বর্গমূল প্রচলিত পদ্ধতিতে বের করা সম্ভব নয়। তবুও কিছু তো একটা করতে হবে। সুতরাং আমরা ধ'রে নিই যে (–1) এর বর্গমূল আছে এবং তার মান যাই হোক, তাকে আমরা 'i' প্রতীকটি দ্বারা চিহ্নিত করি। তাহলে :

$$i \times i = -1$$
$$i^2 = -1$$
$$i = \sqrt{-1}$$

এই i হলো আমাদের *সৃষ্টি করা সংখ্যা*—কোনো স্বাভাবিক (natural) সংখ্যা নয়। আমাদের কল্পনার জোরেই আমরা একে উদ্ভাবন (invent) করতে পেরেছি। এজন্য একে বলে **কাল্পনিক সংখ্যা** বা **imaginary number**। লক্ষ্য করতে হবে : i real number domain এর *বাইরে*, তবে i^2 হলো তার *মধ্যে* (যেহেতু $i^2 = -1$)।

একটি মজার ব্যাপার এই যে, i কে উদ্ভাবন করা হয়েছিল কোনো বাস্তব-জগতের হিসাব-নিকাশ বা গোনা-গাথা করার জন্য নয়, কেবল গণিতের নিজস্ব *পরিপূর্ণতার* জন্য। কিন্তু বিজ্ঞানের উচ্চতর বিভিন্ন শাখায় এর বিপুল ব্যবহার রয়েছে। প্রসঙ্গত বলা যায়, গণিতশাস্ত্রবিদ রাইমান তার Tensor Calculus উদ্ভাবন করেছিলেন নিছক মেধাবৃত্তির আনন্দের জন্য এবং গণিতের স্বয়ংসম্পূর্ণতার জন্য। অথচ পরবর্তীতে পৃথিবীর-রূপ-বদলে-দেয়া আপেক্ষিকতা তত্ত্ব বিকশিত হয়ে ওঠে ঠিক এরই ওপর নির্ভর ক'রে। রাইমান্ (Riemann) তাঁর Tensor Calculus উদ্ভাবন না করলে আইনস্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বটিকে মূর্ত রূপ দিতে পারতেন না। অবশ্য গণিতে এরূপ আরো উদাহরণ আছে।

যাহোক, এখন আমরা i এর সাহায্যে যে-কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল বের করতে গিয়ে তাকে ধনাত্মক সংখ্যায় রূপান্তরিত করতে পারব। যেমন :

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \times 4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7 \times (-1)} = \sqrt{7} \times \sqrt{-1} = \sqrt{7}i^{*}$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3i$$

Exercise : $x^2 = 2$ এবং $x^2 + x + 1 = 0$ এই সমীকরণ (equation) দু'টি সমাধান করুন।

এখানে লক্ষ্য করার বিষয় হলো, যেহেতু $i^2 = -1$, সেহেতু $\sqrt{i^2} = \sqrt{-1}$, বা $i = \sqrt{-1}$; অর্থাৎ i হলো -1 এর ধনাত্মক (positive) বর্গমূল।

$$x^2 = -1 = i^2$$

হলে, বর্গমূলের নিয়ম অনুসারে,

$$x = \pm\sqrt{i^2} = \pm i \text{।}$$

সুতরাং উপরোক্ত উদাহরণে x এর দু'টি মূল (root) আছে : $+i$ এবং $-i$। উল্টোক্রমেও দেখা যায় :

$$(-i)^2 = (-1)^2.(i^2) = 1.i^2 = -1 \text{।}$$

তাহলে এখন আমরা i দ্বারা $2i$, $-3i$, $2 + 3i$ ইত্যাদি সংখ্যা গঠন করতে পারব। আরো সাধারণভাবে, $a + bi$ গঠনের সংখ্যা তৈরি করতে পারব। এই $a + bi$ কে বলে **জটিল সংখ্যা** বা **complex number**; যাতে a এবং b হলো বাস্তব সংখ্যা এবং i হলো **কাল্পনিক সংখ্যার একক (imaginary unit number)**। এই সংখ্যার a কে বলা হয় **বাস্তব অংশ (real part)** এবং bi কে বলে **কাল্পনিক অংশ (imaginary**

* i প্রতীকটিকে অন্য সংখ্যার বা চলকের (variable) আগে বা পরে বসানো যায়।

part)। Complex number এর a = 0 হলে অবশিষ্ট থাকে bi, যাকে বলে **pure imaginary number** বা **বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা**।

সংখ্যার ভূবনে জটিল সংখ্যার অন্তর্ভুক্তির ফলে তা এখন আরো বিস্তৃত হয়েছে। এখন আমরা বলতে পারি যে, সকল বাস্তব সংখ্যার ভূবন (field / domain of real numbers) হলো জটিল সংখ্যার ভূবনের (complex field) একটি অংশ। কারণ, a + bi এর b = 0 হলে বাস্তব সংখ্যাই পাওয়া যায়।

জটিল সংখ্যার ধর্মাবলী (Properties of Complex Numbers) :

জটিল সংখ্যা যোগ (অর্থাৎ বিয়োগও) এবং গুণনের (অর্থাৎ ভাগও) ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যার মতো একই নিয়ম মেনে চলে।

1. Sum (যোগফল) : দুইটি জটিল সংখ্যার যোগের সময়ে বাস্তব অংশগুলিকে (real parts) একত্রে এবং কাল্পনিক অংশগুলিকে (imaginary parts) একত্রে যোগ করতে হয়। বাস্তব অংশের সাথে কাল্পনিক অংশকে যোগ করা যায় না :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2. Difference (পার্থক্য) : দুইটি জটিল সংখ্যাকে বিয়োগ করতে হলে বাস্তব অংশ থেকে বাস্তব অংশ এবং কাল্পনিক অংশ থেকে কাল্পনিক অংশ বিয়োগ করতে হয় :

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= a + bi - c - di \\ &= (a - c) - (bi + di) \\ &= (a - c) - (b + d)i\end{aligned}$$

3. Additive Inverse (যোগবোধক বিপরীত) : বাস্তব সংখ্যার মতো একটি জটিল সংখ্যার সাথে তার যোগবোধক বিপরীত যোগ করলে যোগফল হয় শূন্য (zero):

$$\begin{aligned}&(a + bi) + (-(a + bi)) \\ =\ & a + bi - a - bi \\ =\ & (a - a) + (bi - bi) \\ =\ & (a - a) + (b - b)i\end{aligned}$$

$= 0 + 0i$

$= 0$

NOTE : দুইটি জটিল সংখ্যাকে যোগ ক'রে একটি বাস্তব সংখ্যাও পাওয়া যেতে পারে :

$$\mathbf{2i + (-4 - 2i)}$$
$$\mathbf{= 2i - 4 - 2i}$$
$$\mathbf{= -4}$$

4. Additive Identity (যোগবোধক একক) : বাস্তব সংখ্যার মতো জটিল সংখ্যারও যোগবোধক একক হলো 0; অর্থাৎ যে-সংখ্যার সাথে কোনো complex number কে যোগ করলে যোগফল হয় ঐ complex number, তা হলো 0 ।

$$(a + bi) + 0$$
$$= (a + bi) + (0 + 0i)$$
$$= (a + 0) + (b + 0)\, i$$
$$= a + bi$$

5. Equality (সমতা) : দু'টি complex number পরস্পর সমান হলে একটির বাস্তব অংশ অপরটির বাস্তব অংশের সমান এবং একটির কাল্পনিক অংশ অপরটির কাল্পনিক অংশের সমান :

$$a + bi = b + ci$$
$$\therefore \quad a = b$$
$$\text{এবং} \quad b = c$$

এটি নিজে প্রমাণ করুন। পরবর্তীতে একটি exercise-এ এর প্রমাণ দেয়া হবে।

6. Standard Form (আদর্শ রূপ) : দু'টি জটিল সংখ্যার (যারা একে অপরের conjugate বা অনুবন্ধী নয়—পরে আলোচ্য) যোগফল (এবং বিয়োগফল) বা গুণফল (এবং ভাগফল) হবে আরেকটি জটিল সংখ্যা যাকে জটিল সংখ্যার আদর্শ রূপ A + Bi আকারে প্রকাশ করা যায় :

$$
\begin{aligned}
(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + adi + bci + bd(-1) \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i \\
&\Rightarrow \boxed{A \mid + \mid Bi}
\end{aligned}
$$

Example : $(3 - 4i)(2 + 3i)$

$$
\begin{aligned}
&= (3.2 - (-4.3)) + (3.3 + (-4).2)i \\
&= (6 + 12) + (9 - 8)i \\
&= 18 + i \text{ [A + Bi রূপের]}
\end{aligned}
$$

ভাগের ক্ষেত্রেও (অর্থাৎ একটি complex number এর সাথে আরেকটির গুণাত্মক বিপরীত বা multiplicative inverse এর গুণনের ক্ষেত্রে) অবশেষে A + Bi রূপে ভাগফলকে প্রকাশ করা সম্ভব, এবং তাই-ই করা হয়। যেমন $(a + bi) \div (c + ci)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\
&= \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} \\
&= \frac{ac + (bc - ad)i - bd(-1)}{c^2 - d^2(-1)} \\
&= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\
&= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i \\
&\Rightarrow \text{[A + Bi রূপে প্রকাশিত]}
\end{aligned}
$$

উপরের ভাগ প্রক্রিয়াটি লক্ষ্য করার মতো। এটি সব সময়ে কাজে লাগবে। ভাগ প্রক্রিয়াটির মূল কৌশল ছিল হরকে complex number থেকে rational number-এ রূপান্তরিতকরণ, যা **rationalization** বা মূলদীকরণ নামে পরিচিত। এ কাজ করতে গিয়ে লব ও হরকে এমন সংখ্যা দ্বারা গুণন করা হয় যার ফলে হরের i টির বর্গ হয়ে যাবে, এবং তখন $i^2 = -1$ বসালে i উঠে যাবে। হর যদি a + bi হয় তাহলে তাকে a − bi দ্বারা

গুণন করলে তা বাস্তব সংখ্যায় পরিণত হয়। এখানে a – bi হলো a + bi এর অনুবন্ধী বা **conjugate**, যা আমরা একটু পরেই ভালোভাবে জানব।

Example : $\frac{3-4i}{2+3i} = ?$

Solution :
$$\frac{3-4i}{2+3i} = \frac{(3-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$
$$= \frac{6-8i-9i+12i^2}{4-9i^2}$$
$$= \frac{6-(8+9)i+12(-1)}{4-9(-1)}$$
$$= \frac{6-12-17i}{13}$$
$$= \frac{-6-17i}{13}$$
$$= -\frac{6}{13}-\frac{17}{13}i \quad \text{[A + Bi রূপে প্রকাশিত]}$$

7. Multiplicative Inverse (গুণাত্মক বিপরীত) : কোনো জটিল সংখ্যার সাথে তার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যা (যা হলো আরেকটি জটিল সংখ্যা) গুণন করলে গুণফল হয় 1। অন্য কথায়, কোনো জটিল সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 1।

a + bi এর গুণাত্মক বিপরীত $= \frac{1}{a+bi}$

সুতরাং $(a \neq bi)\frac{1}{a \neq bi} = 1$

8. Complex Conjugates (জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী) : এটি একটি চমৎকার জিনিস। এ বিষয়ে জানবার আগে এই প্রশ্নগুলোর উত্তর খোঁজার চেষ্টা করুন :

- দু'টি অমূলদ (irrational) সংখ্যাকে গুণন করলে গুণফল কি কখনও একটি মূলদ (rational) সংখ্যা হয়?
- দু'টি মূলদ সংখ্যাকে গুণন করলে গুণফল কি কখনও একটি অমূলদ সংখ্যা হয়?

উভয় ক্ষেত্রে কিন্তু ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গুণন করতে হবে, একই সংখ্যা নয়। এসব প্রশ্নের উত্তর হলো 'না'। কিন্তু এমন দু'টি জটিল সংখ্যা আছে যাদেরকে গুণ করলে গুণফল সব সময়ই একটি বাস্তব সংখ্যা হবে। শুধু তাই নয়, এদেরকে যোগ করলেও যোগফল একটি বাস্তব সংখ্যা হবে। এই জটিল সংখ্যা দু'টি সব সময়ই নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে চলে। একটি সংখ্যা যদি হয় a + bi, তাহলে অপরটি হবে a – bi, অর্থাৎ উভয় সংখ্যার বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশগুলি সমান, তবে চিহ্ন আলাদা। এই গঠনের যে-কোনো দু'টি সংখ্যা গুণন করলে গুণফল সব সময়ে হবে বাস্তব অংশটির এবং কাল্পনিক অংশের বাস্তব সংখ্যাটির বর্গের যোগফল।

অর্থাৎ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

কারণ, $(a + bi)(a - bi)$

$= a^2 - b^2i^2$

$= a^2 - b^2(-1)$

$= a^2 + b^2$ ।

এবং—

$(a + bi) + (a - bi)$

$= a + a + bi - bi$

$= 2a + 0$

$= 2a$

জটিল সংখ্যার এই অনুবন্ধীকে জটিল সংখ্যার ভাগের সময়ে ব্যবহার করা যায় (উপরের 6নং বৈশিষ্ট্যের ভাগ-সম্পর্কিত উদাহরণটি দ্রষ্টব্য)। পরে আমরা অনুবন্ধীর চিত্ররূপ দেখব, যা আরো সুন্দর এবং আগ্রহ-উদ্রেককর।

9. Zero Valued Complex Number (শূন্য মানের জটিল সংখ্যা) : কোনো জটিল সংখ্যার মান শূন্য হলে তার বাস্তব বা কাল্পনিক কোনো অংশের মান শূন্য অপেক্ষা কম বা বেশি হতে পারে না। অর্থাৎ :

$a + bi = 0$ হলে

$a = 0$ এবং

$b = 0$

যদিও $i = 0$ নয়, কারণ i তো সুনির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত একটি ধ্রুব (constant) মান-নির্দেশক প্রতীক।

Proof (প্রমাণ) : আমরা জানি যে জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ এবং কাল্পনিক অংশ কখনও সমান হতে পারে না (তারা ভিন্ন চরিত্রের সংখ্যা ব'লে তাদেরকে যোগ বা বিয়োগ করা যায় না)। যদি তারা একে অপরের যোগাত্মক বিপরীত (additive inverse) হতে পারত তাহলে $a + (-bi) = 0$ হতো এবং তখন a ও b এর বাস্তব মান থাকা সত্ত্বেও $a + bi = 0$ হতে পারত। কিন্তু a এবং bi কখনো সমান নয়; তাদেরকে যোগও করা যায় না। ফলে $a + bi = 0$ হলে বুঝতে হবে যে a এবং b উভয়ের মানই 0। ■

FOOD FOR THOUGHT

প্রমাণ করুন যে $a + bi = c + di$ হলে $a = c$ এবং $b = d$।

প্রমাণ : $a + bi = c + di$

$\Rightarrow (a - c) = (di - bi)$ [স্থানান্তর ক'রে]

$\Rightarrow (a - c)^2 = ((d - b)i)^2$ [বর্গ ক'রে]

$$\Rightarrow (a - c)^2 = (d - b)^2 \times (-1)$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = (d^2 - 2db + b^2)(-1)$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = -(b^2 - 2bd + d^2)$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = -(b - d)^2$$

$\Rightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 = 0$ [স্থানান্তর ক'রে]

এখানে $(a - c)^2$ এবং $(b - d)^2$ দু'টি বর্গ সংখ্যা। কিন্তু দু'টি বর্গ সংখ্যার মানের যোগফলকে 0 হতে হলে তাদের প্রত্যেককেই আলাদা আলাদাভাবে 0 হতে হবে। ফলে—

$$(a - c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = c$$

এবং—

$$(b - d)^2 = 0$$

$\Rightarrow b = d$ (প্রমাণিত)

10. সূচক ঃ কোনো জটিল সংখ্যাকে কোনো ধনাত্মক এবং অখণ্ড সূচকে উন্নীত করলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাও একটি জটিল সংখ্যা হবে।

a + bi কে 2 সূচকে উন্নীত করা যাক :

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 &= a^2 + 2.a.bi + (bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2(-1) \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \\ &= (a^2 - b^2) + 2abi\end{aligned}$$

[A + Bi রূপে প্রকাশিত]

উপরের উদাহরণে $A = a^2 - b^2$, $B = 2ab$।

আবার জটিল সংখ্যাটিকে 3 সূচকে উন্নীত করা যাক :

$$\begin{aligned}(a + bi)^3 &= a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 \\ &= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2(-1) + b^3i^3 \\ &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 + b^3.i^2.i \\ &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 + b^3.(-1).i \\ &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i \\ &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i\end{aligned}$$

[A + Bi রূপে প্রকাশিত]

যেখানে $A = a^3 - 3ab^2$ এবং $B = 3a^2b - b^3$।

11. জটিল সংখ্যার মূল (Roots of a Complex Number) : কোনো জটিল সংখ্যার কোনো মূল (root)-ও একটি জটিল সংখ্যা হবে। (এ বিষয়ে পরে আলোচনা করা হবে।)

Square Root of a Negative Number (ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল) :

আমাদের মনে আছে যে কাল্পনিক সংখ্যাকে উদ্ভাবন ঘটেছে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল করতে গিয়ে। এখন আমরা i এর মাধ্যমে যে-কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে পারি। কিন্তু এক্ষেত্রে একটি সাবধানতা অবলম্বন করার বিশেষ প্রয়োজন

রয়েছে : ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল নিয়ে গুণন করতে হলে প্রথমে সেগুলিকে i-সম্বলিত প্রতীকে রূপান্তরিত ক'রে নিতে হয়। নইলে ভুল হয়ে যাবার সম্ভাবনা বেশি থাকে। উদাহরণের মাধ্যমে দেখা যাক ভুলের সম্ভাবনা কোথায়।

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{-5} \times \sqrt{-5} \\
= \; & \sqrt{(-5)\,(-5)} \\
= \; & \sqrt{25} \\
= \; & 5
\end{aligned}
$$

উপরে যে-ফল পাওয়া গেল তা কি কখনো সম্ভব? অবশ্য উপরে যে-ভুল করা হয়েছে একমাত্র সেরূপ ভুল করলেই এরূপ ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সম্ভব, নইলে নয়। ভুলটি হয়েছে $\sqrt{-5}$ এবং $\sqrt{-5}$ এর গুণনে, যার কারণে আমরা 5 এর বর্গমূল হিসেবে দেখছি $\sqrt{-5}$ কে; অথচ 5 এর বর্গমূল হবে $\sqrt{5}$, তা একটি ধনাত্মক সংখ্যা ব'লে।

ভুলটি হওয়ার সঙ্গত কারণ আছে। ধনাত্মক সংখ্যার ক্ষেত্রে আমরা, উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{5}$ কে গুণন করতে গিয়ে উভয়কে একই বর্গমূল চিহ্নের নিচে নিয়ে আসি, যা বৈধ বটে :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5 \times 5} = \sqrt{25} = \pm 5$$

কিন্তু ঋণাত্মক বর্গমূলকে নিয়ে গুণন কাজ চালাতে হলে এই পদ্ধতি অনুসরণ করলে ভুল হয়—উপরের উদাহরণে তাই হয়েছে। এই ভুল এড়ানোর জন্য পূর্ববর্ণিত নিয়ম অনুসরণ করতে হবে :

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{-5} \times \sqrt{-5} \\
= \; & \sqrt{5(-1)} \times \sqrt{5(-1)} \\
= \; & \sqrt{5i^2} \times \sqrt{5i^2} \\
= \; & \sqrt{5}\, i \times \sqrt{5}\, i \\
= \; & \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 \; = 5(-1) = -5
\end{aligned}
$$

দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল সংখ্যার মাধ্যমে সমাধান (Complex Solutions of a Quadratic Equation)

বীজগণিতের প্রাথমিক ধারণা থেকে আপনাদের নিশ্চয়ই মনে আছে যে, $ax^2 + bx + c = 0$ রূপের যাবতীয় সমীকরণের মূল (অর্থাৎ x এর মান) বের করতে হলে নিচের সূত্রটি (formula) ব্যবহার করা যায় :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখানে স্পষ্টতই বুঝা যাচ্ছে যে "$\sqrt{\quad}$" চিহ্নের মধ্যকার রাশির (quantity) মান যদি ধনাত্মক হয়, তাহলে বাস্তব সংখ্যায় x এর মান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু রাশিটির মান যদি হয় ঋণাত্মক, তাহলে, যেহেতু ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব সংখ্যাভুবনে নেই, সেহেতু x এর মান হবে দুইটি জটিল রাশি। সেক্ষেত্রে "$\sqrt{\quad}$" চিহ্নের মধ্যকার রাশির সাথে i কে ব্যবহার করার প্রয়োজন হবে। একটি উদাহরণের মাধ্যমে ঘটনাটিকে দেখানো যাক। (অধ্যায়—৩-এ দ্বিঘাত রাশির মূল নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।)

$3x^2 - 2x + 5 = 0$ হলে

$x = ?$

সমাধান : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এখানে : $b = -2; -b = 2$

$b^2 = 4$

$a = 3; 2a = 3 \cdot 5 = 6$

$c = 5$

$ac = 3 \cdot 5 = 15$

$4ac = 4 \cdot 15 = 60$

সুতরাং $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 60}}{6}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$

অতএব x এর দু'টি মান

$$x = \frac{2 + \sqrt{-56}}{6}$$

$$\text{এবং } x = \frac{2 - \sqrt{-56}}{6}$$

মান দু'টিকে জটিল সংখ্যার আদর্শ রূপে প্রকাশ করা যাক :

$$x = \frac{2 + \sqrt{4 \times (-14)}}{3 \cdot 2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2^2 \cdot (-14)}}{3 \cdot 2}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{-14}}{3 \cdot 2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(1 + \sqrt{-14}\right)}{3 \cdot \cancel{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{-14}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{-14}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{14 \cdot (-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{14 \cdot i^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{14}\, i\right)$$

এভাবে দেখানো যায় যে x এর অপর মানটি :

$$\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{14}\, i\right)$$

এখানে উভয় জটিল সংখ্যা A + Bi রূপে প্রদর্শিত হয়েছে।

এখানে আরেকটি জিনিস লক্ষণীয় : x এর যে-দু'টি মান পাওয়া গেছে, তারা একে অপরের অনুবন্ধী **(conjugate)**। আসলে কোনো সমীকরণের মূল যদি হয় জটিল রাশি, তাহলে তার সাথে সব সময়ে তার অনুবন্ধী (conjugate) সংখ্যাটিও আরেকটি মূল হিসেবে থাকে। অবশ্য সেক্ষেত্রে শর্ত আছে : সমীকরণের সহগগুলিকে (coefficient) হতে হবে বাস্তব সংখ্যা (উপরের সমীকরণে 3 এবং 2 ছিল x এর সহগ)।

i এর ঘাত নির্ণয়
(Finding Powers of i)

কাল্পনিক সংখ্যার একক i এর ঘাত নির্ণয় করা খুবই সহজ। নিচের উদাহরণগুলি দেখলেই তা বুঝা যাবে।

(i) $i^{10} = ?$

(ii) $i^{73} = ?$

(i) $i^{10} = i^8.i^2 \quad = (i^4)^2.i^2$

$\quad = (1)^2.i^2 = 1.(-1) = -1$

সুতরাং $i^{10} = -1$

(ii) $i^{73} = i^{72}.i^1 = (i^4)^{18}.i^1 = (-1)^{18}.i = 1.i = i$

উপরের উদাহরণগুলোতে হিসাব করার সময়ে i এর ৪র্থ (4th) ঘাত নেয়া হলো কেন? আসলে আমরা ধাপে ধাপে i^2 নিয়েও হিসাবগুলি করতে পারতাম, কিন্তু হিসাব সংক্ষিপ্ত এবং সহজ করার জন্যই এরূপ করেছি। দেখুন :

$i^1 = 1$

$i^2 = -1$ [i এর সংজ্ঞা অনুসারে]

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i = 1.i = i$ [i^4 এর মান বসিয়ে]

$i^6 = i^4.i^2 = 1.-1 = -1$

$i^7 = i^4.i^3 = 1.(-i) = -i$

$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$

ইত্যাদি।

দেখা যাচ্ছে যে i এর সূচক 1 থেকে 4 পর্যন্ত ভিন্ন ভিন্ন হচ্ছে, কিন্তু তার পর আবারও আগের রীতি (pattern) পুনরাবৃত্ত হচ্ছে। এ কারণে i এর যে-কোনো ঘাতের মান বের করার সময়ে তাকে যতদূর সম্ভব 4 এর গুণিতকে (multiple, অর্থাৎ $4 \times n$) ভাগ ক'রে নিলে হিসাব সহজ হয়। আরেকটা উদাহরণ নেয়া যাক :

$i^{57} = (i^4)^{14}.i = (1)^{14}.i = 1.i = i$

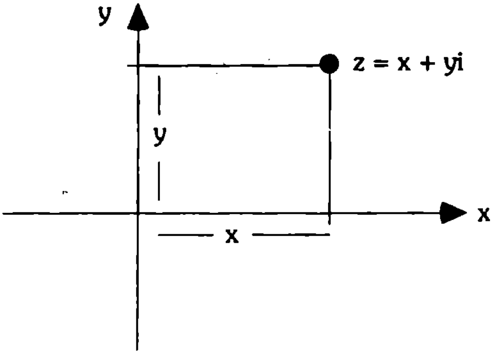
একই ধরনের কাজ অবশ্য 2 বা 3 নিয়েও করা যেত, কিন্তু 4 এর মান বড় ব'লে অল্প কয়েক ধাপেই হিসাব খুব সহজে ক'রে ফেলা যেতে পারে। অবশ্য নিজের ইচ্ছায় যে-কোনোভাবেই হিসাব করা যায়। i এর বিভিন্ন ঘাত (powers) যে চার ধাপ পর পর আবর্তিত হয়, প্রধানত এটা দেখানোর জন্যই এই আলোচনা করা হলো।

জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা
(Geometrical Interpretation of Complex Numbers)

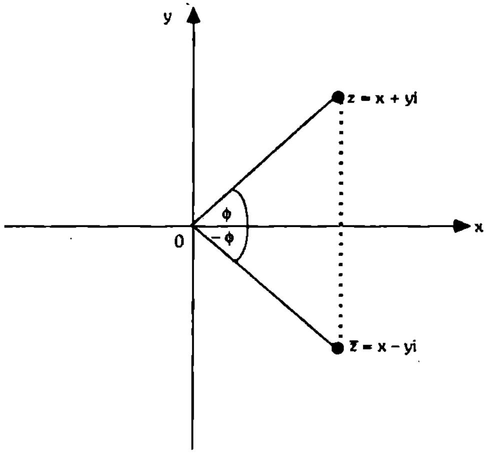
একটি মজার জিনিস হলো এই যে, জটিল সংখ্যার আবিষ্কারের পরও অনেক কাল ধ'রে তা গণিতবিদদের আস্থা অর্জন করতে পারেনি। তখন মনে করা হতো যে কাল্পনিক সংখ্যা আসলে বানোয়াট এবং ভিত্তিহীন। অবশেষে ঊনবিংশ শতকের প্রথম দিকে এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা প্রদান করা হলে সবাই এর নির্ভরযোগ্যতায় এবং সৌন্দর্যে মুগ্ধ হলেন। গণিতের কিছু কিছু বিষয়কে জ্যামিতিক আকারে প্রদর্শন করলে তার বোধগম্যতা বেড়ে যায় এবং প্রকৃত সৌন্দর্য উপলব্ধি করা যায়। এখানে জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দেয়া হলো।

প্রথমে জটিল সংখ্যাটিকে x ও y অক্ষ দ্বারা বিভক্ত সমতলে (যাকে বলে জটিল তল বা complex plane) স্থানাংকের নিয়ম অনুযায়ী উপস্থাপন (represent) করা যাক। সংখ্যাটি—

$z = x + yi$ হলে x-অক্ষে বাস্তব অংশ 'x' এবং 'y'-অক্ষে কাল্পনিক অংশ 'y' স্থাপন করতে হবে।



স্থানাংক নির্ধারণের সময়ে শুধু x ও y এর মান নিতে হবে, i এর নয়। একই তলে x + yi এর অনুবন্ধী (conjugate) $\bar{z} = x - yi$ কেও স্থাপন করা যাক। (নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য) কোনো জটিল সংখ্যা z এর অনুবন্ধীকে সচরাচর $\bar{z}$ (জেড বার) প্রতীকটি দ্বারা লেখা হয়। এখানে একটি চমৎকার জিনিস লক্ষণীয় : x অক্ষকে একটি আয়না হিসেবে কল্পনা করুন যার কাচ হলো z = x + yi এর দিকে। এখন z এর পেছন থেকে তাকালে মনে হবে যেন উক্ত আয়নার মধ্যেই z এর প্রতিবিম্ব হলো $\bar{z}$। ফলে z x-অক্ষের সাথে যদি ϕ (ফাই – গ্রীক বর্ণ) কোণে অবস্থিত হয়, তাহলে x-অক্ষের সাথে $\bar{z}$ অবস্থিত হবে $-\phi$ কোণে। এর সাথে অনুবন্ধীর পূর্ববর্ণিত সংখ্যাগত চরিত্রের কথা মনে ক'রে দেখুন। আরো মনে ক'রে দেখুন যে, কোনো সমীকরণের কোনো চলকের (variable) মূল (root) জটিল সংখ্যা হলে তার অবশ্যই আরো একটি জটিল মূল থাকবে যা প্রথম মূলটির অনুবন্ধী।



মূলবিন্দু 0 থেকে z এবং $\bar{z}$ এর একই দূরত্ব, যা, ধরা যাক, ρ (গ্রীক small letter রো)। এই ρ আবার পরস্পর সংলগ্ন দু'টি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ (hypotenuse)। সুতরাং পীথাগোরাসের সূত্র অনুসারে উপরের ত্রিভুজটি থেকে :

$$(\text{অতিভুজ})^২ = (\text{বাহু})^২ + (\text{বাহু})^২$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

কারণ x এবং y অক্ষ থেকে যথাক্রমে x ও y পরিমাণ দূরত্ব নিয়েই z কে স্থাপিত (plot) করা হয়েছে। এখন :

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 \\
& x^2 + xyi - xyi + y^2 \; [\text{কারণ } xyi - xyi = 0] \\
&= x^2 + xyi - xyi - y^2(-1) \; [\text{কারণ } -y^2(-1) = y^2] \\
&= x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2 \\
&= x\,(x + yi) - yi(x + yi) \\
&= (x + yi)\,(x - yi) \\
\text{অর্থাৎ } \rho^2 &= (x + yi)\,(x - yi) \\
&= \text{জটিল সংখ্যা} \times \text{তার অনুবন্ধী} \\
&= z.\bar{z}
\end{aligned}$$

আর আগেই দেখেছি :

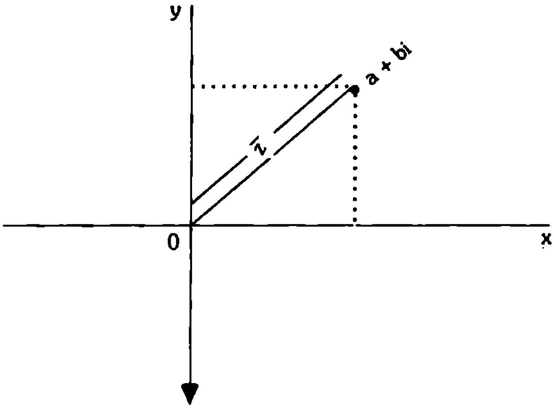
$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

এই ρ এর মানকে বলে z এর (অর্থাৎ জটিল সংখ্যাটির) মডুলাস **(modulus)**, এবং তাকে লেখা হয় এভাবে :

$$\rho = |z|$$

তাহলে, কোনো জটিল সংখ্যার মডুলাস হলো মূলবিন্দু **(origin)** থেকে তার স্থানাংকের দূরত্ব।



FOOD FOR THOUGHT

1. $z = a + bi$ এর $|z| = 0$ হলে তার রূপ কেমন হবে? চিত্র দেখে চিন্তা করুন।
২. তিনটি জটিল সংখ্যার প্রত্যেকটির মডুলাস 1, এবং x-অক্ষের সাথে তাদের কোণ ϕ_1, ϕ_2, ও ϕ_3। অনুমান থেকে সংখ্যা তিনটির জ্যামিতিক চিত্র আঁকুন (একই complex plane-এ)। বিন্দুগুলিকে কি কোনো বৃত্ত দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়?

জটিল সংখ্যা কি নড়ে চড়ে? (ত্রিকোণোমিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে)

(Can Complex Numbers Move?—A Trigonometric Approach)

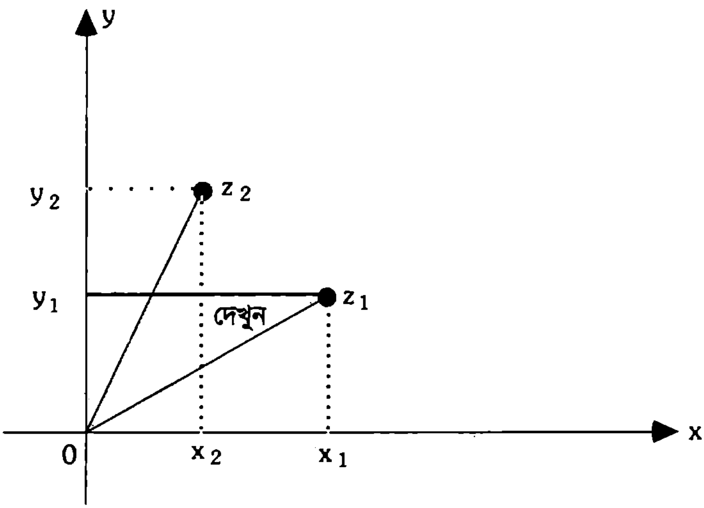
সংখ্যার ভুবন থেকে জটিল সংখ্যাকে জ্যামিতির, এবং তা থেকে ত্রিকোণোমিতির, ভুবনে তুলে আনলে তার কিছু অদ্ভুত রূপ চোখে পড়ে—যা শুধু চোখকে নয়, মনকেও আকৃষ্ট করে। একটি চমৎকার ব্যাপার হলো এই যে, ছক কাগজে স্থাপিত একটি জটিল সংখ্যার মডুলাস-রেখাকে যোগ বা গুণনের মাধ্যমে তাকে কিছু সংখ্যা গ্রাস করতে দিলে তা ঘড়ির কাটার মতো নড়ে চড়ে। তাকে ইচ্ছে মতো ঘোরানো যায়, ফেরানো যায়। ভাবতে অবাক লাগছে? কিন্তু একটু পরেই বুঝা যাবে যে বিস্ময়কর হলেও তা অবিশ্বাস্য

নয়। তবে প্রথমে আরেকটি চিত্র নিয়ে আমরা দু'টি জটিল সংখ্যাকে যোগ করলে কী হয় তা দেখব।

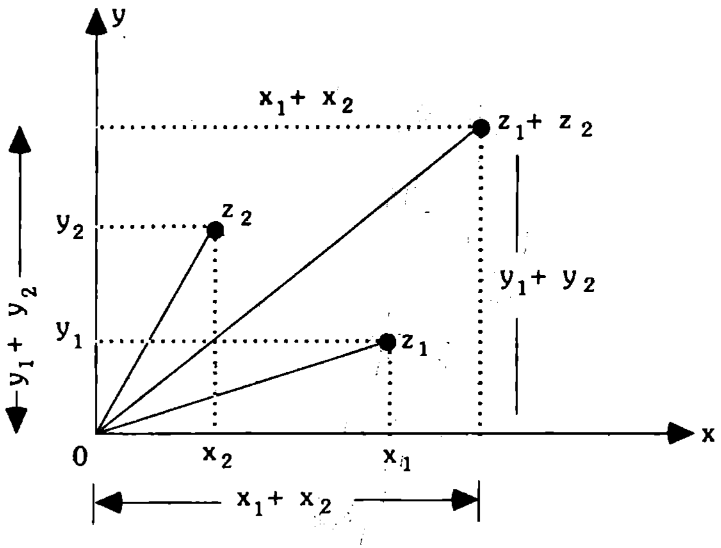
দু'টি জটিল সংখ্যা নেয়া যাক : $z_1 = x_1 + y_1 i$ এবং $z_2 = x_2 + y_2 i$। জটিল সংখ্যার যোগের নিয়ম থেকে আমরা জানি :

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\
&= x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i \\
&= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i
\end{aligned}
$$

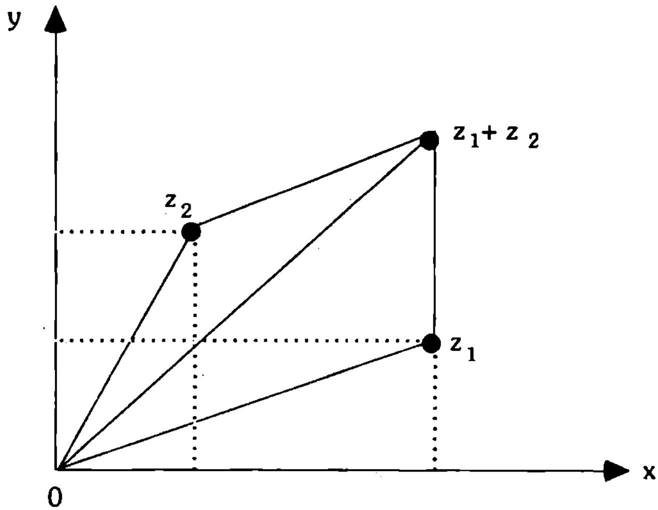
নিচের চিত্রে সংখ্যা দু'টির স্থানাংক দেখানো হলো।



কিন্তু উপরের যোগফল থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, সংখ্যা দু'টিকে যোগ ক'রে যে-সংখ্যা পাওয়া যাবে তাকে উক্ত complex plane-এ স্থাপন করার জন্য আলাদা কোনো হিসাব করতে হবে না, শুধু x অক্ষে $x_1 + x_2$ মাপের দৈর্ঘ্য এবং y অক্ষে $y_1 + y_2$ মাপের দৈর্ঘ্য কেটে নিতে হবে। এভাবে $z_1 + z_2$ বিন্দুটিকে স্থাপন ক'রে তার মডুলাস-রেখা আঁকা যাক।



এবার $z_1 + z_2$ বিন্দু থেকে z_1 এবং z_2 বিন্দু দু'টির সংযোজক সরলরেখা দু'টি আঁকি। (নিচের চিত্র)



এই চিত্রটি অত্যন্ত সহজ অথচ অনেক গুরুত্বপূর্ণ। এ থেকে আমরা এই সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, দু'টি জটিল সংখ্যাকে যোগ করলে যে-নোতুন জটিল সংখ্যা পাওয়া যায়, তার মডুলাস পূর্বোক্ত সংখ্যা দু'টির মডুলাসের যোগফলের বেশি হতে পারে না। প্রাথমিক জ্যামিতির ধারণা থেকেই এটি প্রমাণ করা যায়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একথা সত্য যে তার দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড় হতে পারে না। চিত্রের সামন্তরিকের যে-কোনো অর্ধাংশ (যা একটি ত্রিভুজ) থেকেও ঠিক একথা প্রমাণ করা যায় যে :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

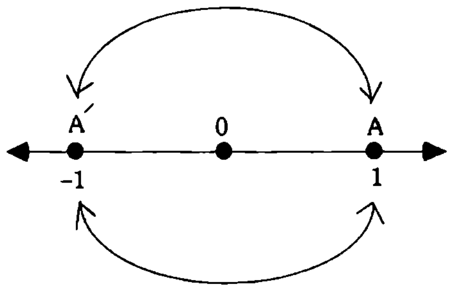
জটিল সংখ্যার যোগের এই জ্যামিতিক রীতিকে বলে জটিল সংখ্যার যোগের সামন্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Addition of Complex Numbers)।

FOOD FOR THOUGHT

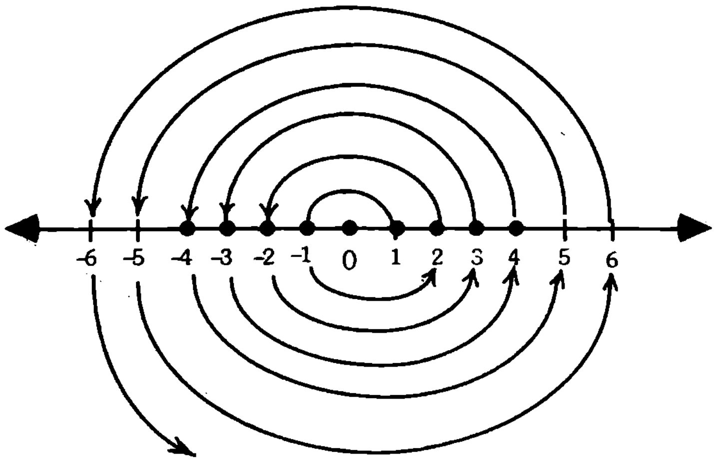
1. কোন ক্ষেত্রে $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ সমীকরণটি সত্য হবে?
2. পূর্বোক্ত অসমতাটিকে (inequality) জ্যামিতিক যুক্তি দিয়ে সংক্ষেপে প্রমাণ করুন। (Hint : আসল কথাটুকু বলেই দেয়া হয়েছে।)

যোগের সময়ে পূর্বোক্ত চিত্রে কি জটিল সংখ্যা নড়াচড়া করেছে? আসলে জটিল সংখ্যার সাথে ঘূর্ণনের (rotation) ধারণা জড়িত, তবে তা বুঝতে হলে তাকে ত্রিকোণোমিতিক আকারে প্রকাশ করতে হবে।

আমাদের সরলতম সংখ্যারেখা থেকেও এর আভাস পাওয়া যায়। নিচের চিত্র দেখুন।

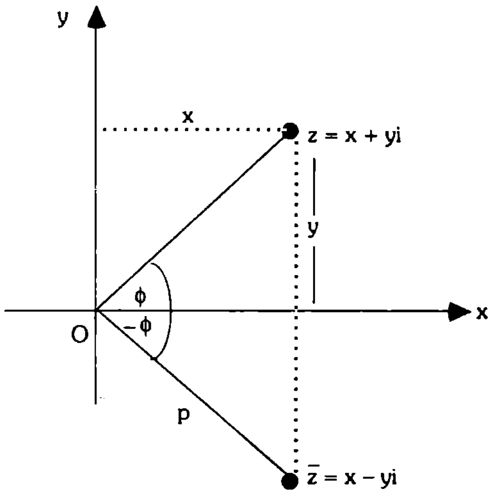


ধনাত্মক 1 কে যদি (–1) দ্বারা গুণন করা হয়, তাহলে কী ঘটবে? তাহলে OA রেখাংশটি কোনো-না-কোনো পথে—ধরি ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে—ঘুরে OA´ অবস্থানে আসবে, কারণ $1 \times (-1) = -1$। আবার এই (–1) কেও (–1) দ্বারা গুণন করলে OA´ রেখাটি একই দিকে ঘুরে আবারও OA অবস্থানে চলে আসবে, কারণ $(-1) \times (-1) = 1$। কিন্তু সংখ্যা রেখা দ্বারা অন্যান্য অবস্থানে (অর্থাৎ রেখাটির দুপাশের তলে) OA কে থামানো যায় না। বাস্তব জটিল রাশিকে চিত্রে স্থাপিত ক'রে তার মাধ্যমে এরূপ ঘূর্ণন—যে-কোনো দিকে ঘূর্ণন—ব্যাখ্যা করা যায়। তবে তার আগে আমরা সংখ্যাকে আরেকটু নেড়ে দেখি। ধরা যাক আমরা প্রথমে 1 কে (–1) দ্বারা, তারপর (–1) কে (–2) দ্বারা, তারপর প্রাপ্ত 2কে (–1) দ্বারা, তারপর প্রাপ্ত (–2) কে $\left(\frac{-3}{2}\right)$ দ্বারা, তারপর প্রাপ্ত 3কে (–1) দ্বারা, তারপর প্রাপ্ত (–3) কে $\left(\frac{-4}{3}\right)$ দ্বারা পর্যায়ক্রমে গুণ ক'রে সংখ্যা রেখার ঘূর্ণন লক্ষ্য করি, এবং এই প্রক্রিয়া এভাবে চালিয়ে যাই, এবং ধরি যে একেকটি রেখাংশ সর্বদা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তার উল্টো দিকে (anticlockwise) ঘুরবে, তাহলে উক্ত ঘূর্ণনকে নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায় :



ঘূর্ণন-পথটি হবে একটি কুণ্ডলীর (coil) মতো। গণিতের ভুবনে জটিল জটিল ঘটনা সহজে বুঝবার জন্য এরূপ সরল-সোজা ব্যাপারগুলিকে সঠিকভাবে অন্তর্দৃষ্টিতে দেখবার (visualize) প্রয়োজন আছে বৈ কি।

যাহোক, এখন আমরা কিছুক্ষণের জন্য আবারো পূর্ববর্তী একটি চিত্রে ফিরে যাই। বুঝার সুবিধার জন্য চিত্রটিকে এখানে নোতুন ক'রে আঁকা হলো।



চিত্র থেকেই বুঝা যাচ্ছে যে, কোনো জটিল সংখ্যার মডুলাস (অর্থাৎ $\rho = |z|$) এবং তার অনুবন্ধীর মডুলাস ($\bar{\rho} = |\bar{z}|$) সমান। x-অক্ষের সাথে মূল-বিন্দু এবং তাদের সংযোজক সরলরেখাদ্বয় যে দু'টি কোণ উৎপন্ন করে (এখানে ϕ) তারাও পরস্পর সমান, তবে বিপরীতমুখী (অর্থাৎ বিপরীত চিহ্নযুক্ত)। অর্থাৎ $\bar{\phi} = -\phi$। অবশ্য এই কোণগুলি বিশেষভাবে (uniquely) সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ ϕ কোণ ক'রে ρ রেখাটি যে-অবস্থানে এখন আছে, তাকে সেখান থেকে ঠিক 360° (এক পাক) ঘুরিয়ে আনলে তা আবার ঠিক সেই স্থানেই এসে থামবে। এভাবে 1 বার 2 বার বা যে-কোনো সংখ্যকবার ρকে ঘোরানো যেতে পারে, যার ফলে তার অবশেষ অবস্থানের কোনো রদ-বদল হবে না। ফলে ϕ কে—

$$\begin{aligned} &\phi \\ 360^\circ &+ \phi \\ 2 \times 360^\circ &+ \phi \\ 3 \times 360^\circ &+ \phi \\ 4 \times 360^\circ &+ \phi \\ n \times 360^\circ &+ \phi \end{aligned}$$

ইত্যাদি বিভিন্নভাবেও বিবেচনা করা যেতে পারে। কিন্তু তাতে আমরা রেখাটিকে সব সময়ে একই অবস্থানে পাচ্ছি। **অন্যান্য অবস্থানে একে পেতে হলে জটিল সংখ্যাটিকে এমনভাবে প্রকাশ করতে হবে যেন তার মানের সাথেই তার কোণের (ϕ) মান সংযুক্ত থাকে।** ফলে তার মান কম-বেশি হলে কোণটিও কম-বেশি হবে, এবং এভাবে তাকে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ক'রে তার চারপাশে ঘোরানো যাবে।

আমরা জটিল সংখ্যাকে সংজ্ঞায়িত করেছি এভাবে :

$$z = x + yi$$

এখানে x এর বদলে লেখা যায় :

$$x = x \times \frac{\rho}{\rho} \quad \left[\frac{\rho}{\rho} = 1, \therefore x \cdot \frac{\rho}{\rho} = x\right]$$

$$\text{বা, } x = \rho \times \frac{x}{\rho}$$

এবার চিত্রে $\frac{x}{\rho}$ মানে কী দাঁড়ায় তা চিন্তা ক'রে দেখুন। সমকোণী ত্রিভুজটিতে $\frac{x}{\rho}$ $= \frac{\text{x-অক্ষের কর্তিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$। কিন্তু আমাদের উদ্দেশ্য ছিল ϕ কোণটিকে অন্তর্ভুক্ত করা। এই কোণটির সাপেক্ষে x কে বলা যায় **সন্নিহিত বাহু** এবং y কে বলা যায় **বিপরীত বাহু**। সুতরাং :

$$x = \rho \times \frac{\phi \text{ এর সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অন্য যে-কোনো কোণের একটি নির্দিষ্ট মান থাকলে, উক্ত কোণটিকে অক্ষুণ্ণ রেখে ত্রিভুজটিকে যতই বড় বা ছোট করা হোক না কেন, সেক্ষেত্রে $\frac{\phi \text{ এর সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$, $\frac{\phi \text{ এর বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$ ইত্যাদি অনুপাতগুলি সব সময়ে নির্দিষ্ট থাকে। এভাবে ϕ এর প্রতিটি মানের জন্য উক্ত অনুপাতগুলির প্রত্যেকটির একেকটি নির্দিষ্ট ধ্রুব (constant) মান আছে। **সমকোণী ত্রিভুজের এই বৈশিষ্ট্যের ওপরই গোটা ত্রিকোণোমিতির (trigonometry) বিজ্ঞানটি অবস্থিত।** ত্রিকোণোমিতির মৌলিক ধারণা থেকে আমরা জানি যে উক্ত অনুপাত দু'টিকে যথাক্রমে cosine এবং

sine নামে অভিহিত করা হয়। একেকটি কোণের জন্য যেহেতু প্রতিটি অনুপাতের মান একেক রকমের, সেহেতু উক্ত নামগুলির ডানে সংশ্লিষ্ট কোণটির মান বসানো হয়। ফলে—

$x = \rho \times \cos\phi$

$= \rho \cos\phi$ [cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ cos]

এভাবে : $y = y \times \frac{\rho}{\rho}$ [$\frac{\rho}{\rho} = 1$]

$= \rho \times \frac{y}{\rho}$

$= \rho \times \frac{\phi \text{ এর বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$

$= \rho \times \sin\phi$ [sine কে সংক্ষিপ্ত ক'রে sin]

$= \rho \sin\phi$

এবার তাহলে z কে *একই সাথে তার কোণের মান এবং দৈর্ঘ্যের* (অর্থাৎ ρ-এর) *মানের মাধ্যমে* প্রকাশ করা যাচ্ছে। অর্থাৎ :

$z = x + yi$

$= \rho \cos\phi + p\sin\phi i$

$= \rho (cox\ \phi + i\sin\phi)$

এই হলো জটিল সংখ্যার ত্রিকোণোমিতিক রূপ (trigonometric form)। এটি একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এই সমীকরণে আপনি নিজেই সুবিধা মতো বিভিন্ন মান বসিয়ে z এর গাণিতিক এবং জ্যামিতিক পরিবর্তন কেমন হয় তা লক্ষ্য করতে পারেন।

সমীকরণটিকে দু'টি জটিল সংখ্যার গুণনের ক্ষেত্রে চমৎকারভাবে ব্যবহার করা যায়। দু'টি জটিল সংখ্যা নেয়া যাক যাদের ত্রিকোণোমিতিক রূপগুলি নিম্নরূপ :

$z = \rho (\cos\phi + i\sin\phi)$

এবং $z' = \rho' (\cos\phi' + i\sin\phi)$

তাহলে $zz' = \rho' (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\phi' + i\sin\phi')$

$= \rho' \{(\cos\phi\cos\phi' - \sin\phi\sin\phi') + i(\cos\phi\sin\phi' + \sin\phi\cos\phi')\}$

[জটিল সংখ্যার গুণনের নিয়ম দেখুন।]

আবার ত্রিকোণোমিতির সূত্র থেকে আমরা জানি যে (কোনো ত্রিকোণোমিতির বই দেখে নিন) :

$$\cos\phi \cos\phi' - \sin\phi \sin\phi' = \cos(\phi + \phi')$$

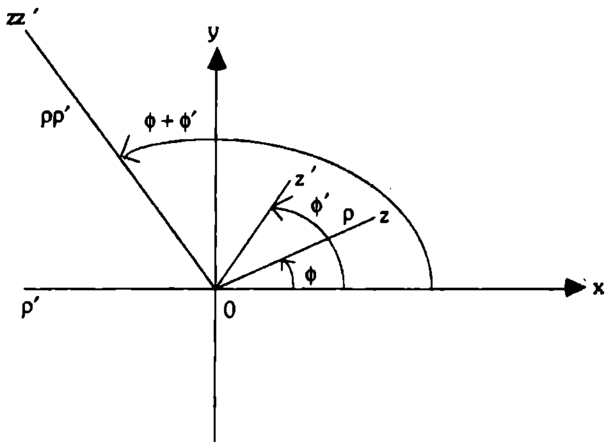
$$\cos\phi \sin\phi' + \sin\phi \cos\phi' = \sin(\phi + \phi')$$

অতএব—

$$zz' = \rho\rho' \{\cos(\phi + \phi') + i \sin(\phi + \phi')$$

এটিও একটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এর গঠনও পূর্ববর্তী সূত্রটিরই মতো। এখানে $\rho\rho'$ হলো জটিল সংখ্যা দুটিকে গুণন ক'রে যে-নোতুন সংখ্যা পাওয়া যাবে তার মডুলাস এবং ($\phi + \phi'$) হলো উক্ত নোতুন সংখ্যা x-অক্ষের সাথে যে কোণে অবস্থিত থাকে তার মান।

সূত্রটি থেকে আমরা একটি চমৎকার জিনিস লক্ষ্য করতে পারছি : দু'টি জটিল সংখ্যাকে গুণন করলে এবং প্রক্রিয়াটিকে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দেখা যাবে যে *গুণফল রেখা দু'টি থেকে তাদের কোণের সমষ্টি পরিমাণ বাম দিকে ঘুরে গিয়েছে এবং তার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়েছে।* এই গুণফলকে যদি z' এর সাথে এবং তাদের গুণফলকে আবার zz' সাথে গুণন করা হয়, এবং এই প্রক্রিয়া চালিয়ে যাওয়া হয়, তাহলে প্রত্যেকটি সর্বশেষ ρ-রেখার মান বৃদ্ধি পেতে থাকবে এবং ($\phi + \phi' + \ldots$) এভাবে কোণ বৃদ্ধি পেতে পেতে মূল-বিন্দুর চারদিকে ঘুরতে থাকবে। নিচের চিত্রের মাধ্যমে কিছু অংশ দেখানো হলো :



এবার আরো একটি চমৎকার সূত্র আবিষ্কার করা যাক। $zz' = \rho\rho' \{\cos(\phi + \phi') + i \sin(\phi + \phi')\}$ এই সূত্রটিতে $z = z'$, $\rho = \rho'$, $\phi = \phi'$ বসিয়ে পাওয়া যায় :

$$zz = \rho\rho \{\cos(\phi + \phi) + i \sin(\phi + \phi)\}$$

$$\Rightarrow z^2 = \rho^2 (\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$$

অর্থাৎ কোনো জটিল সংখ্যাকে বর্গ করলে তা 2ϕ পরিমাণ কোণে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে সরে যাবে, এবং বর্গ সংখ্যার মডুলাস-রেখাটি পূর্বোক্ত সংখ্যাটির মডুলাস-রেখার বর্গ হবে। এভাবে যে-কোনো জটিল সংখ্যাকে যে-কোনো ঘাতে উন্নীত করা যায়, যেমন :

$$z^3 = \rho^3 (\cos 3\phi + i \sin 3\phi)$$

$$z^4 = \rho^4 (\cos 4\phi + i \sin 4\phi)$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

এই সূত্র থেকে আরো অনেক সূত্রে উপনীত হওয়া যায় যা এই বইয়ের আওতাবহির্ভূত। তবে একটি সূত্র আমাদের কাজে লাগবে। জটিল রাশিটির $\rho = 1$ হলে এবং তা একটি একক বৃত্তের (unit circle—যার ব্যাসার্ধের মান হলো 1 c.m. বা 1 ইঞ্চি ইত্যাদি) ওপর অবস্থিত হলে,

$$\begin{aligned} z = x + yi &= \rho (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= 1.(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= (\cos \phi + i \sin \phi) \end{aligned}$$

বসিয়ে পাওয়া যায় :

$(\cos \phi + i \sin \phi)_n = (\cos n\phi + i \sin n\phi)$, কারণ $P^n = 1^n = 1$। এর আবিষ্কারকের নাম অনুসারে একে বলে De Moive's Formula। এই সূত্রটিকে আমরা একটু পরেই কাজে লাগাব, তবে তার আগে এককের ঘনমূল সম্বন্ধে কিছুটা ধারণা নেয়া যাক।

FOOD FOR THOUGHT

1. প্রমাণ করুন যে একক বৃত্তের (unit circle) ওপর অবস্থিত $z = \cos\phi + i \sin\phi$ বিন্দুটির জন্য $\frac{1}{z} = \cos\phi - i\sin\phi$ ।
2. প্রমাণ করুন যে একই কোণবিশিষ্ট দু'টি জটিল সংখ্যার ভাগফল একটি বাস্তব সংখ্যা।

   [Hint : ত্রিকোণোমিতিক সূত্রের সাহায্য নিয়ে একথা প্রমাণ করা যায়।]

এককের ঘনমূলসমূহ : অবিশ্বাস্য হলেও সত্য
(Roots of Unity : True, Though Incredible

যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা ধরা যাক 2-এর বর্গ কত? সহজ উত্তর : 4। কিন্তু 4কে বর্গ করলে তা কি আবারও 2 হবে? তার প্রশ্নই ওঠে না। কিন্তু 1 এর দুইটি ঘনমূল (cubic root) আছে যা এরূপ বিস্ময় কর আচরণ করে। তাদের একটিকে বর্গ করলে অপরটি পাওয়া যায়। তাকে বর্গ করলে আবার পাওয়া যায় আগেরটি। তাদেরকে যতবারই বর্গ করা হোক না কেন, তাদের দৌড় তাদের মধ্যেই সীমাবদ্ধ। ঠিক যেন একটা দুষ্টচক্রের মধ্যে তারা আবদ্ধ।

এককের এই মূলগুলির এই আচরণের কথা শুনে বৃত্তের কথা মনে প'ড়ে যায় না?

কিন্তু কেনই বা মূলগুলি এরূপ আচরণ করে? কেনই বা তার তিনটি ঘনমূল? এককের কি এর চেয়ে আরো বেশি মূল আছে? আমরা এখন এসব প্রশ্নের উত্তর জানার চেষ্টা করব।

আমরা একথা আগেই জেনেছি যে কোনো বাস্তব যোগবোধক সংখ্যার বর্গমূল (square root) দু'টি : একটি ধনাত্মক, একটি ঋণাত্মক। ফলে $\sqrt{1} = \pm 1$। কিন্তু $\sqrt[3]{1} = 1$, একথা সত্য; কারণ $1 \times 1 \times 1 = 1$। তবে 1 এর ঘনমূল (cubic root) কখনও -1 হতে পারে না, কারণ : $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$; $+1$ নয়। অর্থাৎ 1 এর আর কোনো ঘনমূল পাওয়া যাচ্ছে না—অন্তত বাস্তব সংখ্যার মধ্যে নয়। তাহলে জটিল সংখ্যার মধ্যেই অন্য মূলগুলিকে খুঁজতে হবে। ধরা যাক নির্ণেয় মূল $= x$। সুতরাং—

$$
\begin{aligned}
& x \times x \times x = 1 \\
\Rightarrow\quad & x^3 = 1 \\
\Rightarrow\quad & x^3 - 1 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x^3 - 1^3 = 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ বসালে}$$

$$x = 1$$

আবার :

$$x^2+x+1 = 0 \text{ বসালে :}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

সুতরাং 1 এর অন্য দু'টি মূল হলো :

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\text{এবং } \frac{-1-\sqrt{3}}{2}।$$

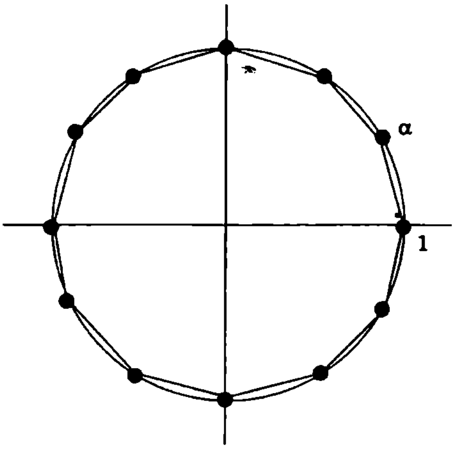
এই রাশি দু'টির বৈশিষ্ট্য এমন যে এদের একটিকে বর্গ করলে অন্যটি পাওয়া যায়। এদের একটিকে সচরাচর ω (ওমেগা) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, এবং অন্যটি যেহেতু প্রথমটির বর্গ, সেহেতু তাকে নির্দেশ করা হয় ω^2 দ্বারা। সুতরাং 1 এর তিনটি ঘনমূল হলো 1, ω, এবং ω^2—যেখানে শেষ দু'টির মান যথাক্রমে $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ $\left(\text{বা } \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ এবং $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ $\left(\text{বা} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$। এককের এই মূল তিনটির আরেকটি চমৎকার বৈশিষ্ট্য হলো এই যে এদের যোগফল হবে শূন্য (0)। শুধু তাই নয়, 1 এর কাল্পনিক ঘনমূল দু'টির গুণফল হবে 1।

FOOD FOR THOUGHT

1. এককের কাল্পনিক ঘনমূল দু'টির মান লিখুন এবং প্রমাণ করুন যে তাদের একটি অপরটির বর্গ।
2. প্রমাণ করুন যে এককের কাল্পনিক ঘনমূল দু'টির গুণফল = 1, অর্থাৎ $\omega \times \omega^2 = 1$।

** টীকা : যে-কোনো বাস্তব সংখ্যার তিনটি ঘনমূল হয়—একটি থাকে বাস্তব সংখ্যাভুবনের (real field) অন্তর্ভুক্ত এবং অপর দু'টি হয় কাল্পনিক সংখ্যা। এবং এই কাল্পনিক সংখ্যা দুটিকে আবার ω এবং ω^2 এর সাথে সম্পর্কযুক্ত করা যায়। অর্থাৎ, বাস্তব ঘনমূলটি r হলে কাল্পনিক ঘনমূল দু'টি হবে $r\omega$ এবং $r\omega^2$। যে-কোনো একটি সংখ্যা নিয়ে একথা উপরের কায়দায় নিচে যাচাই ক'রে দেখুন।*

এবার এককের বিভিন্ন মূলের আসল রহস্য আরো বোধগম্য ব্যাখ্যার মাধ্যমে খোঁজ করা যাক। এ কাজে আমরা পূর্বোক্ত De Moivre এর সূত্রটিকে ব্যবহার করব। নিচের চিত্রে দেখা যাচ্ছে একটি সুষম বহুভুজ (regular polygon or n-gon যার প্রতিটি বাহু সমান)—এক্ষেত্রে $n = 12$। এটি একটি unit circle-এর মধ্যে অন্তর্লিখিত (inscribed)। এর কর্ণ 12টি। একটি কর্ণের দূরত্ব মূলবিন্দু থেকে 1 একক, যা x অক্ষের ওপর অবস্থিত। De Moivre-এর সূত্রে আমরা আমরা দেখেছি যে, কোনো জটিল সংখ্যা যদি একটি unit circle-এ অবস্থিত হয়, তাহলে তার P এর মান হবে 1,



চিত্র : এককের 12টি 12-তম মূল

এবং ফলে যতবার তার বর্গ করা হোক না কেন, তার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে না (বৃত্তের মধ্যে ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে কিভাবে?); ফলে তা শুধু ঘুরবে। *আসলে সূত্রটিতে কেবল কোণের মান ছাড়া দৈর্ঘ্যের কোনো মানও নেই।* ফলে এর একটি vertex = 1 যদি x-অক্ষের ওপর অবস্থিত হয়, তাহলে পরবর্তীটি x-অক্ষ থেকে $\frac{360°}{12}$ দূরে থাকবে, তার

পরেরটি থাকবে x-অক্ষ থেকে $\frac{30^\circ}{24}$ দূরে ইত্যাদি; কারণ বৃত্তের কেন্দ্রের চারপাশের মোট কৌণিক পরিমাণ 360°, যা এক্ষেত্রে সমান 12 ভাগে বিভক্ত হয়ে যাবে। অন্য কথায়, প্রথম শীর্ষটি (vertex) 1 হলে পরবর্তীটি, অর্থাৎ α, হবে :

$$\alpha = \cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}$$

তাহলে পরবর্তীটি হবে $\alpha.\alpha = \alpha^2$, তার পরবর্তীটি হবে α^3, ইত্যাদি। এভাবে α^{12} (n-ভুজের ক্ষেত্রে α^n) পর্যন্ত vertex পাওয়া যাবে। ফলে :

$$\alpha^{12} = 1,$$

বা সাধারণভাবে $\alpha^n = 1,$

যা এই সূত্রটি থেকেও পাওয়া যায় :

$$\left[\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right]^n = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1 + 0.i = 1\text{ ।}$$

এ থেকে বুঝা যায় যে ২য় ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে $\acute{\alpha} = \alpha$ হলো $x^n = 1$ এর একটি মূল (root)। একই কথা $\alpha^2 = \cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right) + i\sin\left(\frac{720^\circ}{n}\right)$ এর ক্ষেত্রেও সত্য।

এভাবে :

$$(\alpha^2)^n = \alpha^{2n} = (\alpha^n)^2 = (1)^2 = 1,$$

কিংবা De Moivre এর সূত্র থেকে :

$$(\alpha^2)^n = \cos\left(n\frac{720^\circ}{n}\right) + i\sin\left(n\frac{720^\circ}{n}\right)$$

$$= \cos 720^\circ + i\sin 720^\circ = 1 + 0.i = 1$$

অর্থাৎ n-এর প্রতিটি মানের জন্যই একথা সত্য। তাহলে $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}$ এগুলি হলো 1-এর n-তম মূলসমূহ।

FOOD FOR THOUGHT

1. $\alpha^{12} = 1$ এর জন্য ত্রিকোণোমিতিক সূত্র এবং মান ব্যবহার ক'রে α এর সবগুলি মান বের করুন।
2. গাণিতিক পদ্ধতি ছাড়াই ব্যাখ্যা দিন কেন $\omega = \omega^2$।

এখানে $n = 3$ বসিয়ে এককের ঘনমূল তিনটি বের করা যায়। কিন্তু এই বইতে এর মান $x^3 - 1 = 0$* সমীকরণটি ব্যবহার ক'রেই বের করা হয়েছে ব'লে এখানে তা আর দ্বিতীয়বার করা হবে না। এটি শিক্ষার্থীদের জন্য অনুশীলনী হিসেবে রেখে দেয়া হলো।

টীকা : জটিল সংখ্যার ফিল্ডে (complex field) 1-এর n-তম মূল nটি।

Unit circle থেকে আরেকটি জিনিস বুঝতে পারা যায় : তার মধ্যে অংকিত (inscribed) বহুভুজটির শীর্ষবিন্দু (vertex) যদি হয় জোড় সংখ্যা, তাহলে দু'টি শীর্ষবিন্দু x-অক্ষের ওপর পড়বে। ফলে উক্ত শীর্ষবিন্দু দু'টির মান হবে 1 এবং -1। অন্য কথায়, $\alpha^n = 1$-এ $n = m \times 2$ হলে, অর্থাৎ n একটি জোড় সংখ্যা হলে; 1 এর দু'টি বাস্তব মূল হবে $+1$ এবং -1। কিন্তু $n \neq m \times 2$ হলে, একটি শীর্ষবিন্দুকে n-অক্ষের ওপর তার যোগবোধক দিকে ফেললেও অন্য কোনোটি তার বিয়োগবোধক অংশের ওপর পড়বে না। ফলে সে-সব ক্ষেত্রে 1-এর বাস্তব মূল হবে মাত্র একটি, 1।

* এই আকারের রাশির সাধারণ বিস্তৃতি এরূপ : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)$, বা cyclotomic (circle dividing, বৃত্ত বিভক্তকারী) equation নামে পরিচিত। $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$-এই সমীকরণগুলি দেখেও উক্ত সাধারণ রূপটিকে অনুমান করা যায়।

অধ্যায় : ৩

বীজগণিতের দ্বিঘাত জগৎ
(The Quadratic World of Algebra)

অধ্যায়টি নিম্নলিখিত চারটি পর্বে (part) বিভক্ত। শেষের পর্ব তিনটির যে-কোনোটি পড়ার আগে প্রথম পর্বটি অবশ্যপাঠ্য। শ্রেণীকক্ষে প্রথম পর্বটি যদি সময়ের অভাবে বা অন্য কোনো কারণে সংশ্লিষ্ট শিক্ষক/শিক্ষিকা আলোচনা না-ও করেন, তবুও শিক্ষার্থীদের উচিত হবে তা অত্যন্ত ভালোভাবে অধ্যয়ন করা। মূলত পরবর্তী অধ্যায় তিনটি সহ মৌলিক বীজগণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশকে পরিপূর্ণ বুৎপত্তিসহ আয়ত্ত করার জন্য, এবং বিশেষত পদার্থবিদ্যার অনেক মৌলিক তত্ত্বের রহস্য দক্ষতার সাথে অনুধাবন করার জন্য, এই পর্বটি পড়া উচিত।

পর্ব-১ : দ্বিঘাত রাশি, ফাংশন এবং সমীকরণের চরিত্র।

(Part–1 : The Nature of Quadratic Expressions, Functions and Equations)

পর্ব –২ : দ্বিঘাত সমীকরণ

(Part–2 : Quadratic Equations)

পর্ব–৩ : দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ

Part–3 : Simultaneous Quadratic Equations)

পর্ব–৪ : দ্বিঘাত রাশির তত্ত্ব

(Part–4 : Theory of Quadratic Expressions)

পর্ব : ১

দ্বিঘাত রাশি, ফাংশন, এবং সমীকরণের চরিত্র (The Nature of Quadratic Polynomials, Functions and Equations.)

দ্বিঘাত রাশির গুরুত্ব

(The Importance of Quadratic Expressions)

দ্বিঘাত রাশি কাকে বলে, সরল (linear) রাশির সাথে এর পার্থক্য কী- ইত্যাদি প্রশ্নের জবাব জানার আগেই দ্বিঘাত রাশির গুরুত্ব সম্পর্কে দু-একটি কথা ব'লে নেয়া যেতে পারে। তাতে এই রাশির ভেতরকার রহস্য জানার ব্যাপারে আগ্রহ বেশি জন্মাবে। এবং পরে এই রাশি সম্বন্ধে বিস্তারিত জ্ঞান আহরণ করা হয়ে গেলে এই কথাগুলি আরো বেশি অর্থপূর্ণ ব'লে মনে হবে।

দ্বিঘাত রাশি বীজগণিতে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ স্থান দখল ক'রে আছে। মূলত গাণিতিক রাশিমালার সরলতম রাশির ঠিক উপরেই এর অবস্থান। তবুও গণিত তথা বাস্তবতার বিভিন্ন জটিল রূপকে সূত্রবদ্ধ ক'রে প্রকাশ করার ক্ষমতা এই দ্বিঘাত রাশির রয়েছে। সরল রাশির গতিপ্রকৃতি যেখানে পুরোপুরি সরল-রৈখিক, সেখানে দ্বিঘাত রাশির গতি-প্রকৃতি সম্পূর্ণ বক্র-রৈখিক (curvilinear)। বাস্তবতা—হোক তা পদার্থবিদ্যার 'নির্জীব' জগৎ কিংবা জীব জগত বা ব্যবসা-বাণিজ্য, সমাজ, অর্থনীতি ইত্যাদির জটিল (complex) গতিশীল এবং নিয়ত-পরিবর্তনশীল ভুবনই হোক—কখনও সরলরৈখিক নয়। তা সর্বদাই বক্র। কখনো এই বক্রতার মাত্রা খুব বেশি, কখনো কিছুটা কম—অন্তত কোনো ঘটনাকে অন্যান্য পারিপার্শ্বিকতা থেকে বিচ্ছিন্নভাবে দেখলে। কিন্তু একটি চমৎকার একটি বিষয় হলো এই যে, এই সব জটিল বাস্তবতার অনেক কিছুকেই দ্বিঘাত রাশির দ্বারা উপস্থাপন এবং বিশ্লেষণ করা যায়। একটু উদ্ধতভাবে একই কথা ঘুরিয়ে বলা যায়, বাস্তবতার অনেক খণ্ড খণ্ড অংশই বিভিন্ন দ্বিঘাত রাশির গতিবিধি 'মেনে চলে'। উদাহরণ স্বরূপ : ধ্রুপদী (classical) পদার্থবিদ্যার অনেক সূত্রই দ্বিঘাত সমীকরণ। নিউটনের বিখ্যাত মহাকর্ষ সূত্র, গতির সূত্র, এমনকি আধুনিক বিজ্ঞানের সবচেয়ে মৌলিক

এবং সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রটি—আইনিস্টাইনের সেই বিখ্যাত $E = mc^2$, ইত্যাদি হলো বিভিন্ন ধরনের দ্বিঘাত সমীকরণ। প্রকৃতপক্ষে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখা থেকে অনেক সূত্রই টেনে এনে দেখানো যায় যে সেগুলি দ্বিঘাত সমীকরণ।

বিশুদ্ধ গণিতের (Pure Mathematics) সার্থকতা যে বস্তুজগতের বাস্তবতাকে উপস্থাপন এবং বিশ্লেষণ করার মধ্যে নিহিত, তেমনটি পুরোপুরি নয়। গণিতের নিজস্ব বাস্তবতা রয়েছে। গণিত তার নিজস্ব ভাষা দিয়ে নিজেকে প্রকাশ করে, নিজের পদ্ধতি দিয়ে নিজেকে প্রমাণ করে, বিকশিত করে। এবং সেক্ষেত্রেও দ্বিঘাত রাশি এবং তার সমীকরণ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এক স্থান দখল ক'রে আছে। এই দ্বিঘাত রাশির ব্যাপারে গণিতবিদদের প্রচণ্ড আগ্রহই তাঁদেরকে complex number-এর মতো অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এবং রহস্যময় সংখ্যার উদ্ভাবনে উদ্বুদ্ধ করেছিল। মূলত দৈনন্দিন জীবনে যেসব জ্ঞান আহরণ ক'রে থাকি, তার প্রায় সব কিছুই দ্বিঘাত সমীকরণের দ্বারা ব্যাখ্যাত এবং বিশ্লেষিত।

দ্বিঘাত রাশি কী?

(What Is a Quadratic Expression?)

দ্বিঘাত রাশি হলো $ax^2 + bx + c$ আকারের যে-কোনো রাশি, যেখানে x হলো চলক (variable) যা হতে পারে যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা (real number), a এবং b হলো বাস্তব সংখ্যা যেগুলি যথাক্রমে x^2 এবং x-এর সহগ, এবং c হলো একটি ধ্রুব সংখ্যা (constant)। a এবং b- এর মান 1 হলে রাশিটি দাঁড়ায় এরূপ :

$$x^2 + x + c$$

এবং b ও c এর মান শূন্য হলে,

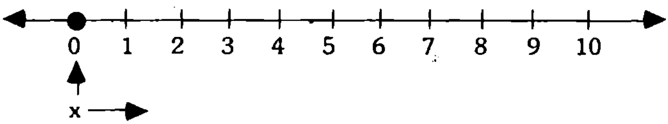
$$ax^2 ।$$

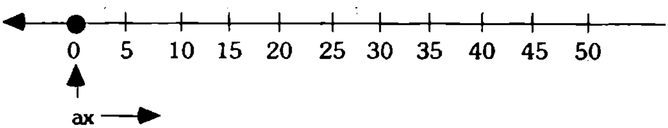
আবার $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ হলে, রাশিটি হয়ে যায় x^2। সুতরাং দ্বিঘাত রাশি মূলত এমন কোনো সংখ্যা যা কমপক্ষে অন্য কোনো রাশির বর্গ (square)। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা বর্গের ধারণার সাথে কিছুটা পরিচিতি হয়েছি। কিন্তু শুধু 'স্থির' অর্থে কোনো সংখ্যার বর্গ বললে দ্বিঘাত রাশির ব্যাপারে গুরুত্বপূর্ণ কোনো কথা বলা হয়ে যায় না। দ্বিঘাত রাশির চরিত্র জানতে হলে প্রথমে জানতে হবে কোনো চলকের (variable, যেমন

এখানে x প্রতীক দ্বারা একটি চলক বুঝানো হচ্ছে যা যে-কোনো বাস্তব বা কাল্পনিক মান গ্রহণ করতে পারে) বিভিন্ন মানের জন্য তার বর্গের বিভিন্ন মান কেমন হয়, এবং উক্ত দুই জাতীয় মানের গতিবিধির মধ্যে কেমন সম্পর্ক থাকে। অত্যন্ত একটি সহজ উদাহরণের মাধ্যমে ব্যাপারটি দেখা যাক। ধরা যাক x একটি চলক যা 0 থেকে 10 পর্যন্ত যে-কোনো মান গ্রহণ করতে পারে। এখন a একটি স্থির সংখ্যা (constant), যেমন 5, হলে ax-এর মান x-এর বিভিন্ন মানের সাথে কী সম্পর্ক রেখে চলবে তা দেখা যাক :

x	ax (a = 5)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45
10	50

দেখা যাচ্ছে যে x-এর মান 1 বৃদ্ধি পেলে ax -এর মান 5 বৃদ্ধি পাচ্ছে। এর কারণ হলো এই যে x-এর সহগ a-এর মান 5। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে বর্ণিত সংখ্যা-রেখার (number line) মাধ্যমে x এবং ax-এর গতি-প্রকৃতি দেখা যাক।

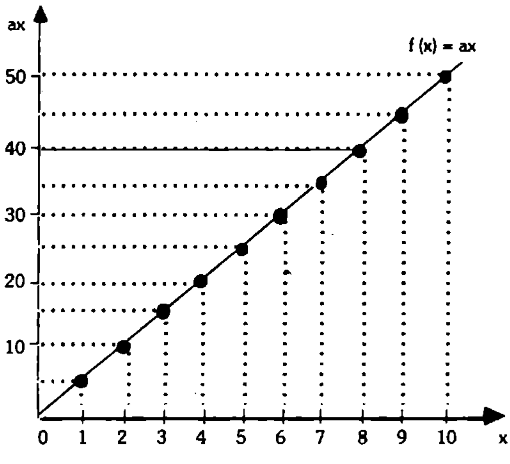




দেখা যাচ্ছে যে x এর গতিবিধি যেমন, ax এর গতিবিধি ঠিক তেমনই :

x প্রতি ক্ষেত্রে 1 ক'রে বৃদ্ধি পাচ্ছে;
ax প্রতি ক্ষেত্রে 5 ক'রে বৃদ্ধি পাচ্ছে।

অন্য কথায়, x-এর যে-কোনো দু'টি ক্রমিক মানের মধ্যে ব্যবধান সবক্ষেত্রেই 1; তা কখনো কম বা কখনো বেশি নয়। একই ভাবে, ax-এর যে-কোনো দু'টি ক্রমিক মানের মধ্যে ব্যবধান সবক্ষেত্রে 5, তা কখনো কম বা কখনো বেশি নয়। সংখ্যা রেখায় ax-এর মানগুলিকে যদি x এর মানের একই স্কেলে দেখানো হত্রো, তাহলে দেখা যেত যে সেখানে ax-এর প্রতি দু'টি ক্রমিক মানের মধ্যে দূরত্ব x-এর বেলায় যা তার 5 গুণ বেশি, *তবে সে দূরত্ব সবক্ষেত্রে সমান*। অর্থাৎ ax-এর উক্ত দূরত্বগুলির প্রত্যেকটি থেকে যদি 4 একক কেটে ফেলে বাকিটুকু জোড়া দেয়া হয়, তাহলে রেখাটি x-এর রেখার মতো হয়ে যায়। এ থেকে বুঝা যাচ্ছে যে x এবং ax উভয় রাশিই সরলরেখায় চলমান। পরস্পর লম্ব দু'টি অক্ষের একটিতে x-এর মান এবং অপরটিতে ax-এর মান (সংখ্যা-রেখাতে যেভাবে বসানো হয়েছিল সেভাবে) বসিয়ে এবং x ও ax-এর অনুরূপ (corresponding) মান নির্দেশক বিন্দু দু'টি থেকে লম্ব এঁকে তাদের ছেদবিন্দু বের ক'রে এভাবে প্রাপ্ত সবগুলি ছেদবিন্দুর (যেগুলি আসলে co-ordinate—জ্যামিতিতে পাঠ্য) একটি রেখা দ্বারা যোগ করলে দেখা যাবে যে বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ (locus) একটি সরলরেখা। এই সরলরেখাই হলো x ও ax-এর পারস্পরিক গতিবিধির সম্পর্ক (ফাংশন, function)* ।

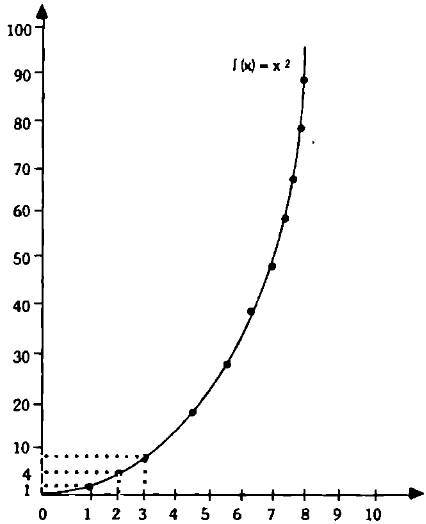


* Function হলো একটি রাশির সাথে তার variable-এর সম্পর্ক, অর্থাৎ variable-মান 1, 2, 3, 4 . . . ইত্যাদি হলে রাশিটির মান কিভাবে পরিবর্তিত হবে, তা। ফাংশনকে f দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। 'x এর ফাংশন' কথাটিকে প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয় f(x) দ্বারা এবং পড়া হয় f of x। এই বইয়ের সংশ্লিষ্ট অধ্যায় দ্রঃ।

কিন্তু x-এর সাথে x.x বা x^2-এর গতির সম্পর্ক কি এরূপ কোনো সরল রেখা হবে? দেখা যাক।

x	x^2	x^2এর বৃদ্ধি
0	0	—
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19

দেখা যাচ্ছে যে x- এর মান প্রতি ক্ষেত্রে 1 বৃদ্ধি পেলেও x^2-এর মান সব ক্ষেত্রে সমান হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে না। x^2-এর বৃদ্ধির ধারাটি এরূপ 1, 3, 5, 7, 9 . . . . . । (অবশ্য এই *বৃদ্ধির ধারাটি* কিন্তু স্থির হারে এগুচ্ছে 3 — 1 = 2, 5 — 3 = 2, 7 — 5 = 2 . . . . 19 — 17 = 2)। x^2-এর এই বৃদ্ধির প্রকৃতিকে যদি x -এর বৃদ্ধির প্রকৃতির সাথে মিলিয়ে দেখা হয় তাহলে আমরা নিচের মতো একটি চিত্র পাব।



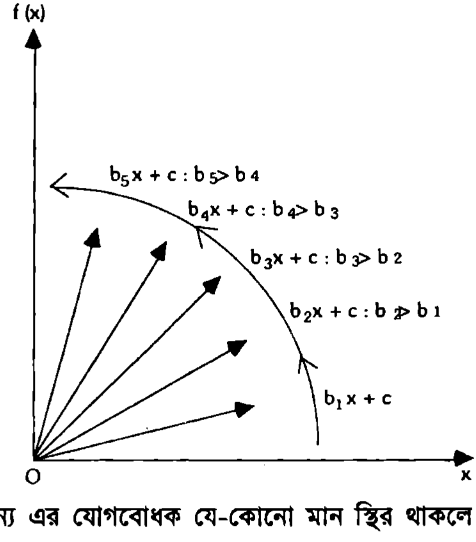
চিত্র থেকে একথা স্পষ্ট যে x-এর সাপেক্ষে x^2-এর চলমান সম্পর্ক (অর্থাৎ function) সরলরৈখিক নয়।

এবার x^2-এর সাথে (x-এর প্রতিটি মানের জন্য) যদি চলক x কে প্রতি ক্ষেত্রে যোগ করা হয়, তাহলে প্রাপ্ত $x^2 + x$-এর সাথেও x- এর সম্পর্ক হবে এরূপ বক্ররৈখিক, তবে সেক্ষেত্রে তা আরো দ্রুত বেঁকে যাবে, অর্থাৎ বক্রতার হার আরো বৃদ্ধি পাবে। এভাবে $ax^2 + bx + c$ আকারের যে- কোনো রাশির জন্য একটি বক্ররেখা বা curve পাওয়া যাবে। a এবং b-এর মানকে পাল্টে দিলেও মূল curve-এর চরিত্র বদলাবে না, অর্থাৎ তার আকৃতি যাই হোক, তা curve-ই থাকবে।

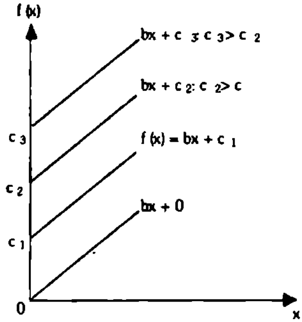
দ্বিঘাত ফাংশনের curve কী-হারে ক্রমে ক্রমে অগ্রসর থাকবে তা উক্ত ফাংশনের মান থেকেও বুঝতে পারা যায়। আগেই বলা হয়েছে যে $ax^2 + bx + c$-এর a, b, বা c যে-কোনোটির মান শূন্য হতে পারে। $a = 0$ হলে রাশিটি হয়ে যায় :

$$bx + c$$

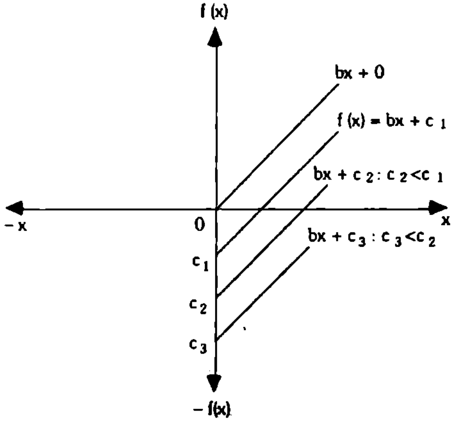
যা একটি সরলরৈখিক রাশি। এখানে $c = 0$ হলে এ থেকে প্রাপ্ত সরলরেখাটি মূল-বিন্দু (origin) থেকে শুরু হবে, কারণ তখন $x = 0$ হলে $bx = 0$। b-এর মান ক্রমে ক্রমে খুব কম থেকে বেশি হতে থাকলে পূর্বোক্ত নিয়মে নির্মিত রেখাটি x-অক্ষের দিক থেকে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে f(x) অক্ষের দিকে যেতে থাকবে। নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য।



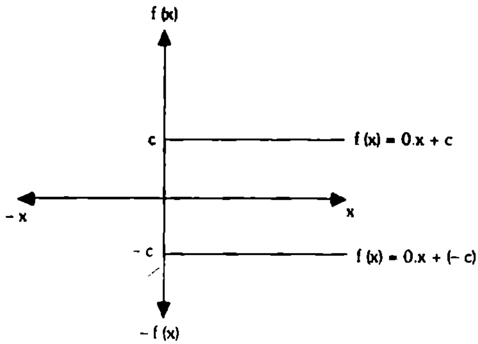
কিন্তু b-এর জন্য এর যোগবোধক যে-কোনো মান স্থির থাকলে এবং $c > 0$ হলে রেখাটি মূলবিন্দু থেকে শুরু হবে না, কারণ তখন $x = 0$-এর জন্য $bx + c = 0$ নয় ; সেক্ষেত্রে $bx = 0$ হয়ে গেলেও c-এর একটি ধনাত্মক মান রয়ে যাব। তখন রেখাটির চারিত্রিক কোনো পরিবর্তন হবে না; তা শুধু f(x) অক্ষে উপরের দিকে c পরিমাণ উঠবে :



আবার $c < 0$ হলেও রেখাটির *চরিত্র* আগের মতই থাকবে, তবে তা $f(x)$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে নেমে যাবে, মূলবিন্দু থেকে শুরু হবে না :



অবশ্য $b = 0$ হলে রেখাটির কোনো ক্রমোন্নতি (বা ক্রমাবনতি, *slope*) বা *ঢাল* থাকবে না, যেহেতু তখন অবশিষ্ট থাকবে একটি স্থির সংখ্যা c যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। ফলে রেখাটি হবে x অক্ষের সমান্তরাল :



অর্থাৎ *এক্ষেত্রে* x-এর মান যা-ই হোক না কেন, $bx + c$-এর মান সর্বদাই c হবে, যেহেতু $bx = 0$, হলে $x = 0$।

এবার তাহলে $ax^2 + bx + c$ এর প্রসঙ্গে ফিরে যাওয়া যাক। এখানে $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ হলে রাশিটি আর দ্বিঘাত থাকে না, হয়ে যায় এক-ঘাত (of the first degree), অর্থাৎ, একটি সরলরেখা প্রকাশক রাশি, যার কয়েকটি দিক আমরা একটু আগে দেখেছি। আবার এখানে $b = 0$, $c = 0$, $a = 1$ হলে তা হয়ে যায় একটি *বিশুদ্ধ বর্গ সংখ্যা*। এও আমরা আগে দেখেছি। একই রাশিতে $c = 0$ হলে তা মূলবিন্দু থেকে শুরু হবে। কিন্তু $c \neq 0$ হলে তা শুরু হবে $f(x)$ অক্ষের যোগবোধক বা বিয়োগবোধক দিক থেকে। কিন্তু *c-এর মান যতই কমানো বা বাড়ানো হোক না কেন, তার জন্য curve- এর স্বভাবের কোনো পরিবর্তন হবে না, শুধু তার উৎস বদলাবে।* পরবর্তীতে এই জ্ঞানটুকু আমাদের অনেক কাজে লাগবে।

দ্বিঘাত ফাংশন

(Quadratic Functions)

আমরা ইতোমধ্যেই কিছুটা আভাষ দিয়েছি যে দ্বিঘাত ফাংশন হলো কোনো চলকের (variable) সাথে তার দ্বিঘাত বহুপদীর (polynomial-এর) সম্পর্ক। অর্থাৎ x-এর মান বিশেষ গতিতে চললে $ax^2 + bx + c$-এর মান যে গতিতে চলে তাকে বলে x-এর দ্বিঘাত ফাংশন। তাহলে $ax^2 + bx + c$-এর যতগুলি মান পাওয়া যায় (xএর বিভিন্ন মানের জন্য), তাদের সবগুলিকে $f(x)$ প্রতীকটি দ্বারা বুঝালে লেখা যায় যে $f(x) = ax^2 + bx + c$। এখানে এই f- ই হলো ফাংশন-প্রকাশক প্রতীক, যাকে, আমরা আগেই দেখেছি, পড়া হয় f of x বা x- এর ফাংশন।

পর্ব : ২

দ্বিঘাত সমীকরণ কী ?

(What is a Quadratic Equation?)

উত্তরটি, প্রথমত অনেকেরই মনে হবে, খুবই সহজ। হয়তো সহজ, তবে ঠিক সেই অর্থে নয় যে-অর্থে অনেকেই কথাটিকে বলে থাকে। এই প্রশ্নের উত্তর জানা মানে এই প্রশ্নগুলির উত্তর স্পষ্টভাবে বুঝা :

সমীকরণের 'সমাধান' কাকে বলে?

কোনো সমীকরণের সমাধান বের করতে হলে তার ডান পার্শ্বের মান শূন্যতে রূপান্তরিত করার দরকার হয় কেন?

সমাধানের প্রক্রিয়াটিকে ' চোখে দেখার' উপায় কী? অর্থাৎ তাকে চিত্রের মাধ্যমে কিভাবে দেখানো যায়?

এই প্রশ্নগুলির সুস্পষ্ট উত্তর আমরা দেখব।

সমীকরণ (equation) হলো দু'টি রাশির (expression) সমতা। একটি সহজ উদাহরণের মাধ্যমে দেখা যাক : একটি আয়তক্ষেত্রের (paralellogram) প্রস্থ যত, তার দৈঘ্য তার চেয়ে 4 একক বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 165 বর্গ একক হলে তার দৈর্ঘ্য (length) এবং প্রস্থ (width) নির্ণয় করুন।

মাধ্যমিক গণিতের সাহায্যেই প্রশ্নটির সমাধান করা যায়। ধরা যাক প্রস্থ = x একক; তাহলে দৈর্ঘ্য = x + 4 একক। ফলে ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $(x + 4)\,x = x^2 + 4x$ বর্গ একক। অর্থাৎ পাওয়া গেল একটি দ্বিঘাত রাশি (quadratic polynomial) যার আদর্শ গঠন হলো $ax^2 + bx + c$: এখানে $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$।

কিন্তু প্রশ্নে বলা আছে যে ক্ষেত্রটির পরিমাপ হলো 165 বর্গ একক। সুতরাং চলকের (variable) সাহায্যে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফল (অর্থাৎ $x^2 + 4x$) এবং প্রদত্ত ক্ষেত্রফল একই জিনিস। অর্থাৎ :

$$x^2 + 4x = 165$$

একেই বলে সমীকরণ। কিন্তু একে আদর্শ রূপে প্রকাশ করতে হলে 165 কে বাম পার্শ্বে (left side) নিয়ে আসতে হবে : $x^2 + 4x - 165 = 0$। এখন সমীকরণটি $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের, যেখানে $a = 1$, $b = 4$, $c = -165$। যেহেতু সমীকরণটিতে সর্বোচ্চ ঘাতের রাশি হলো একটি দ্বিঘাত রাশি, সেহেতু একে বলে দ্বিঘাত সমীকরণ বা quadratic equation। এই $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের সমীকরণের $b = 0$ হলে থাকে $ax^2 + c = 0$, যাকে বলে বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ বা **pure quadratic equation**। x^2-এর সহগ $a = 1$ হলে পাওয়া যায় $x^2 + bx + c = 0$, যা **reduced quadratic equation** নামে পরিচিত। এছাড়া $ax^2 + bx + c = 0$ রূপটিকে বলে **general quadratic equation** বা **affected quadratic**।

এখন স্বভাবতই প্রশ্ন জাগে : *সমীকরণের ডানে শূন্য কেন দরকার?* এই প্রশ্নের উত্তর জানতে পারলেই আমরা গাণিতিক ভাষায় বুঝতে পারব সমাধান কাকে বলে। নিঃসন্দেহে সাধারণ কথায় গণিতের কোনো বিষয়কে বোঝা আর গণিতের নিজস্ব ভাষায় তা বোঝা এক কথা নয়।

পূর্বোক্ত ক্ষেত্রফলের প্রসঙ্গ নিয়েই এগুনো থাক। ক্ষেত্রফল হলো $x^2 + 4x$ বা 165। কিন্তু x-এর বিভিন্ন মানের সাথে x-এর এই ফাংশানের (অর্থাৎ $x^2 + 4x$-এর) মান কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা দেখা যাক :

	x	$f(x) = x^2 + 4x$	
	1	5	
	2	12	
	3	15	
	4	32	
	5	45	
	6	60	
	7	77	
	8	96	
	9	117	
	10	140	
$\Rightarrow$	11	165	$\Leftarrow$
	12	192	
	$\downarrow$	$\downarrow$	

আমরা x-এর **উদ্দিষ্ট মানটি** জানতাম না, শুধু জানতাম f (x)-এর নির্ধারিত মানটি। কিন্তু x-এর সাথে f(x) এর গতিবিধি লক্ষ্য করতে গিয়ে দেখলাম যে f (x)-এর মান 165 হয় তখন যখন x-এর মান হয় 11। সুতরাং **সমীকরণটির** 'সমাধান' হলো $x = 11$, এবং প্রশ্নটির (problem) সমাধান হলো : দৈর্ঘ্য = 15 একক (11 + 4), প্রস্থ = 11 একক। অবশ্য আমাদের আগ্রহের বিষয় হলো সমীকরণটির সমাধান, প্রশ্নটির নয়।

তাহলে সমাধানের সংজ্ঞা দেয়া যায় কিভাবে? আমরা এই মুহূর্তে বলতে পারি যে, কোনো **সমীকরণের** ('রাশি'র নয়) চলকের যে-মানের জন্য তার উভয় পার্শ্বের (left and right sides) সমতা রক্ষিত হয় তাকে বলে উক্ত সমীকরণের 'সমাধান'।

যেমন, পূর্বোক্ত উদাহরণের -

$$\begin{aligned} \text{বাম পক্ষ} &= x^2 + 4x \\ &= (11)^2 + 4\,(11) \\ &= 121 + 44 \\ &= 165 \end{aligned}$$

এবং ডানপক্ষ = 165

অর্থাৎ $x = 11$ হলে সমীকরণটির উভয় পার্শ্বের মান দুটির মধ্যে '=' চিহ্নটি বসানো যায়। উভয় পার্শ্বের মান সমান ব'লেই

$$\text{বামপার্শ্ব} — \text{ডানপার্শ্ব} = 0$$

$$\text{OR} \quad 165 — 165 = 0$$

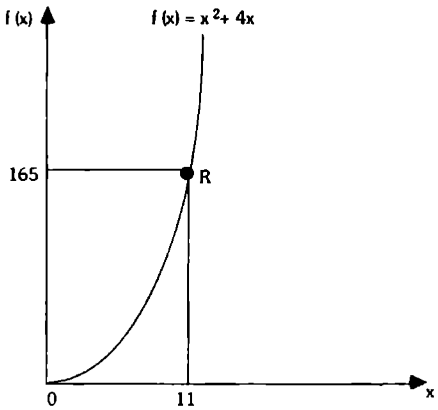
$$\text{OR} \quad x^2 + 4x — 165 = 0$$

কিন্তু ডানপার্শ্বে *কেন* শূন্য আনা হলো? সমীকরণটিকে এভাবে না লিখেইতো আমরা তার সমাধান বের করেছি। তাহলে এই form কেন দরকার?

এই জিনিসটিই আমরা একটু পরে দেখব। আসলে এই ব্যাপারটি বুঝতে পারা মানে সমীকরণ সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা লাভ করতে সমর্থ হওয়া। এর জন্য আমাদেরকে চিত্রের সাহায্য নিতে হবে। শুধু উপরোক্ত সমীকরণের আলোকে ব্যাপারটিকে বুঝতে চাইলে তা হবে মুখস্থ করার নামান্তর।

পূর্বোক্ত ক্ষেত্রফলের প্রসঙ্গে আবারো ফিরে যাওয়া যাক। $x^2 + 4x$ দ্বারা আসলে কী বুঝাচ্ছে? এ দ্বারা বুঝাচ্ছে 'দৈর্ঘ্য = প্রস্থ + 4' এই সম্পর্ক যে-সব আয়তক্ষেত্রের বেলায় সত্য, তাদের সবগুলির ক্ষেত্রফলের ধারা (series) (নিঃসন্দেহে এরূপ আয়তক্ষেত্রের সংখ্যা অসীম)। ফলে যে-ক্ষেত্রের প্রস্থ = 11 তার ক্ষেত্রফলও যেমন এই রাশিটির দ্বারা

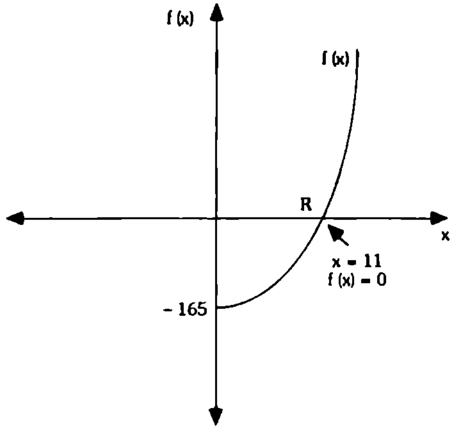
নির্ণয়যোগ্য, তেমনি যে-ক্ষেত্রের প্রস্থ = 7, 8, 9, 100, 1,00,000 . . . বা যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা, তার ক্ষেত্রফলও উক্ত রাশি দ্বারা নির্ণয়যোগ্য—যদি, অবশ্য, এরূপ ক্ষেত্রে ' দৈর্ঘ্য = প্রস্থ + 4' সম্পর্কটি প্রযোজ্য হয়। ফলে, দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থকে যদি শুধু পূর্ণ সংখ্যায় পরিমাপ করা হয়, তাহলে 1, 2, 3, 4 . . . ইত্যাদি একক দৈর্ঘ্যের জন্য 5, 12, 15, 32 . . . ইত্যাদি ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে। এটি একটি ধারা। এই ধারাটিকে চিত্রের মাধ্যমে দেখা যাক।



Curve টি শূন্য বিন্দু থেকে শুরু হবে, কারণ $x = 0$ হলে $x^2 + 4x = 0$। কিন্তু এটি হলো একটি ফাংশান; এ কোনো সমীকরণকে নির্দেশ করছে না। অবশ্য এই curve-এ f(x) অক্ষে 165 এর বিপরীতে x অক্ষে যে-মান পাওয়া যাবে, তাই-ই সমীকরণটির 'সমাধান'। কিন্তু সমাধানের জন্য আমাদের দরকার সাধারণীকৃত (generalized) একটি formula, যার জন্য দরকার সমীকরণের। তবে $x^2 + 4x = 165$ জাতীয় সমীকরণে সাধারণ কাজ চলবে না, কারণ একই ফাংশান থেকে প্রাপ্ত সমীকরণের ডানপার্শ্বেও একেক সময়ে একেক সংখ্যা থাকতে পারে। যেমন, আমরা এমনও চাইতে পারি যে, x-এর কোন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 4x$-এর মান 45 হবে। সেক্ষেত্রেও আমরা অবশ্য চিত্রের সাহায্য নিতে পারি—ঠিক পূর্বোক্ত কায়দায়।

কিন্তু এই সমস্যা এড়ানো যায় সব ক্ষেত্রে $f(x) = 0$ ক'রে দিয়ে। ফলে একটি আদর্শ সমীকরণের ডানে শূন্য থাকে। কিন্তু এই পর্যায়ে অনেকেই ব্যাপারটিকে 'অনুভব' করতে পারে না। তাদের মনে প্রশ্ন জাগে : পুরো রাশিটিকে শূন্য বানিয়ে দিলে বাকি থাকলো কী? এই প্রশ্নের জবাব পাবার জন্য আমরা আবার পূর্বোক্ত চিত্রে ফিরে যাই। চিত্রে curve-এর R বিন্দুটি দ্বারা সমাধান-বিন্দুকে চিহ্নিত করা হয়েছে। এ R বিন্দুতেই f(x) =

165 এবং $x = 11$। কিন্তু *ধরা যাক curve টিকে মূলবিন্দুতে ধ'রে টেনে নামানো হচ্ছে, এমনভাবে যেন তার 0 প্রান্তটি সর্বদা f(x) অক্ষকে ছুঁয়ে থাকে। এভাবে নামাতে নামাতে যখন R বিন্দুটি ঠিক x অক্ষকে ছেদ করবে, তখন থেমে যাওয়া যাক* (নিচের চিত্র দ্র:):



এখন R বিন্দুতে $f(x) = 0$। তবে তার মানে এই নয় যে $x = 0$। আসলে curveটিকে নিচের দিকে টেনে নেয়াতে মূল ফাংশানের x বা x^2 বা x-এর কোনো সহগের মানের কোনো পরিবর্তন হয়নি, যা হয়েছে তা হলো f(x) থেকে এমন একটি সংখ্যা বাদ গেছে যা f(x)-এর মানের সমান। ফলে R বিন্দুতে $x^2 + 4x$—'ঐ সংখ্যা' = 0। অর্থাৎ $x^2 + 4x - 165 = 0$। এবার কিন্তু curve টির শুরু বিন্দু হলো f(x) অক্ষের (—) 165।

তাহলে বুঝা গেল যে, *কোনো সমীকরণের ডানে শূন্য আনা মানে হলো তার ফাংশনের curveটিকে এমনভাবে উপরে উঠানো বা নিচে নামানো যেন তার ' 'সমাধান-বিন্দুটি' থাকে x অক্ষের ওপর*। ফলে ডাইনে শূন্য-সম্পন্ন যাবতীয় সমীকরণের জন্যই সংশ্লিষ্ট curve এমন অবস্থানে থাকে যেখানে তা x-অক্ষকে অবশ্যই ছেদ করবে। অপরপক্ষে curveটি x-অক্ষকে একাধিকবার ছেদ করলে সমীকরণটির সমাধানও একের অধিক হবে।

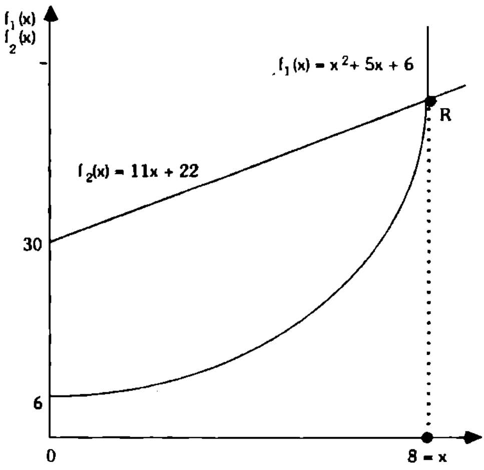
তাহলে এখন আমরা বলতে পারি যে x-এর যে-মানের জন্য $f(x) = 0$ হয়, তাকে বলে উক্ত সমীকরণের সমাধান *(root)* বা *মূল* বা *বীজ*। এই সমাধানকে solutionও বলা হয়ে থাকে, তবে তাকে root বলাই অধিক যুক্তি সঙ্গত।

দ্বিঘাত রাশির সাথে কোনো সংখ্যার সমতা প্রতিষ্ঠিত করলে তার ডানপার্শ্বকে শূন্যতে রূপান্তরিত করা খুব সহজ : শুধু সংখ্যাটিকে তার চিহ্ন বদলে দিয়ে বাম দিকে এনে ডান পাশে শূন্য বসালেই হলো। এতক্ষণের আলোচনা থেকে এই প্রক্রিয়াটিকে এখন পাঠকের কাছে অর্থপূর্ণ ব'লে মনে হচ্ছে। কিন্তু যদি দু'টি *সমীকরণের* মধ্যে সমতা প্রতিষ্ঠা করা হয়? সেক্ষেত্রেই গাণিতিক পদ্ধতি প্রাথমিকভাবে একই—ডান পার্শ্বকে শূন্যতে রূপান্তরিত করা। তবে চিত্রের মাধ্যমে বুঝতে হলে উভয় পার্শ্বে সমীকরণ দু'টি রেখে দিলেই বুঝতে সুবিধা। ধরা যাক যে-সমীকরণটির root বের করতে হবে তা নিম্নরূপ :

$$x^2 + 5x + 6 = 11x + 22$$

এখানে সমতা প্রতিষ্ঠিত হয়েছে x-এর দু'টি ফাংশানের মধ্যে : একটি দ্বিঘাত এবং একটি সরল। এটি স্পষ্টতই বুঝা যাচ্ছে যে এর root হলো x-এর সেই মান যার জন্য $x^2 + 5x + 6$-এর যে-মান হবে, $11x + 22$-এরও সেই মান হবে।

কিন্তু curve বা line-এর ভাষায় এর ব্যাখ্যা কী? আসলে দুটি ফাংশানের জন্য দুটি রেখা পাওয়া যাবে—একটি বক্ররেখা এবং একটি সরলরেখা। ফাংশান দুটির মান সমান মানে যে x-এর প্রতিটি মানের জন্য $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর মান সমান হবে তা নয়, তার মানে এই যে কমপক্ষে x-এর একটি মানের জন্য $f_1(x) = f_2(x)$। তা হবে তখনই যখন রেখা দুটির কমপক্ষে একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে, অর্থাৎ তারা একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। চিত্রের মাধ্যমে :



দেখা যাচ্ছে যে চিত্রে $x = 8$ -এর ক্ষেত্রে $f_1(x) = f_2(x)$। অর্থাৎ $f_1(8) = f_2(8)$; যেমন :

$$f_1(8) = 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = 110$$

$$f_2(8) = 11 \cdot 8 + 22 = 110$$

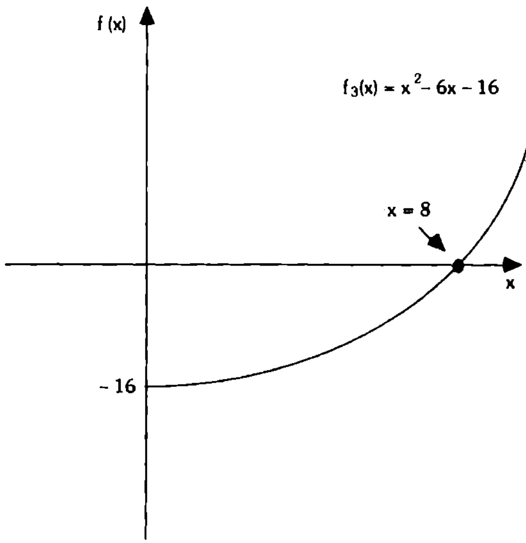
কিন্তু x-এর আর কোনো মানের জন্য $f_1(x) = f_2(x)$ সমতাটি প্রতিষ্ঠা করা সম্ভব নয়। চিত্র থেকেও তা বুঝা যাচ্ছে।

এখন সমীকরণটিকে যদি এভাবে লেখা হয় :

$$x^2 + 5x + 6 - 11x - 22 = 0$$

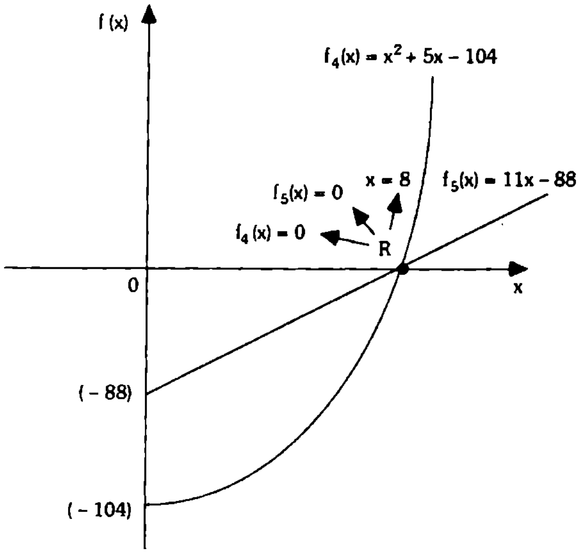
$$\text{OR} \quad f_3(x) =)\, x^2 - 6x - 16 = 0$$

তাহলে আমরা x-এর নোতুন একটি ফাংশান $f_3(x)$ পাই যা $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$-এর বিয়োগফল। সেক্ষেত্রে শুধু এই $f_3(x)$-এর curve দিয়েই তার root বের করা সম্ভব। অন্য কথায় x-এর যে-মানের জন্য $f_3(x) = 0$ হবে, ঠিক x-এর সেই মানের জন্যই $f_1(x) = f_2(x)$ হবে। নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য :



এই curve টি $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর বিয়োগফলের সাথে x এর কী সম্পর্ক তা দেখিয়ে দিচ্ছে। এ থেকেও দেখা যাচ্ছে যে $f_3(8) = 0$, অর্থাৎ equation টির root হলো 8।

অবশ্য $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর বিয়োগফলকে একটি নোতুন ফাংশানে রূপান্তরিত না ক'রে আরেক উপায়ে x এর উদ্দিষ্ট মান বের করা যেত। তা হলো উপরের চিত্রের পূর্ববর্তী চিত্রটির রেখা-যুগলকে পূর্ববর্ণিত কায়দায় টেনে নামানো, যতক্ষণ পর্যন্ত R বিন্দুটি x-অক্ষের ওপর না পড়ে (নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য) :



এভাবে টানার পর $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ পরিবর্তিত হয়ে হবে যথাক্রমে $f_4(x)$ এবং $f_5(x)$, যেহেতু তাদের ধ্রুব সংখ্যা দুটি (constant) বদলে এমন হতে হবে যেন প্রত্যেকটি রাশির অপর অংশটি থেকে স্ব স্ব ধ্রুবকটিকে বাদ দিলে প্রতি ক্ষেত্রেই অবশিষ্ট থাকে শূন্য। এ কারণে R বিন্দুতে $f_4(x)$ এবং $f_5(x)$ এর প্রত্যেকের মান শূন্য। তবে আগের কথাটি আবারও মনে করতে হবে—এরূপ ক্ষেত্রে স্বয়ং x এর মান কখনও শূন্য নয় কিন্তু। অর্থাৎ অন্যান্য বারের মতো এবারও আমরা $x = 8$ পাচ্ছি।

তাহলে সচরাচর যে-কোনো সমীকরণের সমাধানের মূল কথা হলো এই। এখন আমরা দ্বিঘাত সমীকরণের গাণিতিক সমাধানের সাধারণ (generalized) সূত্রের সন্ধান করব।

FOOD FOR THOUGHT

1. একে একে $x = 1, 2, 3 \ldots$ ইত্যাদি নিয়ে নিচের ফাংশানগুলি থেকে x এর মান নির্ণয় করুন। প্রতি ক্ষেত্রে এই অধ্যায়ে প্রদর্শিত জ্যামিতিক পদ্ধতিও অনুসরণ করতে হবে।

$f_1(x) = 3x$; $x = ?$ যখন $f_1(x) = 24$

$f_2(x) = 3x + 3$; $x = ?$ যখন $f_1(x) = 27$

$f_3(x) = x^2$; $x = ?$ যখন $f_3(x) = 9$

$f_4(x) = x^2 + x$; $x = ?$ যখন $f_4(x) = 12$

$f_5(x) = x^2 + x - 12$; $x = ?$ যখন $f_5(x) = 0$

2. উপরের f_1 থেকে f_5 এর জন্য প্রাপ্ত curve গুলিতে সমাধান বিন্দুগুলি চিহ্নিত ক'রে তাদেরকে x অক্ষের ওপর লম্ব কোনো একটিমাত্র সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা যায় কি? কেন?

3. (a) $x^2 + x = 56$ সমীকরণটিকে ঠিক এই অবস্থায় রেখে—অর্থাৎ এর ডান পার্শ্বকে শূন্যে রূপান্তরিত না ক'রে—এই অধ্যায়ে প্রদর্শিত জ্যামিতিক উপায়ে এর root নির্ণয় করুন (কেবল যোগবোধক root টি)।

(b) এবার একে general quadratic equation-এ (অর্থাৎ affected quadratic-এ) রূপান্তরিত ক'রে একই গ্রাফ কাগজে নোতুন curve এর সাহায্যে এর root (কেবল যোগবোধকটি) নির্ণয় করুন।

4. $x^2 + 2x = 35$ এবং $5x = 25$ এই সমীকরণ দুটির সাধারণ root কেবল প্রদর্শিত জ্যামিতিক উপায়ের সবগুলি প্রয়োগ ক'রে নির্ণয় করুন (তিনটি উপায়)।

5. বিশাল একটি লোহার পাত থেকে আয়তাকারে পাত কেটে কেটে বয়ে অন্যত্র নিয়ে যাওয়া হবে। পাত কাটার নিয়ম হলো : তার প্রস্থ 7 ফুটের বেশি হতে পারবে না; আবার প্রস্থ যা হবে দৈর্ঘ্য তার চেয়ে সবক্ষেত্রে 3 ফুট বেশি হবে। এক আকৃতির পাত 1টির বেশি কাটা যাবে না।

এক দিন কিছু পাত কাটা হলো। পাতগুলিকে একটি মেঝের ওপর বসিয়ে দেখা গেল যে সেগুলি মোট 148 বর্গফুট জায়গা ঢেকে দিয়েছে। মোট কতটি পাত কাটা হয়েছিল?

দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতিসমূহ

(Techniques of Solving Quadratic Equations)

যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করা যায় এমন সূত্র (formula) আছে। তবে তা আমরা পরে দেখব। সমীকরণ নিয়ে দক্ষতার সাথে নাড়াচাড়া করার যোগ্যতা অর্জন করার জন্য কয়েকটি পদ্ধতি দেখা দরকার।

1) $ax^2 + bx + c = 0$ এর $b = 0$ এবং $a = 1$ হলে সমীকরণটি হয় : $x^2 + c = 0$। আমরা আগেই দেখেছি যে একে বলে বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ। একে সমাধান করা আর একটি সংখ্যার বর্গমূল বের করা একই কথা। যেমন :

$$x^2 + (-81) = 0$$

OR $\quad x^2 = 81$

OR $\quad x = \pm\sqrt{81}$

OR $\quad x = \pm 9$

2) Reduced form : $x^2 + bx + c = 0$

General form : $ax^2 + bx + c = 0$

এই আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করা হয় তিন উপায়ে :

(a) উৎপাদকীকরণের সাহায্যে (by factoring) ;

(b) বর্গ সম্পন্নকরণের মাধ্যমে (by Completing the Square); এবং

(c) সাধারণীকৃত দ্বিঘাত সূত্রের সাহায্যে (by the generalized quadratic formula)।

শেষোক্ত পদ্ধতিতে যে কোনো ধরনের দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করা যায়। সেদিক দিয়ে বিচার করলে বলা যায় যে (a) এবং (b) চিহ্নিত পদ্ধতিগুলির আর কোনো দরকার হয় না। কিন্তু একেক ধরনের সমীকরণের জটিলতা একেক ধরনের—এ বিষয়টি সচেতনভাবে বুঝতে পারার জন্য, সমীকরণ নিয়ে নাড়াচাড়া করার দক্ষতা অর্জন করার জন্য, এবং দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যাপারে গভীর অন্তর্দৃষ্টি লাভ করার জন্য এই পদ্ধতিগুলিকে ভালোভাবে জানার দরকার আছে। তাছাড়া সূত্র (c) হলো পদ্ধতি (b) এরই চরম ফলশ্রুতি। সুতরাং (c) ব্যবহার করলেও (b) কে ভুলে যাওয়া উচিত হবে না।

(a) উৎপাদকীকরণ : এই পদ্ধতিতে $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের সমীকরণের বাম পার্শ্বের রাশিটিকে তার উৎপাদকে বিভক্ত করা হয়। ফলে পাওয়া যায় দু'টি উৎপাদকের গুণফল। তখন এই মৌলিক নিয়ম অনুসরণ ক'রে প্রত্যেকটি উৎপাদককে শূন্যের সাথে সমীকৃত করা হয় :

$ab = 0$ হলে

হয় $a = 0$ নইলে

$b = 0$*

অর্থাৎ $f(x)$ কে শূন্য ক'রে দেয়া, যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা আমরা দেখেছি।

রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয় এভাবে :

a এবং c কে গুণন ক'রে গুণফলকে এমন দু'টি উৎপাদকে ভাগ করা হয় যেন তাদের যোগফল (বা বিয়োগফল) হয় b। এক্ষেত্রে চিহ্নের দিকে সব সময়ে খেয়াল রাখতে হয়। অন্যভাবে :

$ac = ef$ হলে, এবং

$b = e + f$ হলে

প্রাপ্ত চারটি রাশির প্রতি জোড়া থেকে সাধারণ উৎপাদককে আলাদা করতে হবে। বাম পার্শ্বের রাশিটিকে e এবং f এর মাধ্যমে এভাবে সাজাতে হবে :

$$ax^2 + ex + fx + c = 0$$

---

* এই নিয়মকে পাঠকের কাছে মামুলি এবং সর্বজনীন মনে হতে পারে। কিন্তু 'আধুনিক' বীজগণিতে (Modern Algebra) উচ্চতর পর্যায়ে আপনি দেখবেন যে $ab = 0$ হলেও এমনও হতে পারে যে $a \neq 0, b \neq 0$। সুতরাং অতি-সহজ মনে হলেও এসব নিয়ম সম্পর্কে 'সচেতন' থাকলে পরে অনেক সুবিধা হবে।

উদাহরণ -1 : $9x^2 - 6x + 1 = 0$

	$9 \times 1 = 9$
OR $9x^2 - 3x - 3x + 1 = 0$	$9 = 3 (= e) \times 3 (= f)$
OR $3x(3x - 1) - 1(3x - 1) = 0$	$-6 (= b) = (-3) + (-3)$
OR $(3x - 1)(3x - 1) = 0$	$\therefore bx = -6x = -3x - 3x$
সুতরাং $3x - 1 = 0$	
OR $3x = 1$	
OR $x = \frac{1}{3}$	

দেখা যাচ্ছে যে এক্ষেত্রে $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ সূত্রটিও ব্যবহার করা যেত।

উদাহরণ-2 : $x^2 - 3x - 10 = 0$

	$a = 1, b = -3,$
	$c = -10 :$
$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$	$ac = (1)(-10) = -10$
$x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$	$= -5 \times 2$
$(x - 5)(x + 2) = 0$	$b = -3 = -5 + 2$
এখন, হয় : $x - 5 = 0$	
$x = 5$	
না হয় : $x + 2 = 0$	
$x = -2$	

সুতরাং সমীকরণের দু'টি মূল (বা বীজ, root) : 5 এবং – 2।

FOOD FOR THOUGHT

1. f(x) এর কোনো উৎপাদককে শূন্য ক'রে দেয়া মানেই হলো f(x) = 0 ক'রে দেয়া। কিন্তু f(x) = 0 বসানো আর x = 0 বসানো কি একই কথা? উদাহরণ দিয়ে বুঝান।

2. উৎপাদকীকরণ প্রক্রিয়ায় নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান করুন।

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $x^2 + 8x + 7 = 0$

c) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

d) $x^2 + 6x - 91 = 0$

e) $x^2 + 22x + 121 = 0$

f) $x - \frac{15}{x} + 2 = 0$

[**NOTE :** সমীকরণটিকে standard form-এ রূপান্তরিত ক'রে নিতে হবে।]

g) $x + \frac{64}{x} = 16$

[**NOTE :** standard form-এ রূপান্তরিত ক'রে নিতে হবে।]

(b) **বর্গ সম্পূর্ণকরণ :** পূর্ববর্তী পদ্ধতিতে আমরা এমন রাশিকেও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি যাকে $(a + b)^2$ সূত্রটি দ্বারা উৎপাদকে বিভক্ত করা যেত। যে-সব রাশিকে পূর্ণ সংখ্যার (integer) মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায় না, সে-সব ক্ষেত্রেও $(a + b)^2$ সূত্রটিরই সাহায্য নিতে হয়, তবে পদ্ধতিটি একটু ভিন্ন। এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত রাশিকে একটি বর্গ সংখ্যায় রূপান্তরিত করা হয়। উদাহরণ নেয়া যাক।

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

এই সমীকরণটিকে (a)-তে বর্ণিত নিয়মে সমাধান করা যায় না, কারণ এখানে $ac = e + f = b$ পাওয়া সম্ভব নয়। এরূপ ক্ষেত্রে নিচের পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

● **(1) প্রথমে সমীকরণটিকে $x^2 + bx = c$**

আকারে প্রকাশ করতে হবে। অর্থাৎ $a = 1$ নিশ্চিত করতে হবে এবং ধ্রুব সংখ্যাকে ডানপার্শ্বে নিয়ে যেতে হবে।

● **(2) এর পর উভয় পার্শ্বে $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ যোগ করতে হবে। [উভয় পার্শ্বে একই সংখ্যা যোগ করলে সমীকরণের সমতার ব্যাঘাত ঘটে না।]**

● **(3) এবার $(a + b)^2$ বা $(a - b)^2$ সম্পন্ন করতে হবে।**

এবার তাহলে এই পদ্ধতিতে পূর্বোক্ত সমীকরণটির সমাধান করা যাক।

(1) $x^2 - 6x = -2$

(2) $x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$

(3) $(x - 3)^2 = 7$

$x - 3 = \pm\sqrt{7}$

$x = 3 \pm \sqrt{7}$

এখানে $b = -6$

$\frac{b}{2} = -3$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9$

এবার আরো কিছু উদাহরণ দেখা যাক।

উদাহরণ – 3 : $2x^2 - 7x + 2 = 0$

সমাধান : $ax^2 + bx = c$ রূপে সাজিয়ে—

$$2x^2 - 7x = -2$$

$a = 1$ করার জন্য উভয় পার্শ্বকে 2 দ্বারা ভাগ ক'রে (অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণন ক'রে)—

$$\frac{2x^2 - 7x}{3} = \frac{-2}{2}$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x = -1$$

$$\frac{b}{2} = \frac{7}{2 \times 2} = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

উভয় পার্শ্বে $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ যোগ ক'রে—

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -1 + \frac{49}{16}$$

$$(x)^2 - 2.\,x.\frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$$

$$x - \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{33}{(4)^2}}$$

$$= \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

সুতরাং সমীকরণটির মুল দু'টি হলো : $\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$ এবং $\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$।

উদাহরণ – 4 : $x^2 - 2x + 7 = 0$

সমাধান : $x^2 - 2x + 7 = 0$ [$x^2 + bx = c$ রূপে]

$$x^2 - 2x + 1 = -7 + 1 \quad \left[\frac{b}{2} = 1\right]$$

$$x^2 - 2.\,x.\,1 + 1^2 = -6$$

$$(x-1)^2 = -6$$
$$x-1 = \pm\sqrt{-6}$$
$$x = 1 \pm \sqrt{-6}$$
$$= 1 \pm i\sqrt{6}$$

এখানে সমীকরণটির মূল দুটি হলো কাল্পনিক।

FOOD FOR THOUGHT

1. Completing the square পদ্ধতিতে সমীকরণের উভয় পাশে $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ যোগ করা হলো কেন?

[Hint : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ এই সূত্রের মধ্যেই এর জবাব লুকিয়ে আছে। খুবই সহজ।]

2. Completing the square পদ্ধতি প্রয়োগ ক'রে নিচের সমীকরণগুলিকে সমাধান করুন।

a) $x^2 - 6x + 4 = 0$

b) $x^2 + 10x = 1$

c) $x^2 + 12x + 16 = 0$

d) $x^2 - 14x + 58 = 0$

c) **দ্বিঘাত সূত্র (The Quadratic Formula) :** এখন আমরা দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করার জন্য যে সূত্রটি প্রতিষ্ঠিত করতে যাচ্ছি তা দিয়ে যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান করা যাবে। তবে এই সূত্রটিকে প্রতিষ্ঠিত করা হয় বর্গ সম্পূর্ণকরণ প্রক্রিয়ায়, যা আমরা আগেই দেখেছি। নিচে পদ্ধতিটি দেয়া হলো।

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

● ax^2-এর $a = 1$ করার জন্য উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করা হলো।

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

● উভয় পক্ষের সাথে $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2$ যোগ করা হলো।

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

সুতরাং এই হলো দ্বিঘাত সূত্র :

[illegible]

সূত্রটি থেকে সহজেই কয়েকটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয় অনুমান করা যাচ্ছে :

● $b^2 - 4ac > 0$ হলে বর্গমূল চিহ্নের মধ্যে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা থাকবে না। তখন x-এর মান হবে বাস্তব সংখ্যা।

● কিন্তু $b^2 - 4ac < 0$ হলে '$\sqrt{\ }$' চিহ্নের মধ্যে একটি ঋণাত্মক সংখ্যা থাকবে। আমরা এর আগেই জেনেছি যে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল হলো একটি কাল্পনিক সংখ্যা। সুতরাং সেক্ষেত্রে x-এর মান হবে দুটি কাল্পনিক সংখ্যা যারা একে অপরের *অনুবন্ধী*।

● উপরের দুটি ক্ষেত্রেই x-এর দুটি ক'রে মান পাওয়া যাবে।

● $b^2 - 4ac = 0$ হলে $-b$ এর সাথে যোগ করার বা তা থেকে বিয়োগ করার মতো কোনো সংখ্যা অবশিষ্ট থাকে না। ফলে সেক্ষেত্রে x-এর একটিই মান দুইবার পাওয়া যাবে। মানটি হবে একটি বাস্তব সংখ্যা। এরূপ সমাধানকে বলে repeated real solution।

দ্বিঘাত সমীকরণের এই $b^2 - 4ac$ রাশিটিকে বলে তার **নিশ্চায়ক (discriminant)**।

উদাহরণ – 5 : $x^2 + 10x + 11 = 0$ সমীকরণটির মূল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $x^2 + 10x + 11 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4.1.11}}{2.1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4.14}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{2^2.14}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{14})}{2}$$

$$= -5 \pm \sqrt{14}$$

উদাহরণ – 6 : $x^2 - 12x + 30 = 0$ হলে $x = ?$

সমাধান : $x^2 - 12x + 30 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4.1.30}}{2.(-12)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{24}}{-24}$$

$$= \frac{2.6 \pm 2\sqrt{6}}{2.(-12)}$$

$$= \frac{\cancel{2}(6 \pm \sqrt{6})}{\cancel{2}.(-12)}$$

$$= -\frac{6 \pm \sqrt{6}}{12}$$

উদাহরণ – 7 : $x^2 - x + 7 = 0$ হলে $x = ?$

সমাধান : $x^2 - x + 7 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.7}}{2.(-1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-28}}{-2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-27}}{-2}$$

$$= -\frac{1 \pm i\sqrt{27}}{2}$$

FOOD FOR THOUGHT

পূর্ববর্তী Exercise-এর 2-এর সমীকরণগুলিকে দ্বিঘাত সূত্রের সাহায্যে সমাধান করুন।

নির্বাচিত উদাহরণমালা

(Selected Examples)

1. $\frac{3}{2x+1} + \frac{4}{5x-1} = 2$ সমীকরণটি সমাধান করুন।

সমাধান : আমাদের প্রথম উদ্দেশ্য হলো হরে (denominator) কোনো চলক (এখানে x) না রাখা।

$$\frac{3}{2x+1} + \frac{4}{5x-1} = 2$$

$$\frac{3(5x-1) + 4(2x+1)}{(2x+1)(5x-1)} = 2 \quad [\text{বাম পার্শ্বকে যোগ ক'রে}]$$

উভয় পক্ষকে (2x + 1) (5x – 1) দ্বারা গুণন ক'রে হরকে (denominator) চলকমুক্ত করা হলো :

$$
\begin{aligned}
3(5x-1)+4(2x+1) &= 2(2x+1)(5x-1)\\
15x-3+8x+4 &= 2(10x^2+3x-1)\\
23x+1 &= 20x^2+6x-2\\
-20x^2+23x-6x+1+2 &= 0\\
-20x^2+17x+3 &= 0\\
-(20x^2-17x-3) &= 0\\
20x^2-17x-3 &= 0 \text{ [উভয় পক্ষকে } (-1) \text{ দ্বারা গুণন ক'রে]}\\
20x^2-20x+3x-3 &= 0\\
20x(x-1)+3(x-1) &= 0\\
(x-1)(20x+3) &= 0 \text{ [উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট ক'রে]}
\end{aligned}
$$

এখন—

$x-1 = 0$ হলে,

$x = 1$;

এবং $20x+3 = 0$ হলে

$x = -\dfrac{3}{20}$

সুতরাং সমাধান : $x = 1$

OR $-\dfrac{3}{20}$।

2. $x(x+1)+(x+2)(x+3) = 42$ হলে $x = ?$

সমাধান :

$$
\begin{aligned}
x(x+1)+(x+2)(x+3) &= 42\\
x^2+x+(x^2+5x+6) &= 42\\
x^2+x+x^2+5x+6 &= 42\\
2x^2+6x+6-42 &= 0\\
2x^2+6x-36 &= 0\\
2(x^2+3x-18) &= 0\\
x^2+3x-18 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x^2 + 6x - 3x - 18 = 0$$
$$x(x + 6) - 3(x + 6) = 0$$
$$(x + 6)(x - 3) = 0$$

এখন—

$x + 6 = 0$ হলে,

$x = -6$; এবং

$x - 3 = 0$ হলে,

$x = 3$

সুতরাং $x = -6$ OR 3।

3. $\dfrac{x + 2}{x + 3} = \dfrac{2x - 3}{3x - 7}$ **হলে** $x = ?$

সমাধান : বজ্রগুণন ক'রে (অন্য কথায়, উভয় পক্ষকে $(x + 3)(3x - 7)$ দ্বারা গুণন ক'রে) :

$$(x + 2)(3x - 7) = (2x - 3)(x + 3)$$
$$3x^2 + 6x - 7x - 14 = 2x^2 - 3x + 6x - 9$$
$$3x^2 - x - 14 = 2x^2 + 3x - 9$$
$$3x^2 - 2x^2 - x - 3x - 14 + 9 = 0$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x^2 - 5x + x - 5 = 0$$
$$x(x - 5) + 1(x - 5) = 0$$
$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$x - 5 = 0$ হলে

$x = 5$

এবং $x + 1 = 0$ হলে

$x = -1$।

সুতরাং $x = 5$ OR -1।

4. $x^{-2} - 3x^{-1} - 4 = 0$ হলে $x = ?$

সমাধান : $x^{-2} - 3x^{-1} - 4 = 0$

$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$ [যোগবোধক সূচকে পরিবর্তিত ক'রে]

$x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4\right) = 0.\ x^2$ [উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা গুণন ক'রে]

$$\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{3.\ x.\ \cancel{x}}{\cancel{x}} - 4x^2 = 0$$

$$1 - 3x - 4x^2 = 0$$

$$1 - 4x + x - 4x^2 = 0$$

$$1\ (1 - 4x) + x\ (1 - 4x) = 0$$

$$(1 - 4x)\ (1 + x) = 0$$

$1 - 4x = 0$ হলে

$x = \frac{1}{4}$; এবং

$1 + x = 0$ হলে

$$x = -1$$

5. $\frac{2}{x^2 + 5x + 6} + \frac{x}{x + 2} = \frac{5}{x + 3}$ সমীকরণটি সমাধান করুন।

সমাধান : $\frac{2}{x^2 + 5x + 6} + \frac{x}{x + 2} = \frac{5}{x + 3}$

$\frac{2}{(x + 2)\ (x + 3)} + \frac{x}{x + 2} = \frac{5}{x + 3}$ [$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$

উভয় পক্ষকে ল. সা. গু. (least common denominator, LCD) $(x + 2)\ (x + 3)$ দ্বারা গুণন ক'রে সমীকরণটিকে ভগ্নাংশমুক্ত করা যাক (*clearing* the rational expressions from the equation):

$$(x + 2)\ (x + 3)\left[\frac{2}{(x + 2)(x + 3)} + \frac{x}{x + 2}\right] = \frac{5}{x + 3}\ (x + 2)\ (x + 3)$$

$$(x + 2)\ (x + 3).\ \frac{2}{(x + 2)\ (x + 3)} +$$

$$
\begin{aligned}
(x + 2 (x + 3). \frac{x}{x+2} &= 5x + 10 \\
2 + x^2 + 3x &= 5x + 10 \\
x^2 + 3x - 5x + 2 - 10 &= 0 \\
x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
x^2 - 4x + 2x - 8 &= 0 \\
x (x - 4) + 2 (x - 4) &= 0 \\
(x - 4) (x + 2) &= 0
\end{aligned}
$$

এখন—

$x - 4 = 0$ হলে

$x = 4$, এবং

$x + 2 = 0$ হলে

$x = -2$ ।

কিন্তু দেখা যাক এই মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কি না।

$x = 4$ হলে :

$$\frac{2}{16 + 20 + 6} + \frac{4}{6} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4 + 3}$$

$$\frac{2}{42} + \frac{4}{6} \stackrel{?}{=} \frac{5}{7}$$

$$\frac{15}{21} = \frac{5}{7} \text{ [সিদ্ধ]}$$

$x = -2$ হলে :

$$\frac{2}{4 - 10 + 6} + \frac{-2}{-2 + 2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{-2 + 3}$$

$$\frac{2}{0} - \frac{2}{0} \stackrel{?}{=} 5$$

শূন্য দ্বারা ভাগ-করা সম্ভব নয় ব'লে $x = -2$ কোনো গ্রহণযোগ্য সমাধান নয় (অর্থাৎ এটি extraneous)। সুতরাং $x = 4$ ।

6. $x^4 + x^2 - 6 = 0$ হলে $x = ?$

সমাধান : $x^4 + x^2 - 6 = 0$

এটি হলো x^2 এর মধ্যে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ (a quadratic equation in x^2) কারণ একে এভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$(x^2)^2 + x^2 - 6 = 0$$

এখন $x^2 = u$ ধ'রে :

$$u^2 + u - 6 = 0$$

$$u^2 + 3u - 2u - 6 = 0$$

$$u(u + 3) - 2(u + 3) = 0$$

$$(u + 3)(u - 2) = 0$$

$u + 3 = 0$ হলে

$u = -3$, এবং

$u - 2 = 0$ হলে

$u = 2$।

এখন, $u = -3$ হলে,

$$x^2 = -3$$

$$x = \sqrt{-3}$$

$$= \pm\sqrt{3}i$$

এবং $u = 2$ হলে,

$$x2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

সুতরাং $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$

7. সমধান করুন : $x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

সমাধান : এটি হলো $x^{\frac{1}{3}}$ এর মধ্যে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ :

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}} = u$ ধ'রে :

$$u^2 - u - 2 = 0$$
$$u^2 - 2u + u - 2 = 0$$
$$u(u-2) + 1(u-2) = 0$$
$$(u-2)(u+1) = 0$$

$u - 2 = 0$ হলে,

$u = 2$; এবং

$u + 1 = 0$ হলে

$u = -1$।

$u = 2$ হলে

$$x^{\frac{1}{3}} = 2$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (2)^3$$
$$x = 2^3$$
$$= 8$$

আবার $u = -1$ হলে

$$x^{\frac{1}{3}} = -1$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (-1)^3$$
$$x = -1$$

সুতরাং $x = 8$ OR -1 (যাচাই ক'রে দেখুন)।

৪. সমাধান করুন : $2 - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-2}$

সমাধান : $2 - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ ক'রে বর্গমূল (radical) গুলিকে অপসারণ করা যাক :

$$\left(2 - \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1 = x - 2$$

$$-4\sqrt{x-1} = x - x - 2 - 4 + 1$$

$$-4\sqrt{x-1} = -5$$

$$4\sqrt{x-1} = 5$$ [উভয় পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণন ক'রে]

উভয় পক্ষকে আবারও বর্গ ক'রে অমূলদ রাশিকে অপসারণ করা যাক :

$$\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (5)^2$$

$$16(x-1) = 25$$

$$x - 1 = \frac{25}{16}$$

$$x = \frac{25}{16} + 1$$

$$= \frac{41}{16}$$

$$= 2\frac{9}{16}$$

সুতরাং $x = 2\frac{9}{16}$ (যাচাই (check) ক'রে দেখুন)।

9. সমাধান করুন : $\sqrt{4x+1} - 1 = x$

সমাধান : এখানে অমূলদ রাশিটিকে এক পার্শ্বে রেখে উভয় পার্শ্বকে বর্গ করা যাক। (নইলে, অর্থাৎ অমূলদ রাশিটির সাথে অন্য কোনো মূলদ রাশিকে রেখে তাদেরকে একত্রে বর্গ করলে, এবং এভাবে করতে থাকলে, কোনো দিনও সমীকরণটি থেকে অমূলদ রাশিটি উচ্ছেদ করা যাবে না। যাচাই ক'রে দেখুন।)

$$\sqrt{4x+1} = x + 1$$

$$\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 = (x+1)^2$$

$$4x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 + 2x - 4x + 1 - 1$$

$$0 = x^2 - 2x$$

$$0 = x(x-2)$$

সুতরাং $x = 0$

$x = 2$

যাচাই ক'রে দেখা যায় যে x এর উভয় মান দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সুতরাং $x = 0$ OR 2।

10. সমাধান করুন : $\sqrt{x+5} = x - 1$

সমাধান : $\sqrt{x+5} = x - 1$

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (x-1)^2$$

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 2x - x + 1 - 5$$

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$0 = x^2 - 4x + x - 4$$

$$0 = x(x-4) + 1(x-4)$$

$$0 = (x-4)(x+1)$$

সুতরাং $x = 4$, OR

$x = -1$

এখন যাচাই ক'রে দেখা যাক।

$x = 4$ হলে :

$$\sqrt{4+5} \stackrel{?}{=} 4 - 1$$

$3 = 3$ [সিদ্ধ]

আবার $x = -1$ হলে :

$$\sqrt{-1+5} \stackrel{?}{=} -1-1$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} -2$$

দেখা যাচ্ছে যে $x = -1$ হলে সমীকরণটিতে আত্মবিরোধ (contradiction) দেখা দেয়। অর্থাৎ x এর এই মানটি গ্রহণযোগ্য নয়; একে বলে **extraneous** বা 'আগন্তুক' সমাধান। অন্য কোনো সমীকরণের সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া গেলে সেক্ষেত্রে এরূপ পরিস্থিতির সৃষ্টি হয়। **মনে রাখতে হবে যে, কোনো রাশিকে বর্গ ক'রে কোনো সমীকরণের সমাধান বের করতে গেলে এরূপ পরিস্থিতির সৃষ্টি হতে পারে। সুতরাং যখনই বর্গ ক'রে radical অপসারণ করা লাগবে, তখন সমাধান শেষে মানগুলিকে অবশ্যই যাচাই ক'রে দেখতে হবে।**

11. সমাধান করুন : $x^4 - x^3 = 3x^2$।

সমাধান :

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 &= 3x^2 \\ x^4 - x^3 - 3x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \text{ হলে} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= 0 \text{ হলে} \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

সুতরাং $x = 0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

12. সমাধান করুন : $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$

সমাধান :

সুবিধার জন্য ধরা যাক $\sqrt{\frac{x}{a}} = y$

তাহলে $\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{y}$

সুতরাং সমীকরণটি দাঁড়াচ্ছে এরূপ :

$$2y + 3\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$$

সমীরকরণটিকে ভগ্নাংশমুক্ত করার জন্য উভয় পক্ষকে aby দ্বারা গুণন করি :

$$aby.\ 2y + aby.\ \frac{3}{y} = \frac{b}{a}.\ aby + \frac{6a}{b}.\ aby$$

$$2aby^2 + 3ab = b^2y + 6a^2y$$

$$2aby^2 - 6a^2y - b^2y + 3ab = 0$$

$$2ay\ (by - 3a) - b\ (by - 3a) = 0$$

$$(by - 3a)\ (2ay - b) = 0$$

$by - 3a = 0$ হলে

$$by = 3a$$

$$y = \frac{3a}{b}$$

তখন $\sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{3a}{b}$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 = \left(\frac{3a}{b}\right)^2$$

$$\frac{x}{a} = \frac{9a^2}{b^2}$$

$$x = \frac{9a^3}{b^2}$$

আবার $2ay - b = 0$ হলে

$$2ay = b$$
$$y = \frac{b}{2a}$$

তখন $\sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{b}{2a}$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\frac{x}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$
$$x = \frac{ab^2}{4a.a}$$
$$= \frac{b^2}{4a}$$

সুতরাং $x = \frac{9a^3}{b}$ OR $\frac{b^2}{4a}$ (যাচাই ক'রে দেখুন)।

13. সমাধান করুন : $(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504$

সমাধান : সবগুলো রাশিকে গুণন করলে সর্বোচ্চ ঘাতের x হবে x^4। সেক্ষেত্রে সমাধান সম্ভব হবে নিঃসন্দেহে, তবে হিসাবটা একটু জটিল হয়ে যাবে। সুতরাং সহজ পদ্ধতি অবলম্বন করা যাক।

$$\{(x - 5)(x - 7)\}\{(x + 6)(x + 4)\} = 504$$
$$\{x^2 - 12x + 35\}\{x^2 + 10x + 24\} = 504$$

কিন্তু এভাবে এগুলে অবশেষে x^4 সমন্বিত একটি রাশি পাওয়া যাবে। সুতরাং অন্য সম্ভাবনাটিকেও যাচাই ক'রে দেখা যাক।

$$(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504$$
$$(x - 5)(x + 4)(x - 7)(x + 6) = 504$$
$$(x^2 - x - 20)(x^2 - x - 42) = 504$$

ধরা যাক $x^2 - x = y$

তাহলে
$$
\begin{aligned}
(y-20)(y-42) &= 504\\
y^2-62y+840 &= 504\\
y^2-62y+840-504 &= 0\\
y^2-62y+336 &= 0\\
y^2-56y-6y+336 &= 0\\
y(y-56)-6(y-56) &= 0\\
(y-56)(y-6) &= 0
\end{aligned}
$$

এখন $y-56=0$ হলে

$$y=56$$

এবং তখন
$$
\begin{aligned}
x^2-x &= 56\\
x^2-x-56 &= 0\\
x^2-8x+7x-56 &= 0\\
x(x-8)+7(x-8) &= 0\\
(x-8)(x+7) &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore x-8=0$ হলে

$$x=8$$

এবং $x+7=0$ হলে

$$x=-7$$

আবার $y-6=0$ হলে
$$
\begin{aligned}
x^2-x-6 &= 0\\
x^2-3x+2x-6 &= 0\\
x(x-3)+2(x-3) &= 0\\
(x-3)(x+2) &= 0\\
\therefore x-3 &= 0\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

এবং $x+2=0$ হলে

$$x=-2$$

সুতরাং $x=3, -2, 8, -7$

14. সমাধান করুন : $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3)} = 12$

এখানে radical টিকে এক পাশে রেখে অন্য রাশিগুলোকে অপর পাশে নিয়ে উভয় পক্ষকে বর্গ করলে জটিলতা বাড়বে ছাড়া কমবে না, কারণ তখন অপর পাশে থাকবে $15 - x^2 + 5x$। সুতরাং সমাধানটিকে আরো সহজ করতে পারলে ভালো হবে।'$\sqrt{.}$' চিহ্নের মধ্যে আছে $x^2 - 5x + 3$। সুতরাং চিহ্নটির বাইরেও উক্ত রাশিটি সৃষ্টি করতে পারলে সুবিধা হবে।

সমাধান ঃ

উভয় পক্ষে 3 যোগ করা যাক :

$$(x^2 - 5x + 3) + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 15$$

ধরি $x^2 - 5x + 3 = y$

তাহলে $y + 2\sqrt{y} = 15$

$$2\sqrt{y} = 15 - y$$

$$\left(2\sqrt{y}\right)^2 = (15 - y)^2$$

$$4y = 225 - 30y + y^2$$

$$0 = 225 - 30y - 4y + y^2$$

$$0 = 225 - 34y + y^2$$

$$0 = 225 - 25y - 9y + y^2$$

$$0 = 25(9 - y) - y(9 - y)$$

$$0 = (9 - y)(25 - y)$$

এখন $9 - y = 0$ হলে

$9 = y$, অর্থাৎ

$y = 9$

এবং $25 - y = 0$ হলে

$25 = y$, অর্থাৎ

$y = 25$

এখন $y = 9$ হলে

$$x^2 - 5x + 3 = 9$$
$$x^2 - 5x + 3 - 9 = 0$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$
$$x^2 - 6x + x - 6 = 0$$
$$x(x - 6) + 1(x - 6) = 0$$
$$(x - 6)(x + 1) = 0$$
$$\therefore x = 6 \text{ OR}$$
$$x = -1$$

আবার $y = 25$ হলে

$$x^2 - 5x + 3 = 25$$
$$x^2 - 5x + 3 - 25 = 0$$
$$x^2 - 5x - 21 = 0$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-21)}}{2.1}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 84}}{2}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{113}}{2}$$

সুতরাং x এর চারটি মান পাওয়া যাচ্ছে। কিন্তু $x = 6$ এবং -1 প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে, অথচ পরবর্তী মান দুটি তা করে না। তবে পরবর্তী মান দুটি সিদ্ধ করে $x^2 - 5x - 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$ সমীকরণটিকে ; অর্থাৎ মূল সমীকরণের বামপার্শ্বের রাশির মূলদ অংশটির আগের চিহ্নটি বদলে ফেললে যে সমীকরণটিকে পাওয়া যায়। তাহলে একটি চমৎকার জিনিস দেখুন। দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ নিশ্চয়ই এতক্ষণে মুখস্থ হয়ে গেছে : $ax^2 + bx + c$ । এর বর্গমূল $= \sqrt{ax^2 + bx + c}$। তাহলে :

$$ax^2 + bx + c + p\sqrt{ax^2 + bx + c} = q \ldots . \text{(i)}$$

এই আকারের যে-কোনো সমীকরণকে সমাধান করার অত্যন্ত সহজ একটি কৌশল আছে। ধ'রে নিতে হবে :

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = y$ [পূর্ববর্তী সমীকরণে যা আমরা করিনি]

তাহলে পাওয়া যায় :

$y^2 + py - q = 0 \ldots\ldots$(ii)

এভাবে এগুলে x-এর চারটি মান পাওয়া যাবে। (ii)-এ y এর মানগুলি ধনাত্মক হলে সেগুলি (অর্থাৎ x এর মানগুলি) প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে। অপরপক্ষে y এর জন্য যদি ঋণাত্মক মান পাওয়া যায়, তাহলে তা থেকে প্রাপ্ত x এর মান সিদ্ধ করবে এই সমীকরণকে :

$ax^2 + bx + c - p\sqrt{ax^2 + bx + c} = q$

নিজে আরো কিছু সমীকরণ তৈরি ক'রে এ কথার সত্যতা যাচাই ক'রে দেখুন।

15. সমাধান করুন : $\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a$

সমাধান : কখনো কখনো সমীকরণ থেকে radical কে বিলুপ্ত করার আগে তাকে বা তাদেরকে উৎপাদকে বিভক্ত ক'রে উক্ত উৎপাদককে অপসারণ করা আরো সুবিধাজনক হতে পারে। এটি এমন একটি উদাহরণ। সুতরাং :

$\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a$

এখানে $x^2 - 7ax + 10a^2$

$= x^2 - 5ax - 2ax + 10a^2$

$= x(x - 5a) - 2a(x - 5a)$

$= (x - 5a)(x - 2a)$

এবং $x^2 + ax - 6a^2$

$= x^2 + 3ax - 2ax - 6a^2$

$= x(x + 3a) - 2a(x + 3a)$

$= (x + 3a)(x - 2a)$

সুতরাং পাওয়া গেল :

$$\sqrt{(x-5a)(x-2a)} - \sqrt{(x+3a)(x-2a)} = x - 2a$$

$$\sqrt{x-5a}.\sqrt{x-2a} - \sqrt{x+3a}.\sqrt{x-2a} = \sqrt{x-2a}.\sqrt{x-2a}$$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{x-2a}$ দ্বারা ভাগ ক'রে :

$$\sqrt{x-5a} - \sqrt{x+3a} = \sqrt{x-2a}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ ক'রে :

$$\begin{aligned} x - 5a - 2\sqrt{x-5a}.\sqrt{x+3a} + x + 3a &= x - 2a \\ 2x - 2a - x + 2a &= 2\sqrt{x-5a}\sqrt{x+3a} \\ x &= 2\sqrt{(x-5a)(x+3a)} \end{aligned}$$

উভয় পক্ষকে আবারও বর্গ ক'রে :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(x-5a)(x+3a) \\ x^2 &= 4(x^2 - 2ax - 15a^2) \\ x^2 - 4x^2 + 8ax + 60a^2 &= 0 \\ -3x^2 + 8ax + 60a^2 &= 0 \end{aligned}$$

উভয় পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণন ক'রে :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8ax - 60a^2 &= 0 \\ 3x^2 - 18ax + 10ax - 60a^2 &= 0 \\ 3x(x-6a) + 10a(x-6a) &= 0 \\ (x-6a)(3x+10a) &= 0 \end{aligned}$$

এখন $x - 6a = 0$ হলে

$$x = 6a$$

এবং $3x + 10a = 0$ হলে

$$x = -\frac{10a}{3}$$

কিন্তু $x = 6a$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না (যাচাই ক'রে দেখুন) এবং $x = -\dfrac{10a}{3}$ মানটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

16. সমাধান করুন : $\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9$

সমাধান : সমীকরণটিকে অত্যন্ত চমৎকার একটি কৌশলে সমাধান করা যায়। প্রদত্ত রাশিগুলি দেখুন : উভয় ক্ষেত্রে $3x^2 - 4x$ আছে। ফলে একটি থেকে অন্যটিকে বিয়োগ করলে $3x^2$ এবং $4x$ অপসারিত হয়ে শুধু থাকবে $34 - (-11) = 45$। সমীকরণটির এই বৈশিষ্ট্যই কৌশলটির মূল ভিত্তি।

$$\sqrt{3x^2 + 4x + 34} + \sqrt{3a^2 - 4x - 11} = 9 \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(i)}$$

তাহলে $\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 34}\right) - \left(\sqrt{3x^2 - 4x - 11}\right)^2$

$$= 3x^2 - 4x + 34 - 3x^2 + 4x + 11$$

$$= 45$$

অর্থাৎ : $\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 34}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 - 4x - 11}\right)^2 = 45$

$$\left(\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11}\right)\left(\sqrt{3x^2-4x+34} - \sqrt{3x^2-4x-11}\right) = 45$$

$$9\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 34} - \sqrt{3x^2 - 4x - 11}\right) = 45 \text{ [(i) থেকে]}$$

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} - \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 5 \; . \; . \; . \; . \; \text{(ii)}$$

(i) + (ii) :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{3x^2 - 4x + 34} &= 14 \\
\sqrt{3x^2 - 4x + 34} &= 7 \\
\left(\sqrt{3x^2 - 4x + 34}\right)^2 &= 49 \\
3x^2 - 4x + 34 &= 49 \\
3x^2 - 4x + 34 - 49 &= 0 \\
3x^2 - 4x - 15 &= 0 \\
3x^2 - 9x + 5x - 15 &= 0 \\
3x(x - 3) + 5(x - 3) &= 0 \\
(x - 3)(3x + 5) &= 0
\end{aligned}$$

$$x - 3 = 0 \text{ হলে}$$

$$x = 3$$

এবং $$3x + 5 = 0 \text{ হলে}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

17. সমাধান করুন : $12^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$

সমাধান : বাম পার্শ্বের রাশিটি দেখুন : এতে x এর ঘাত 4 থেকে 3, 2, 1 হয়ে 0- তে (অর্থাৎ $12x^\circ = 12.1 = 12$) এসে নেমেছে। এ ধরনের যে-কোনো সমীকরণের সমাধান নিচের কৌশল প্রয়োগ ক'রে করা যায়।

উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ ক'রে (কারণ x-এর সর্বোচ্চ ঘাত রাখতে হবে 2) :

$$\frac{12x^4}{x^2} - \frac{56x^3}{x^2} + \frac{89x^2}{x^2} - \frac{56x}{x^2} + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$12x^2 - 56x + 89 - \frac{56}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$12x^2 + \frac{12}{x^2} - 56x - \frac{56}{x} + 89 = 0$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

ধরা যাক $$x + \frac{1}{x} = y$$

তাহলে $$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= y^2 - 2$$

এবার সমীকরণটি দাঁড়াচ্ছে :

$$12(y^2 - 2) - 56y + 89 = 0$$

$$12y^2 - 24 - 56y + 89 = 0$$

$$12y^2 - 56y + 65 = 0$$

$$12y^2 - 30y - 26y + 65 = 0$$

$$6y(2y - 5) - 13(2y - 5) = 0$$

$$(2y-5)(6y-13) = 0$$

$$2y-5 = 0 \text{ হলে}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

এবং
$$6y-13 = 0 \text{ হলে}$$

$$y = \frac{13}{6}$$

সুতরাং
$$y = \frac{5}{2} \text{ হলে}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} = 0$$

$$x \,.\, 2x + \frac{1.2x}{x} - \frac{5.2x}{2} = 0.\, 2x$$

$$2x^2 + 2 - 5x = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - x + 2 = 0$$

$$2x(x-2) - 1(x-2) = 0$$

$$(x-2)(2x-1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ হলে,}$$

$$x = 2 \text{ ; এবং}$$

$$2x - 1 = 0 \text{ হলে,}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

আবার
$$y = \frac{13}{6} \text{ হলে}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} - \frac{13}{6} &= 0 \\
x.\ 6x + \frac{6x}{x} - \frac{13.6x}{6} &= 0.6x \\
6x^2 + 6 - 13x &= 0 \\
6x^2 - 13x + 6 &= 0 \\
6x^2 - 9x - 4x + 6 &= 0 \\
3x\,(2x - 3) - 2\,(2x - 3) &= 0 \\
(2x - 3)\,(3x - 2) &= 0
\end{aligned}
$$

$2x - 3 = 0$ হলে

$x = \frac{3}{2}$; এবং

$3x - 2 = 0$ হলে,

$x = \frac{2}{3}$

সুতরাং $x = 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

মূলত $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ বা, আরো সাধারণভাবে, $ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0$ সমীকরণকে দ্বিঘাত কৌশলে সমাধান করা যায়। এরূপ সমীকরণে x কে তার গুণাত্মক বিপরীতে বা reciprocal-এ, অর্থাৎ $\frac{1}{x}$-এ, রূপান্তরিত করলে তার সমতার কোনো ক্ষতি হয় না। এ কারণে একে বলে **reciprocal equation**। কোনো কোনো ক্ষেত্রে reciprocal না হলেও একই ধরনের সমীকরণকে এই উপায়ে সমাধান করা যায়। নিচের উদাহরণটি দেখুন।

18. সমাধান করুন : $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

সমাধান :

উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা ভাগ ক'রে :

$$\frac{6x^4}{x^2} - \frac{25x^3}{x^2} + \frac{12x^2}{x^2} + \frac{25x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

$$6x^2 - 25x + 12 + \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6x^2 + \frac{6}{x^2} - 25x + \frac{25}{x} + 12 = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

এখানে $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x.\frac{1}{x}$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

সুতরাং সমীকরণটি দাঁড়াচ্ছে :

$$6\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right\} - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

$$6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 12 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

$$6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$$

এখন $x - \frac{1}{x} = y$ ধ'রে (অবশ্য সরাসরি করাও সহজ) :

$$6y^2 - 25y + 24 = 0$$

$$6y^2 - 16y - 9y + 24 = 0$$

$$2y(3y - 8) - 3(3y - 8) = 0$$

$$(3y - 8)(2y - 3) = 0$$

$$3y - 8 = 0 \text{ হলে}$$

$$3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$3x - \frac{3}{x} - 8 = 0$$

$$3x.x - \frac{3.x}{x} - 8.x = 0.x$$

$$3x^2 - 3 - 8x = 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$3x^2 - 9x + x - 3 = 0$$

$$3x\,(x - 3) + 1\,(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)\,(3x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ হলে}$$

$$x = 3 \text{ এবং}$$

$$3x + 1 = 0 \text{ হলে}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

আবার

$$2y - 3 = 0 \text{ হলে}$$

$$2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2x - \frac{2}{x} - 3 = 0$$

$$2x.x - \frac{2.x}{x} - 3x = 0.x$$

$$2x^2 - 2 - 3x = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x + x - 2 = 0$$

$$2x\,(x - 2) + 1\,(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)\,(2x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ হলে}$$
$$x = 2 \text{ এবং}$$
$$2x + 1 = 0 \text{ হলে}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

সুতরাং $x = 3, -\frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{2}$

19. সমাধান করুন : $(1 - a^2)(x + a) - 2a(1 - x^2) = 0$

সমাধান :

$$(1 - a^2)(x + a) - 2a(1 - x^2) = 0$$
$$x - a^2x + a - a^3 - 2a + 2ax^2 = 0$$
$$2ax^2 + (1 - a^2)x - (a + a^3) = 0$$
$$2ax^2 + (1 - a^2)x - a(1 + a^2) = 0$$

এখানে : $1 - a^2$

$$= 1 + a^2 - 2a^2$$
$$= (1 + a^2) - 2a.a$$

সুতরাং সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় :

$$2ax^2 - 2a^2x + (1 + a^2)x - a(1 + a^2) = 0$$
$$2ax(x - a) + (1 + a^2)(x - a) = 0$$
$$(x - a)(2ax + 1 + a^2) = 0$$
$$x - a = 0 \text{ হলে}$$
$$x = a \text{ এবং}$$
$$2ax + a^2 + 1 = 0 \text{ হলে}$$
$$x = \frac{-(a^2 + 1)}{2a}$$
$$\text{সুতরাং } x = a, -\frac{a^2 + 1}{2a}$$

কিন্তু এই সমীকরণটিকে আরো সহজে সমাধান করা যায় দ্বিঘাত রাশির একটি বৈশিষ্ট্য প্রয়োগ ক'রে। বৈশিষ্ট্যটি হলো : $x^2 + bx + c$ এই reduced form-এ (অর্থাৎ $a = 1$ হলে) : সমীকরণটিকে এভাবেও লেখা যায় : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$। এসব বিষয় আলোচিত হবে "দ্বিঘাত সমীকরণের এবং রাশিমালার তত্ত্ব" পর্বে।

20. সমাধান করুন : $\mathbf{\frac{x+b}{a} + \frac{a}{x+b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a}{a+b}}$

সমাধান : হিসাব সহজ করার জন্য একই লবের রাশি দুটিকে এক পার্শ্বে এবং একই হরের রাশি দুটিকে এক পার্শ্বে আনা যাক।

$$\frac{x+b}{a} - \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a+b} - \frac{a}{x+b}$$

$$\frac{x+b-a-b}{a} = \frac{ax+ab-a^2-ab}{(a+b)(x+b)}$$

$$\frac{x-a}{a} = \frac{ax-a^2}{(a+b)(x+b)}$$

$$\frac{x-a}{a} = \frac{a(x-a)}{(a+b)(x+b)}$$

উভয় পক্ষকে $x - a$ দ্বারা ভাগ ক'রে :

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{(a+b)(x+b)}$$

$$(a+b)(x+b) = a^2 \text{ [বজ্রগুণন ক'রে]}$$

$$ax + bx + ab + b^2 = a^2$$

$$x(a+b) = a^2 - ab - b^2$$

$$x = \frac{a^2-ab-b^2}{a+b}$$

পর্ব : ৩

দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ
(Simultaneous Quadratic Equations)

সহ-সমীকরণের গোড়ার কথা
(Fundamental Facts about Simultaneous Equations)

স্কুল পর্যায়ের গণিতে আপনারা দেখেছেন যে দুটি অজানা রাশির মান নির্ণয়ের জন্য দুটি সমীকরণ দেয়া থাকলে তাদেরকে সহ-সমীকরণ বলে। কিন্তু সহ-সমীকরণের 'স্বভাব' কেমন, তাদের মূল একক-সমীকরণের মূল থেকে কিভাবে আলাদা, গ্রাফের মাধ্যমে কিভাবে সহ-সমীকরণকে ব্যাখ্যা করা যায়, সহ-সমীকরণের একটি সিস্টেমে সর্বোচ্চ কয়টি মূল থাকতে পারে—ইত্যাদি অনেক বিষয়ই হয়তো অনেকেরই অজানা। এরূপ ক্ষেত্রে সমাধানের **পদ্ধতি** জানা যেমন জরুরি, তেমনি সমাধানের **প্রকৃতি** জানাও জরুরি। কারণ শুধু পদ্ধতির যান্ত্রিক বৈশিষ্ট্যগুলির সুবিধা নিয়ে গণিত বোঝা সম্ভব নয়, তার জন্য উক্ত পদ্ধতির ভেতরকার রহস্য কী তা জানা চাই।

আমরা সহ-সমীকরণের একটি সহজ সংজ্ঞা দিয়েই শুরু করি : **সহ-সমীকরণ (simultaneaus equation) হলো দুই বা ততোধিক সমীকরণের একটি গুচ্ছ (a system of equations) যাদের সবগুলিকে একত্রে একটি সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা ক'রে *একটিকে অপরটি সাথে সম্পৃক্ত ক'রে* এমনভাবে সমাধান করতে হয় যেন সংশ্লিষ্ট মূলগুলি দ্বারা পৃথক-পৃথকভাবে প্রত্যেকটি সমীকরণ সিদ্ধ হয়।** পরবর্তী মৌলিক আলোচনার পর এই সংজ্ঞাকে আরেকবার বিবেচনা করলে এর প্রকৃত মর্মার্থ সহজেই বুঝা যাবে। একটি সমীকরণ নেয়া যাক :

$$x + y = 5$$

এখানে x, y এর মান কী হবে? আসলে এরূপ ক্ষেত্রে x, y এর মান হবে অসংখ্য; নিচে কয়েকটি দেখানো হলো।

তালিকা—1

x	y	x + y
1	4	5
2	3	5
3	2	5
4	1	5
5	0	5
0	5	5
–1	6	5
6	–1	5
–2	7	5
7	–2	5 etc.

কিন্তু একই সাথে (simultaneously) যদি x, y এর মানকে আরো একটি শর্ত পূরণ (অর্থাৎ সমীকরণকে সিদ্ধ) করতে হয়, তাহলে x, y এর মানের উপরোক্ত অসীম দৌড় সীমিত হয়ে পড়বে। ধরা যাক আরেকটি শর্ত হলো :

$$x - y = 7$$

এবার কিন্তু x, y প্রত্যেকের মাত্র একটি ক'রে মান থাকতে পারে, যেগুলি দ্বারা উভয় শর্তই পূরণ হবে। পূর্বোক্ত তালিকা থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই মান হলো $x = 6, y = -1$, যার ফলে $x + y = 6 + (-1) = 6 - 1 = 5$; এবং $x - y = 6 - (-1) = 6 + 1 = 7$। অন্য কোনো মানই উভয় শর্ত (ie, সমীকরণ) একই সাথে পূরণ (ie, সিদ্ধ) করবে না। পূর্বোক্ত তালিকাটিকে আরো একটু বিস্তৃত ক'রে তা দেখা যাক (পরবর্তী পৃষ্ঠার ২ নং তালিকা দ্রষ্টব্য)।

দেখা যাচ্ছে যে x এর বা y এর এমন কোনো দুটি মান নেই যার জন্য $x - y$ এর কলামে একই মান দুইবার পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $x - y$ এর প্রত্যেকটি মান অনন্য (unique)। এ কারণে $x + y = 5$ শর্তের সাথে $x - y = 7$ জাতীয় কোনো অ-পুনরাবৃত্ত শর্ত জুড়ে দিলে x, y এর মানও মাত্র একটি ক'রে সংখ্যার মধ্যে সীমিত (restricted) হয়ে পড়ে।

তালিকা—2

x	y	x + y	x − y
1	4	5	−3
2	3	5	−1
3	2	5	1
4	1	5	3
5	0	5	5
0	5	5	−5
−1	6	5	−7
6	−1	5	7
−2	7	5	−9
7	−2	5	9 etc.

এখন নিজেকে একটি প্রশ্ন করা উচিত : $x - y$ এর কোনো দুটি বা একাধিক মানও কি সমান হতে পারত না? এই পর্যায়ে আমরা বলব—না, তা পারত না। কারণ আমরা x, y এর জন্য যে-কোনো মান নেইনি—নিয়েছি কেবল সেই মানগুলো যাদের জন্য $x + y = 5$ হয়। অর্থাৎ প্রথম শর্ত পূরণ করে x, y এর যে মানগুলি, সেগুলিকেই দ্বিতীয় শর্তটি পূরণ করার জন্য ব্যবহার করা হয়েছে। ফলে পর পর দুইবার সীমিত হয়ে x, y এর প্রত্যেকে একটি মাত্র মানের মধ্যে সীমিত হয়ে পড়েছে।

কিন্তু $x + y = 5$ শর্তটিকে বাদ দিয়ে $x - y = 7$ শর্তটিকে প্রথমেও বিবেচনা করা যায়। দেখা যাক সেক্ষেত্রে x, y এর কেমন মান পাওয়া যায়।

তালিকা—3

x	y	x − y	x + y	
7	0	7	7	
6	−1	7	5	←
5	−2	7	3	
4	−3	7	1	
...	...			
8	1	7	9	
9	2	7	11	
10	3	7	13 etc.	

এবার দেখা যাচ্ছে যে $x - y = 7$ শর্তটি পূরণ করে x, y এর অসংখ্য মান। কিন্তু তার পর যদি $x + y = 5$ শর্তটি আবারো জুড়ে দেয়া হয়, তাহলে x, y এর জন্য সেই আগের মানই পাওয়া যায় : $x = 6, y = -1$। অন্য কোনো মান দ্বারা উভয় সমীকরণ একই সাথে সিদ্ধ হতে পারে না।

এবার আরো একটি শর্ত বাড়িয়ে দেয়া যাক।

$$x + y = 5 \ldots\ldots \text{(i)}$$
$$x - y = 7 \ldots\ldots \text{(ii)}$$
$$x = -6y \ldots\ldots \text{(iii)}$$

এখানে (i) এবং (ii) সিদ্ধ করে $x = 6, y = -1$। ঠিক এই মানগুলিই (iii) কে সিদ্ধ করে :

$$\begin{aligned} x &= -6y \\ &= -6(-1) \; [y = -1 \text{ বসালে}] \\ &= 6 \end{aligned}$$

কিন্তু (iii) যদি, ধরা যাক, এরূপ হতো : $x = 6y$, তাহলে x, y এর এমন কোনো মান পাওয়া যেত না যেগুলি তিনটি সমীকরণকে এক সাথে সিদ্ধ করে। সমাধান ক'রে দেখা যাক :

$$x + y = 5 \ldots\ldots \text{(i)}$$
$$x - y = 7 \ldots\ldots \text{(ii)}$$
$$x = 6y \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i) + (ii) : $x + y + x - y = 5 + 7$

$$2x = 12$$
$$x = 6$$

(i) থেকে :

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 6 + y &= 5 \\ y &= 5 - 6 \\ &= -1 \end{aligned}$$

(iii) তে $x = 6, y = -1$ বসিয়ে :

$$x = 6y$$
$$6 = 6.(-1)$$
$$6 \stackrel{?}{=} -6$$

এও কি সম্ভব : 6 এবং –6 সমান? বিবৃতিটি আত্মবিরোধী। ফলে (iii) শর্ত জুড়ে দিলে উপরোক্ত সিস্টেমের আর কোনো সমাধান থাকে না।

এ থেকে আমরা একটি অত্যন্ত মৌলিক (fundamental) এবং গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন পাই। তা হলো, simultaneous বা যুগপৎ কোনো সমীকরণগুচ্ছ কতখানি যুগপৎ, যদি তাদেরকে সমাধানের সীমার মধ্যে থাকতে হয়? অন্য কথায়, কোনো সংখ্যক চলক (variable) একই সাথে কতগুলি শর্ত পূরণ করতে পারে? আপাতত আমরা এটুকু বলতে পারি—এবং এটুকু বলাই আমাদের আলোচনার আলোকে বৈধ—যে, দুটি এক-ঘাত বিশিষ্ট চলকের ওপর (এখানে x, y হলো এক-ঘাত চলক) সর্বোচ্চ দুটি শর্ত আরোপ করা যায়। শর্ত-সংখ্যা তার বেশি হলে সিস্টেমটির কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না। আমাদের পূর্বোক্ত সিস্টেম :

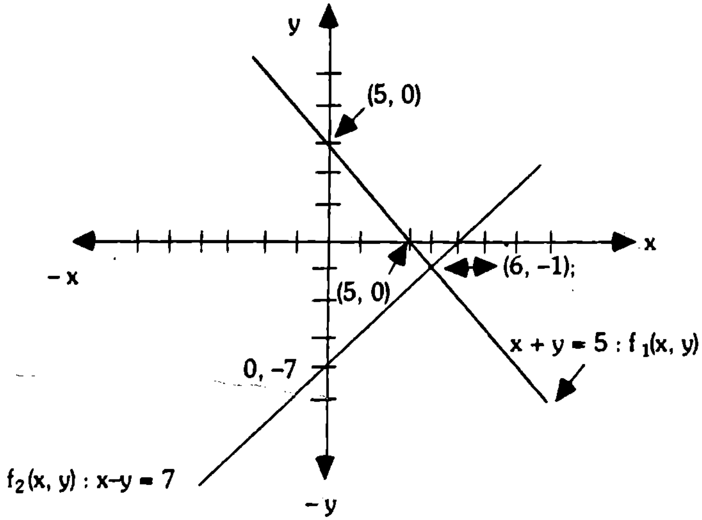
$$x + y = 5$$
$$x - y = 7$$
$$x = -6y$$

মূলত দুটি শর্তের সিস্টেম। এখানে প্রথম দুটি সমীকরণ থেকে x, y এর প্রাপ্ত মান দ্বারাই তৃতীয় শর্তটিকে গঠন করা সম্ভব : $x = 6, y = -1$; সুতরাং—

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ &= (-6) \,.\, (-1) \\ &= -6 \,.\, y \; [\because y = -1] \\ \text{OR } x &= -6y \end{aligned}$$

এভাবে দেখানো যায় যে উপরোক্ত সিস্টেমে যদি আরো দশটি সমীকরণ জুড়ে দেয়া হয় এবং $x = 6, y = -1$ দ্বারা তাদের সবগুলিই সিদ্ধ হয়, তাহলে সেগুলি x, y এর অনন্য (unique) সম্পর্কটিকেই বিভিন্ন কায়দায় প্রকাশ করেছে ব'লে ধ'রে নিতে হবে।

এবার চিত্রের মাধ্যমে আরো মূর্ত-নির্দিষ্টভাবে বিষয়টিকে দেখা যাক। $x + y = 5$ কে 1নং তালিকায় কিছু মান দ্বারা গ্রাফের মাধ্যমে প্রকাশ করলে তা একটি সরলরেখা হবে, যা নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে। একই তলে $x - y = 7$ এর জন্য আরেকটি সরলরেখা অংকন করা যাক, যেখানে x, y এর মান আগের 3 নং তালিকার কায়দায় নির্ধারণ ক'রে যে-কোনো মানের মাধ্যমে নির্ণীত হবে।



চিত্রে, ধরা যাক, $f_1(x) : x + y = 5$ এর গ্রাফটি আগে আঁকা হলো। তাহলে এই শর্তটি নির্ধারিত হচ্ছে সংশ্লিষ্ট সরলরেখাটি দ্বারা। এর সাথে অন্য কোনো শর্ত জুড়ে দিলে তার জন্য প্রাপ্ত সরলরেখাটি যদি $f_1(x)$ এর সরলরেখাকে ছেদ করে বা স্পর্শ করে, কেবলমাত্র তখনই x, y এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য উভয় শর্ত পূরণ হবে। অর্থাৎ, যে-বিন্দুতে দুই বা ততোধিক সমীকরণের রেখা পরস্পরকে বা একে অপরকে ছেদ বা স্পর্শ করে, সেই বিন্দুতে চলক দুটির যে মান, তাই হলো প্রদত্ত সিস্টেমের মূল। একটি বিন্দুও সাধারণ (common) না থাকলে উক্ত সিস্টেমের কোনো মূল থাকে না।

লক্ষ্য করুন, উপরোক্ত চিত্রের (6,–1) বিন্দুতে $x + y = 5$, $x - y = 7$;

অর্থাৎ, $x + y - 5 = x - y - 7$।

এবার দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের কয়েকটি বিশেষ দিক বিবেচনা করা যাক।

$$x^2 + x - 2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (i)$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটির দুইটি মূল : $x = 1, -2$। আবার

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (ii)$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল : $x = 1, 2$। এদের সাধারণ মূল 1। পূর্ববর্তী পর্বে আমরা দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় করেছি। এই

সমীকরণটি দুটি সেই শর্ত মেনে চলে। এদের curve দুটি পরস্পরকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করবে। তবে সে বিন্দুটি হবে x-অক্ষের ওপর অবস্থিত, কারণ এই সমীকরণ দুটিকে আমরা সহ-সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করিনি। প্রত্যেকেই এখানে আলাদাভাবে সমাধানযোগ্য, যেহেতু প্রত্যেকটিতে মাত্র একটি অজানা রাশি (x) আছে। কিন্তু x^2 = x.x-এর একটি x-এর স্থলে y বসালে কী হয় দেখা যাক।

$$xy + x - 2 = 0 \ldots\ldots \text{(ii)}$$
$$xy - 3x + 2 = 0 \ldots\ldots \text{(iii)}$$

এখন আমরা একেকটি সমীকরণে দুটি ক'রে অজানা রাশি পেয়েছি। এদেরকে সহ-সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা ক'রে সমাধান করতে হবে। (ii) কে (iii) থেকে বিয়োগ ক'রে :

$$\begin{aligned} xy - 3x + 2 - (xy + x - 2) &= 0 - 0 \\ xy - 3x + 2 - xy - x + 2 &= 0 \\ 4x - 4 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

x এর মান (ii) তে বসিয়ে :

$$xy + x - 2 = 0$$
$$y = 1$$

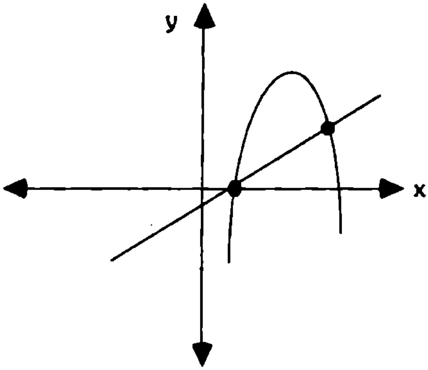
দেখা যাচ্ছে যে x এর (বা y এর) ঘাত 2 থেকে 1-এ নামিয়ে আনার পর x বা y এর জন্য আর দুইটি মান পাওয়া সম্ভব হচ্ছে না। *দুটি চলকের দুটি সমীকরণের সহ-মূল তাদের ঘাতদ্বয়ের গুণফলের বেশি হতে পারে না।* ফলে : $y = 2x^2$ এবং $y = x$ এর সহ-মূল (common roots) দুটি : (0, 0) এবং $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; এবং $y = 2x^2$ এবং $y^2 = x$ এর দুটি বাস্তব এবং দুটি কাল্পনিক মূল রয়েছে (যাচাই করুন!)।

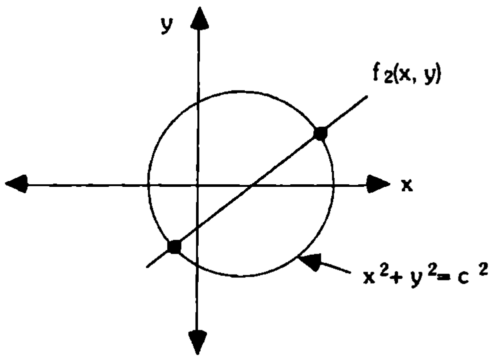
ফলে দ্বিঘাত সহ-সমীকরণে সাধারণ মূল পাওয়া যাবে দুটি ক'রে। এক্ষেত্রে দুটি ক্ষেত্র থাকতে পারে :

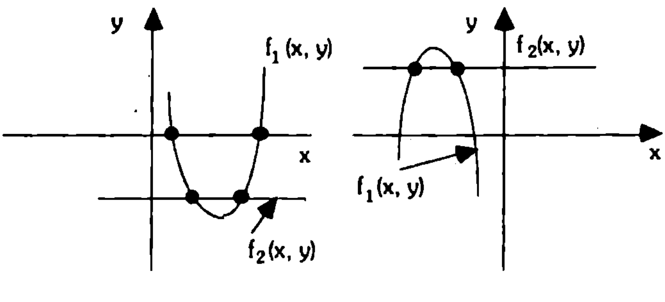
1. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বনাম একটি সরল সমীকরণ,

2. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বনাম আরেকটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

প্রথম ক্ষেত্রে সাধারণ মূল দুটি থাকলে সরল-সমীকরণের সরলরেখা দ্বিঘাত সমীকরণের বক্ররেখাকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে। যেমন :







ইত্যাদি।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রেও, একইভাবে, curve এর ছেদবিন্দুদ্বয় দ্বারা সাধারণ মূল দেখানো যায়। তবে *মূল যদি হয় কাল্পনিক, তাহলে তার জন্য কোনো ছেদবিন্দু খুঁজে পাওয়া যাবে না।*

সহ-সমীকরণের পদ্ধতি

(Methods of Simultaneous Equation)

আমরা আগে $x + y = 5$, $x - y = 7$ এই সহ-সমীকরণের সিস্টেমটির সমাধান নির্ণয় করার জন্য প্রথমে এমন সংখ্যাযুগল নিয়েছিলাম যেগুলি উপরোক্ত যে-কোনো একটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে। যেমন, তালিকা-2 তে আমরা প্রথমে এমন সংখ্যাযুগল নিয়েছিলাম যেগুলির যোগফল সবক্ষেত্রে 5 হয়, অর্থাৎ যেগুলি প্রথম সমীকরণকে সিদ্ধ করে। তারপর উক্ত প্রত্যেকটি সংখ্যাযুগলের বিয়োগফল পর্যবেক্ষণ করেছিলাম, এবং যেক্ষেত্রে বিয়োগফলটি ছিল 7, সেক্ষেত্রে x, y এর মানই উপরোক্ত সিস্টেমের উদ্দিষ্ট সমাধান। অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা প্রথম সমীকরণটিকে দ্বিতীয় সমীকরণের মধ্যে প্রবেশ করিয়ে দিয়েছিলাম। যেমন :

$x + y = 5$ [প্রথম সমীকরণ]

$x = 5 - y$ [এখান থেকেই x এর মান y এর মাধ্যমে নেয়া হলো।]

$x - y = 7$ [দ্বিতীয় সমীকরণ]

$(5 - y) - y = 7$ [প্রথম সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত x এর মান এই সমীকরণে বসানো হলো। ফলে প্রথম শর্তটি দ্বিতীয় শর্তের সাথে মিশে এমন একটি সমীকরণের সৃষ্টি হলো যা উভয় শর্তকে পূরণ করে।]

$$
\begin{aligned}
5 - y - y &= 7 \\
5 - 2y &= 7 \\
5 - 7 &= 2y \\
-2 &= 2y \\
-1 &= y
\end{aligned}
$$

এখন y-এর এমন একটি মান পাওয়া গেল যা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। তাহলে y এর এই মান যে-কোনো সমীকরণে বসিয়ে x এর যে-মান পাওয়া যাবে, তাও উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

পূর্বোক্ত তালিকা-3 এ-ও আমরা ঠিক একই পদ্ধতি অবলম্বন করেছিলাম। এভাবে একাধিক সমীকরণ বিশিষ্ট কোনো সিস্টেমের প্রত্যেকটি সমীকরণকে একই সাথে সমাধান করার বাধ্যতা থাকলে উক্ত সিস্টেমকে বলে সহ-সমীকরণ বা simultaneous equation। আমরা আগেই দেখেছি যে এরূপ সিস্টেমের অসংখ্য সমাধান থাকতে পারে, আবার কোনো সমাধান না-ও থাকতে পারে।

অবশ্য প্রত্যেকটি সমীকরণের একটির মাধ্যমে অপরটিকে সমাধান করার জন্য উপরে যে-পদ্ধতির কথা বলা হয়েছে তা হলো একটি মাত্র পদ্ধতি, যাকে বলে **প্রতিস্থাপন পদ্ধতি** (method of substitution)। অধিকাংশ সময়ে হিসাব সহজ করার জন্য আরো একটি পদ্ধতি অনুসরণ করা হয় যাকে বলে **অপনয়ন পদ্ধতি** (method of elimination)। শুধু তাই নয়, অনেক ক্ষেত্রে একই সিস্টেমে উভয় পদ্ধতিকেই প্রয়োগ করতে হয়। নিচের উদাহরণগুলির মাধ্যমে দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি বিস্তারিতভাবে জানা যাবে।

উদাহরণ-1 : সমাধান করুন :

$$\mathbf{y - x = 1}$$
$$\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$$ **এই সিস্টেমটির সমাধান করুন।**

সমাধান :

$$y - x = 1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (i)$$
$$x^2 + y^2 = 25 \,.\,.\,.\,.\,.\, (ii)$$

(i) থেকে $y = 1 + x$

(ii) তে x এর এই মান বসিয়ে :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + (1 + x)^2 &= 25 \; [y = 1 + x \text{ বসিয়ে}] \\ x^2 + 1^2 + 2.1.x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 25 &= 0 \\ 2x^2 + 2x - 24 &= 0 \\ 2\,(x^2 + x - 12) &= 0 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \left[\text{উভয় পক্ষকে } \frac{1}{2} \text{ দ্বারা গুণন ক'রে}\right] \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 3x - 12 = 0$$

$$x(x + 4) - 3(x + 4) = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$x - 3 = 0$ হলে,

$x = 3$, এবং

$x + 4 = 0$ হলে,

$x = -4$

এখন $x = 3, -4$ (i)-এ বসিয়ে :

$$y - x = 1$$

$y - 3 = 1$ [$x = 3$ বসিয়ে]

$$y = 4$$

এবং $y - x = 1$

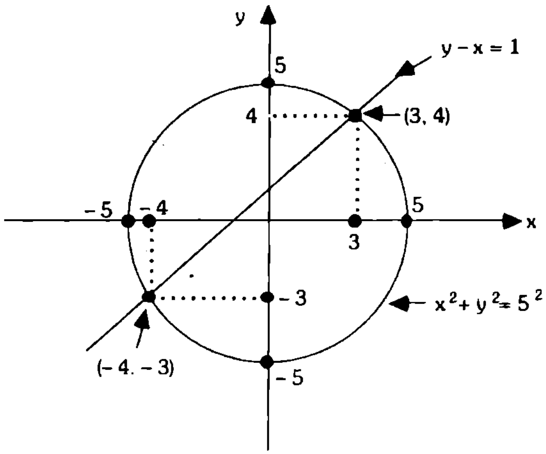
$y - (-4) = 1$ [$x = -4$ বসিয়ে]

$$y + 4 = 1$$

$$y = -3$$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x = 3, -4$; $y = 4, -3$ ।

অর্থাৎ সমাধান-বিন্দুদ্বয় হলো : (3, 4), (–4, – 3)



মন্তব্য : উপরোক্ত সমাধানে শুধু প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়েছে।

উদাহরণ-2 : সমাধান করুন :

$$4x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + 4y^2 = 4$$

সমাধান : $4x^2 + y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (i)$

$x^2 + 4y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (ii)$

[এখানে যে-কোনো একটি সমীকরণ থেকে y এর মাধ্যমে x এর বা x এর মাধ্যমে y এর মান নির্ণয় করলে বেশি সুবিধা হবে না। কারণ তখন মানটি পাওয়া যাবে একটি রেডিক্যাল চিহ্নে মধ্যে ('$\sqrt{\ }$')। সুতরাং প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে এখানে জটিলতার সৃষ্টি হবে। কিন্তু (i) কে 4 দ্বারা গুণন করলে সমীকরণটির সমতার যেমন কোনো ব্যাঘাত ঘটবে না, তেমনি (i) এবং (ii) তে y^2 এর সহগ 4 হওয়াতে (i) থেকে (ii) বাদ দিলে যে-সমীকরণটি পাওয়া যাবে তাতে y^2 থাকবে না, থাকবে শুধু একটি অজানা রাশি, x। তখন উক্ত নোতুন সমীকরণ থেকে x এর মান জেনে নেয়া যাবে।

ঠিক একই কায়দায় উভয় সমীকরণ থেকে y^2 বাদ না দিয়ে x^2-ও বাদ দেয়া যায়। একে বলে অপনয়ন পদ্ধতি। এই পদ্ধতিও কিন্তু যুগপৎ বা simultaneous, কারণ (i) (বা (ii)) কে 4 দ্বারা গুণন করার সময়ে উক্ত গুণনক্রিয়া উক্ত সমীকরণের উভয় চলকের (অর্থাৎ x ও y এর) ওপর ক্রিয়া করে, যার ফল y^2 কে (বা x^2 কে) বাদ দিলে অন্য চলকটির সাথে রয়ে যায়। তাছাড়া y^2 কে (বা x^2 কে) বাদ দেয়ার সময়ে (i) বা (ii) কে যখন যোগ বা বিয়োগ করতে হয়, তখন সমীকরণ দুটির অবশিষ্ট রাশিগুলো একে অপরের সাথে মিশে এমন একটি সমীকরণ সৃষ্টি করে যা প্রথমোক্ত উভয় সমীকরণের উভয় শর্তকে ধারণ করে। নিচের সমাধান দেখলে প্রক্রিয়াটি বুঝা যাবে।]

(i) $\times$ 4 = (iii) :

$16x^2 + 4y^2 = 16 \ldots\ldots (iii)$

$x^2 + 4y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$$(iii) - (ii) = (iv):$$

$$15x^2 = 12 \ldots\ldots (iv)$$

$$x^2 = \frac{12}{15}$$

$$x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$= \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

হরকে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ করা হলো।

(ii) তে $x = +\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ প্রতিস্থাপিত ক'রেঃ

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{4}{5} + 4y^2 = 4$$

$$4y^2 = 4 - \frac{4}{5}$$

$$4y^2 = \frac{16}{5}$$

$$y^2 = \frac{16}{5} \times \frac{1}{4}$$

$$y^2 = \frac{4}{5}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$= \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

আবার (ii) তে $x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ প্রতিস্থাপিত ক'রেও পাওয়া যাবে :

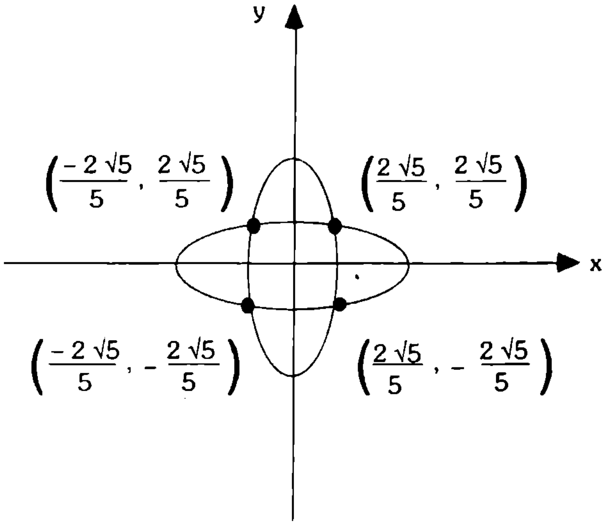
$$y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(যাচাই করুন!)

সুতরাং সমাধান বিন্দু পাওয়া যাচ্ছে চারটি :

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

চিত্রের মাধ্যমে সমাধান বিন্দুগুলো দেখা যাক। এখানে (i) এবং (ii) এর ইলিপ্‌সদ্বয় চারটি বিন্দুতে ছেদ করেছে।



মন্তব্য : কোনো ভগ্নাংশে রেডিক্যাল থাকলে লক্ষ্য রাখতে হয় যেন তার হরে (denominator-এ) রেডিক্যাল না থাকে। এ কারণে $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ কে $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ আকারে প্রকাশ করা হয়েছে।

উদাহরণ 3 : সমাধান করুন :

$$\mathbf{x^2 - 3xy + 4y^2 = 8}$$
$$\mathbf{x^2 + xy + 4y^2 = 4}$$

সমাধান : প্রথম সমীকরণটিকে (i) এবং দ্বিতীয়টিকে (ii) দ্বারা চিহ্নিত ক'রে :

(i) - (ii) = (iii) : [অপনয়ন পদ্ধতি]

$$\begin{array}{rl} x^2 - 3xy + 4y^2 & = 8 \\ -x^2 - \ \ xy - 4y^2 & = -4 \\ \hline -4xy \qquad\qquad & = 4 \ldots\ldots \text{(iii)} \end{array}$$

$$xy = \frac{4}{-4}$$

$$y = -1.\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x} \ldots\ldots (iv)$$

(i) -এ $y = -\frac{1}{x}$ প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$x^2 - 3x.\left(\frac{-1}{x}\right) + 4.\left(\frac{-1}{x}\right)^2 = 8$$

$$x^2 + 3 + \frac{4}{x^2} = 8$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

$$x^2.x^2 + \frac{4}{x^2}.x^2 = 5.\ x^2 \ [L.H.S \times x^2 = R.H.S \times x^2]$$

$$x^4 + 4 = 5x^2$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 (x^2 - 4) - 1 (x^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$x^2 - 1 = 0$ হলে,

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$; আবার

$x^2 - 4 = 0$ হলে,

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

(iv)-এ x এর উক্ত মানগুলো বসিয়ে পাওয়া যায় :

$y = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$

মন্তব্য : সমাধান যে পাওয়া যাবে চারটি তা (i) এবং (ii) দেখেই ব'লে দেয়া যেত : x ও y এর ঘাতদ্বয়ের গুণফল হলো 4 (= 2 × 2)।

উদাহরণ 4 : সমাধান করুন :

$$4^x + 2y = 6$$
$$4^x + y = 5$$

সমাধান : প্রথম সমীকরণকে (i) এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে (ii) দ্বারা চিহ্নিত করলে :

(i)— (ii) = (iii) :

$$\begin{array}{r} 4^x + 2y = 6 \\ -4^x - \ \ y = -5 \\ \hline y = 1 \ \ldots\ldots \text{(iii)} \end{array}$$

(iii) কে (i)-এ প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$4^x + 2.1 = 6$

$4^x = 6 - 2$

$4^x = 4$

$4^x = 4^1$

$x = 1$

সুতরাং $x = 1, y = 1$।

উদাহরণ 5 : সমাধান করুন :

$$\mathbf{x + y + 5 + \sqrt{(x + 2)(y + 3)} = 39}$$
$$\mathbf{(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (x + 2)(y + 3) = 741}$$

সমাধান : প্রথম সমীকরণ :

$$x + 2 + y + 3 + \sqrt{(x + 2)(y + 3)} = 39 \ \ldots\ldots \text{(i)}$$

দ্বিতীয় সমীকরণ $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (x + 2)(y + 3) = 741 \ldots$ (ii)

$x + 2 = u$ এবং

$y + 3 = v$ ধ'রে

(i) থেকে :

$u + v + \sqrt{uv} = 39 \ldots\ldots$ (iii)

(ii) থেকে : $u^2 + v^2 + uv = 741$

$$u^2 + uv + u\sqrt{uv} + uv + v^2 + v\sqrt{uv} - u\sqrt{uv} - v\sqrt{uv} - uv = 741$$

$$u(u + v + \sqrt{uv}) + v(u + v + \sqrt{uv}) - \sqrt{uv}(u + v + \sqrt{uv}) = 741$$

$$(u + v + \sqrt{uv})(u + v - \sqrt{uv}) = 741$$

$\ldots\ldots$ (iv)

(iv) ÷ (ii) = (v) :

$u + v - \sqrt{uv} = 19 \ldots\ldots$ (v)

(iii) + (v) = (vi) :

$$u + v + \sqrt{uv} + u + v - \sqrt{uv} = 39 + 19$$

$$u + v = 29 \ldots\ldots \text{(vi)}$$

আবার (iii) — (v) = (vii) :

$$u + v + \sqrt{uv} - u - v + \sqrt{uv} = 39 - 19$$

$$2\sqrt{uv} = 20$$

$$\sqrt{uv} = 10$$

$$uv = 100 \ldots\ldots \text{(vii)}$$

এখন $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4\,uv$

$= (29)^2 - 4.\ 100$

$= 441$

$u - v = \sqrt{441}$

$= \pm 21 \ldots\ldots$ (viii)

(vi) + (viii) = (ix) :

$$\begin{aligned} u + v &= 29 \\ u - v &= \pm 21 \\ \hline 2u &= 50 \text{ OR} 8 \\ u &= 25 \text{ OR } 4 \\ v &= 4 \text{ OR } 25 \end{aligned}$$

$\therefore$ x = 23 OR 2 ; y = 1 OR 22

উদাহরণ 6 : সমাধান করুন :

$$\mathbf{x^4 + y^4 = 82 \ldots\ldots (i)}$$

$$\mathbf{x - y = 2 \ldots\ldots (ii)}$$

সমাধান : এই সমাধানটি ভালোভাবে লক্ষ্য করুন। নিজে অন্যান্য পদ্ধতিতে সমাধানটি করার চেষ্টা করুন।

ধরা যাক

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \\ x - y &= 2 \\ u + v - u + v &= 2 \\ 2v &= 2 \\ v &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore x = u + 1, y = u - 1$

(i) থেকে :

$$(u + 1)^4 + (u - 1)^4 = 82$$

$$\{(u + 1)^2\}^2 + \{(u - 1)^2\}^2 = 82$$

$$\{(u+1)^2 + (u-1)^2\}^2 - 2(u+1)^2 (u-1)^2 = 82 \quad [\because a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$$

$$\{u^2 + 2u + 1 + u^2 - 2u + 1\}^2 - 2\{(u + 1)(u - 1)\}^2 = 82$$

$$\{2u^2 + 2\}^2 - 2(u^2 - 1)^2 = 82$$

$$4u^4 + 8u^2 + 4 - 2\,(u^4 - 2u^2 + 1) = 82$$
$$4u^4 + 8u^2 + 4 - 2u^4 + 4u^2 - 2 - 82 = 0$$
$$2u^4 + 12u^2 - 80 = 0$$
$$2(u^4 + 6u^2 - 40) = 0$$
$$u^4 + 10u^2 - 4u^2 - 40 = 0$$
$$u^2\,(u^2 + 10) - 4\,(u^2 + 10) = 0$$
$$(u^2 + 10)\,(u^2 - 4) = 0$$

$u^2 - 4 = 0$ হলে

$u = \pm\sqrt{4}$

$= \pm 2$

$u^2 - 10 = 0$ হলে

$u = \pm\sqrt{-10}$

এভাবে $x = 3, -1, 1 + \sqrt{-10}, 1 - \sqrt{-10}$

$y = 1, -3, -1 + \sqrt{-10}, -1 - \sqrt{-10}$

(যাচাই করুন!)

উদাহরণ-7 : সমাধান করুন :

$$\mathbf{y + x^3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (i)}$$
$$\mathbf{y = 2x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (ii)}$$

সমাধান :

(i) -এ (ii) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

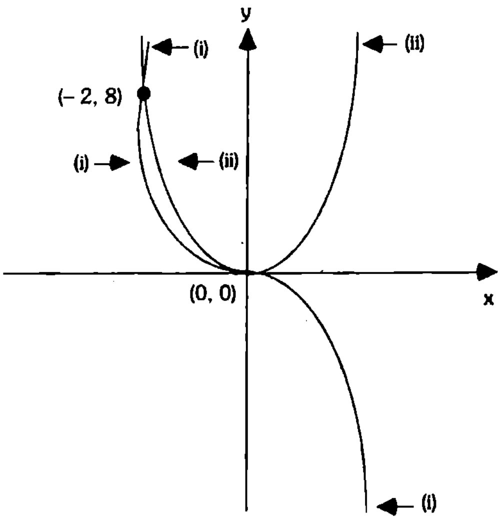
$$y + x^3 = 0$$
$$2x^2 + x^3 = 0$$
$$x^2\,(x + 2) = 0$$
$$x = 0, \text{ বা } -$$
$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

(ii) থেকে :

$$y = 2x^2$$
$$= 2(-2)^2$$
$$= 8$$

$\therefore x = 0, -2 \; ; \; y = 0, 8$

অর্থাৎ সমাধান-বিন্দুদ্বয় হলো (0, 0), (–2, 8)। অন্য কথায়, সমীকরণ দুটি দ্বারা নির্দেশিত curve দ্বয়ের উভয়ই (0, 0) এবং (–2, 8) বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করেছে। নিচের চিত্র দেখুন।



উদাহরণ-৪ : সমাধান করুন :

$$y^4 - 3x^2 = -2 \; \ldots\ldots \; \text{(i)}$$
$$y + x = 0 \; \ldots\ldots \; \text{(ii)}$$

সমাধান : (ii) থেকে

$y = -x$

(i) -এ $y = -x$ প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$y^4 - 3x^2 = -2$$

$$(-x)^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - x^2 + 2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 2) - 1(x^2 - 2) = 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$x^2 - 1 = 0$ হলে

$$x = \pm 1$$

$x^2 - 2 = 0$ হলে

$$x = \pm\sqrt{2}$$

(ii) থেকে : $x = +1$ হলে,

$y = -1$;

$x = -1$ হলে,

$y = +1$;

$x = +\sqrt{2}$ হলে,

$y = -\sqrt{2}$;

$x = -\sqrt{2}$ হলে

$y = +\sqrt{2}$

অতএব সমাধান বিন্দুগুলি হলো $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$।

উদাহরণ-9 : সমাধান করুন :

$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{2} \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$x + y = 5 \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : প্রথম সমীকরণ থেকে :

$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{vy}{vx} + \frac{vx}{vy} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{y+x}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2} \text{ [y + x = x + y = 5 বসিয়ে]}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{5.2}{5}$$

$$\sqrt{xy} = 2$$

$$(\sqrt{xy})^2 = 2^2$$

$$xy = 4$$

এখন : $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

$$= (5)^2 - 4.4$$

$$= 25 - 16$$

$$(x - y)^2 = 9$$

$$(x - y) = \pm 3$$

$x + y = 5$ এবং

$x - y = \pm 3$ . . . . . . (iii)

(ii) এবং (iii) থেকে :

$x + y + x - y = 5 + 3$ [$x - y = + 3$ ব্যবহার ক'রে]

$$x = 4$$

এবং $x + y + x - y = 5 - 3$ [$x - y = - 3$ ব্যবহার ক'রে]

$$x = 1$$

এখন যেহেতু $x + y = 5$,

সেহেতু $x = 4$ হলে $y = 1$, এবং

$x = 1$ হলে $y = 4$

অতএব সমাধান বিন্দুদ্বয় হলো (1, 4), (4,1)।

উদাহরণ 10 : সমাধান করুন :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}\ .....\ \text{(i)}$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{5}\ ......\ \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) থেকে পাই :

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{13}{6}\ .....\ \text{(iii)}$$

(ii) থেকে পাই :

$$x+y=5\ .....\ \text{(iv)}$$

(iii) তে (iv) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{25-2xy}{xy}=\frac{13}{6}$$

$$13xy=150-12\,xy$$

$$25xy=150$$

$$xy=6$$

আমরা জানি যে :

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$

$$=25-24$$

$$=1$$

$$x-y=\pm 1\ .....\ \text{(v)}$$

(iv) + (v) :

$x+y+x-y=5+1$ [$x-y=1$ নিয়ে]

$$x=3$$

আবার $x + y + x - y = 5 - 1$ [$x - y = -1$ নিয়ে]

$$x = 2$$

$x = 3$ এবং 2 হলে, (iv) থেকে, যথাক্রমে :

$$y = 2, 3$$

সুতরাং সমাধান বিন্দুদ্বয় হলো (2, 3) এবং (3, 2)।

উদাহরণ 11 : সমাধান করুন :

$$x + \frac{1}{y} = 1 \ldots\ldots (i)$$

$$x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \ldots\ldots (ii)$$

সমাধান : (i) থেকে

$$xy + 1 = y$$

$$1 = y - xy$$

$$xy = y - 1 \ldots\ldots (iii)$$

(ii) থেকে :
$$x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2.y^2 - \frac{2x}{y}.\, y^2 + \frac{1}{y^2}.\, y^2 = \frac{1}{4}.\, y^2$$

$$x^2y^2 - 2xy + 1 = \frac{1}{4}y^2$$

$$(xy)^2 - 2.xy + 1 = \frac{1}{4}y^2$$

$$(y - 1)^2 - 2\,(y - 1) + 1 = \frac{1}{4}y^2 \quad \text{[(iii) থেকে]}$$

$$y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 + 1 - \frac{1}{4}y^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\frac{3}{4}y^2.4 - 4y.4 + 4.4 = 0.4$$

$$3y^2 - 16y + 16 = 0$$

$$3y^2 - 12y - 4y + 16 = 0$$

$$3y(y-4)-4(y-4)=0$$
$$(y-4)(3y-4)=0$$
$$y-4=0 \text{ হলে}$$
$$y=4 \text{ ; এবং}$$
$$3y-4=0$$
$$3y-4=0 \text{ হলে,}$$
$$y=\frac{4}{3}$$

এখন $y = 4$ হলে,

(i) থেকে $x = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; এবং

$y=\frac{4}{3}$ হলে,

$$x = 1-\frac{1}{\frac{4}{3}}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{4}{3}\end{array}\right| \text{ এবং } \left|\begin{array}{l} x=\frac{3}{4} \\ y=4\end{array}\right.$$

বিকল্প পদ্ধতি : (ii) থেকে

$$x^2-\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}$$
$$x^2-2.x.\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{y}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$\left(x-\frac{1}{y}\right)^2=\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x-\frac{1}{y}=\pm\frac{1}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(iii)}$$

(i) + (iii) = (iv) :

$$x + \frac{1}{y} + x - \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{2}$$ [(iii) এর ধনাত্মক মান নিয়ে]

$$x = \frac{3}{4}$$

এবং $2x = 1 - \frac{1}{2}$ [(iii) এর ঋণাত্মক মান নিয়ে]

$$x = \frac{1}{4}$$

এখন (i) থেকে :

$x = \frac{3}{4}$ হলে,

$y = 4$, এবং

$x = \frac{1}{4}$ হলে

$y = \frac{4}{3}$

উদাহরণ 12 : সমাধান করুন :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$xy = 3 \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) থেকে :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{y + x}{xy} = \frac{4}{3}$$

$$3(x + y) = 4.xy$$

$x + y = \frac{4}{3}.3$ [(ii) থেকে]

$$x + y = 4 \ldots\ldots \text{(iii)}$$

জানা আছে যে :

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$
$$= 4^2 - 4.3$$
$$= 4$$
$$x - y = \pm 2 \ldots\ldots (iv)$$

(iii) + (iv) :

$x + y + x - y = 4 + 2$ [(iv) এর ধনাত্মক মানের জন্য]

$2x = 6$

$x = 3$

এবং $2x = 4 - 2$ [(iv) এর ঋণাত্মক মানের জন্য]

$x = 1$

$x = 3$ হলে,

(iii) থেকে : $y = 1$, এবং

$x = 1$ হলে,

$y = 3$

সমাধান :

$x = 1$	এবং	$x = 3$
$y = 3$		$y = 1$

উদাহরণ-13 : সমাধান করুন :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 2 \ldots\ldots (i)$$
$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 2 \ldots. (ii)$$

সমাধান : (ii) থেকে :

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 2$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 2\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y} + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 2 + 2.\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}$$

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{ab}{xy}\right)$$

$$2^2 = 2\left(1 + \frac{ab}{xy}\right) \text{ [(i) থেকে]}$$

$$4 = 2\left(1 + \frac{ab}{xy}\right)$$

$$2 = 1 + \frac{ab}{xy}$$

$$1 = \frac{ab}{xy}$$

$$xy = ab$$

$$y = \frac{ab}{x} \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i)-এ (iii) কে প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{\frac{ab}{x}} = 2$$

$$\frac{a}{x} + \frac{bx}{ab} = 2$$

$$\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = 2$$

$$\frac{a}{x}.\,ax + \frac{x}{a}.\,ax = 2.ax$$

$$a^2 + x^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0$$

$$x - a = 0$$

$$x = a, a \text{ [একই মান পুনরাবৃত্ত]}$$

এখন (i) থেকে :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} = 2$$

$$\frac{a}{a}+\frac{b}{y} = 2$$

$$\frac{b}{y} = 2-1$$

$$\frac{b}{y} = 1$$

$$y = b$$

x এর দুটি মান a এর জন্য y এর দুটি মান b পাওয়া যাবে। সুতরাং নির্ণেয় সমাধান :

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right| \text{ এবং } \left|\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right.$$

উদাহরণ-14 : সমাধান করুন :

$$(x-y)\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$(x-y)\frac{x}{y} = 2 \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) ÷ (ii) = (iii) :

$$\frac{(x-y)\frac{y}{x}}{(x-y)\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x}\times\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}x \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(i) -এ $y = \frac{1}{2}x$ বসিয়ে :

$$\left(x - \frac{x}{2}\right)\frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

(i)-এ $y = -\frac{1}{2}x$ বসিয়ে :

$$\left(x + \frac{x}{2}\right)\frac{\frac{-x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

এখন $x = 2$ হলে (iii) থেকে :

$$y = \frac{1}{2}.2$$

$$= 1$$

$$x = -\frac{2}{3}\ y = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\therefore$ $x = 2$, $y = 1$ এবং $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$

বিকল্প সমাধান :

(i) কে $\frac{x}{y}$ এবং (ii) কে $\frac{y}{x}$ দ্বারা গুণ ক'রে :

$$x - y = \frac{x}{2y} \ldots\ldots \text{(iii)}$$

$$x - y = \frac{2y}{x} \ldots\ldots \text{(iv)}$$

(iii) ÷ (iv) : [(iii) – (iv)-ও করা যেত]

$$\frac{x-y}{x-y} = \frac{x}{2y} \times \frac{x}{2y}$$

$$1 = \frac{x^2}{4y^2}$$

$$4 = \frac{x^2}{y^2}$$

$$\pm 2 = \frac{x}{y}$$

পরবর্তী ধাপগুলি আগের মতো।

উদাহরণ 15 : **সমাধান করুন :**

$$\mathbf{x + \frac{1}{y} = \frac{33}{8} \ldots\ldots (i)}$$

$$\mathbf{y + \frac{1}{x} = \frac{33}{4} \ldots\ldots (ii)}$$

সমাধান : (i) কে y এবং (ii) কে x দ্বারা গুণন ক'রে :

$$xy + \frac{y}{y} = \frac{33y}{8}$$

$$xy + 1 = \frac{33y}{8} \ldots\ldots \text{(iii)}$$

$$xy + \frac{x}{x} = \frac{33x}{4}$$

$$xy + 1 = \frac{33x}{4} \ldots\ldots \text{(iv)}$$

(iii) ÷ (iv) = (v) : [(iii) – (iv)-ও করা যেত]

$$\frac{xy+1}{xy+1} = \frac{33y}{8} \times \frac{4}{33x}$$

$$1 = \frac{y}{2x}$$

$$2x = y \; \ldots\ldots \; (v)$$

(ii) তে (v) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$2x + \frac{1}{x} = \frac{33}{4}$$

$$\frac{2x^2+1}{x} = \frac{33}{4}$$

$$8x^2 + 4 = 33x$$

$$8x^2 - 33x + 4 = 0$$

$$8x^2 - 32x - x + 4 = 0$$

$$8x(x-4) - 1(x-4) = 0$$

$$(x-4)(8x-1) = 0$$

$x - 4 = 0$ হলে,

$x = 4$; এবং

$8x - 1 = 0$ হলে,

$$x = \frac{1}{8}$$

(v)-এ :

$x = 4$ বসিয়ে : $y = 2.4 = 8$

$x = \frac{1}{8}$ বসিয়ে : $y = 2.\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

∴ $x = 4$, $y = 8$ এবং $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{4}$

উদাহরণ 16 : সমাধান করুন :

$$x^2 + y^2 = 13 \ldots\ldots \text{(i)}$$
$$3x^2 - 2y^2 = -6 \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) × 2 + (ii) :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &= 26 \\ 3x^2 - 2y^2 &= -6 \\ \hline 5x^2 &= 20 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

(i)-এ $x = 2$ বসিয়ে :

$y^2 = 13 - x^2$

$y^2 = 13 - 4$

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

(i)-এ $x = -2$ বসিয়ে :

$y^2 = 13 - 4$

$y = \pm 3$

$\therefore$ $x = 2$, $y = 2$ | এবং | $x = 2$, $y = -2$ | এবং | $x = -2$, $y = 2$ | এবং | $x = -2$, $y = -2$

উদাহরণ 17 : সমাধান করুন :

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \ldots\ldots \text{(i)}$$
$$x + y = 10 \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) এর উভয় পক্ষকে বর্গ ক'রে :

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{100}{9}$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{100}{9}-2$$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{82}{9}$$

$$\frac{100-2xy}{xy} = \frac{82}{9} \text{ [(ii) থেকে]}$$

$$\frac{100}{xy}-\frac{2xy}{xy} = \frac{82}{9}$$

$$\frac{100}{xy} = \frac{82}{9}+2$$

$$\frac{100}{xy} = \frac{100}{9}$$

$$xy = \frac{9\times 100}{100}$$

$$xy = 9$$

আবার $(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy$

$= 100-4.9$

$= 64$

$x-y = \pm 8 \ldots\ldots \text{(iii)}$

(ii) + (iii) :

$x+y+x-y = 10+8$ [$x-y=8$ ধ'রে]

$2x = 18$

$$x = 9$$

এবং $2x = 10 - 8$ [$x - y = -8$ ধরে]

$$x = 1$$

(ii) থেকে :

$x = 1$ হলে $y = 9$

$x = 9$ হলে $y = 1$

$\therefore$ $x = 1$, $y = 9$ এবং $x = 9$, $y = 1$

উদাহরণ-18 : **সমাধান করুন :**

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5 \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6} \ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) থেকে :

$$\frac{x}{2}.10 + \frac{y}{5}.10 = 5.10$$

$$5x + 2y = 50 \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(ii) থেকে :

$$\frac{2}{x}.xy + \frac{5}{y}.xy = \frac{5}{6}.xy$$

$$2y + 5x = \frac{5xy}{6} \ldots\ldots \text{(iv)}$$

(iv) – (iii) :

$$2y + 5x - 5x - 2y = \frac{5xy}{6} - 50$$

$$0 = \frac{5xy}{6} - 50$$

$$\frac{5xy}{6} = 50$$

$$xy = 50 \times \frac{6}{5}$$

$$xy = 60$$

$$y = \frac{60}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(iv)}$$

(iii)-তে (iv) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$5x + 2.\frac{60}{x} = 50$$

$$5x.x + \frac{120}{x}.x = 50.x$$

$$5x^2 + 120 = 50x$$

$$5x^2 - 50x + 120 = 0$$

$$5(x^2 - 10x + 24) = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^2 - 6x - 4x + 24 = 0$$

$$x(x - 6) - 4(x - 6) = 0$$

$$(x - 6)(x - 4) = 0$$

$x - 4 = 0$ হলে,

$x = 4$, এবং

$x - 6 = 0$ হলে,

$x = 6$

(iv) থেকে :

$x = 4$ হলে,

$y = 15$; এবং

$x = 6$ হলে,

$y = 10$

$\therefore$ $x = 4$, $y = 15$ এবং $x = 6$, $y = 10$

উদাহরণ-19 : সমাধান করুন :

$$x^2 + xy + y^2 = 133 \; . \; . \; . \; . \; . \; (i)$$
$$x - \sqrt{xy} + y = 7 \; . \; . \; . \; . \; . \; (ii)$$

সমাধান : (i) থেকে :

$$x^2 + xy + y^2 = 133$$
$$x^2 + 2xy + y^2 - xy = 133$$
$$(x + y)^2 - (\sqrt{xy})^2 = 133$$
$$(x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) = 133$$
$$(x + \sqrt{xy} + y)(x - \sqrt{xy} + y) = 133$$
$$(x + \sqrt{xy} + y) .7 = 133$$
$$x + \sqrt{xy} + y = 19 \; . \; . \; . \; . \; . \; (iii)$$

(ii) + (iii) :

$$x - \sqrt{xy + y} + x + \sqrt{xy} + y = 7 + 19$$
$$2(x + y) = 26$$
$$x + y = 13$$
$$y = 13 - x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (iv)$$

(i)-এ (iv) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$x^2 + x(13 - x) + (13 - x)^2 = 133$$
$$x^2 + 13x - x^2 + 169 - 26x + x^2 = 133$$
$$x^2 - 13x + 169 - 133 = 0$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0$$
$$x^2 - 9x - 4x + 36 = 0$$
$$x(x - 9) - 4(x - 9) = 0$$
$$(x - 9)(x - 4) = 0$$

$x - 4 = 0$ হলে,

$x = 4$; এবং

$x - 9 = 0$ হলে,

$x = 9$

(iv) থেকে : $y = 9$ [$x = 4$ হলে]

$y = 4$ [$x = 9$ হলে]

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান :

$x = 4$	এবং	$x = 9$
$y = 9$		$y = 4$

উদাহরণ-20 : সমাধান করুন :

$$x + \frac{4}{y} = 1 \;....\; \text{(i)}$$

$$y + \frac{4}{x} = 25 \;....\; \text{(ii)}$$

সমাধান : (i) থেকে :

$$xy + 4 = y \;.....\; \text{(iii)}$$

(ii) থেকে : $xy + 4 = 25x \;......\; \text{(iv)}$

(iii) − (iv) :

$$xy + 4 - xy - 4 = y - 25x$$

$$0 = y - 25x$$

$$25x = y \;.....\; \text{(v)}$$

(iii) তে (v) প্রতিস্থাপিত ক'রে :

$$x.25x + 4 = 25x$$

$$25x^2 - 25x + 4 = 0$$

$$25x^2 - 20x - 5x + 4 = 0$$

$$5x(5x-4) - 1(5x-4) = 0$$
$$(5x-4)(5x-1) = 0$$
$$5x-4 = 0 \text{ হলে}$$
$$x = \frac{4}{5}; \text{ এবং}$$
$$5x-1 = 0 \text{ হলে}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

(v) থেকে : $y = 20 \left[x = \frac{4}{5} \text{ হলে}\right]$

$y = 5 \left[x = \frac{1}{5} \text{ হলে}\right]$

$\therefore$ $x = \frac{1}{5}$, $y = 5$ এবং $x = \frac{4}{5}$, $y = 20$

পর্ব : ৪

দ্বিঘাত সমীকরণের এবং রাশিমালার তত্ত্ব (Theory of Quadratic Equations and Expressions)

এই পর্বের বিষয়বস্তুর পরিধি

দ্বিঘাত সমীকরণ এবং রাশিমালা সম্পর্কে পাঠক এই অধ্যায়ে এতক্ষণ কিছু প্রাথমিক বিষয় জেনেছেন। প্রাথমিক পর্যায়ের শিক্ষার্থীদের কাছে মনে হতে পারে যে অনেক কিছুই শেখা হয়েছে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে দ্বিঘাত সমীকরণ ও রাশিমালার সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ তত্ত্ব এবং তথ্যাবলী নিয়ে আলোচনা করা হবে এই পর্বে। পূর্ববর্তী আলোচনার ধারাবাহিকতা বুঝতে এবং তা রক্ষা করতে পারলে এই পর্বের আলোচনাও তেমন কঠিন মনে হবে না, তবে অত্যন্ত গভীর এবং মূল্যবান মনে হবে। গণিতামোদী অনেক শিক্ষার্থীর কাছে এই সব তত্ত্ব ও তথ্যাবলী রীতিমতো আনন্দদায়ক। আসলে এই পর্বটি পড়লে আর অনুধাবন করতে সমস্যা হবে না যে মাত্র তিন রাশির এই দ্বিঘাত রাশির ভূবনটি বিস্ময়করভাবে প্রশস্ত।

প্রথমত শিক্ষার্থীদের জেনে বিস্মিত হবার কথা যে :

● দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলির সাথে দ্বিঘাত রাশির সহগগুলির এবং ধ্রুবকের সম্পর্ক আছে। (যেমন, $a^2 + bx + c$-এ a এবং b হলো যথাক্রমে x^2 এবং b এর সহগ এবং c হলো ধ্রুবক।)

● ফলে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের সহগ এবং ধ্রুবকের মধ্যকার প্রয়োজনীয় সম্পর্ক দেয়া থাকলে সমীকরণটিকে নির্মাণ করা যায় এবং দ্বিঘাত সূত্র বা অন্য কোনো পদ্ধতি প্রয়োগের মাধ্যমে তা সমাধান না ক'রেও তার মূলগুলি বের করা যায়।

● এবং ফলে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের শুধু মূলগুলি দেয়া থাকলেও তা থেকে সমীকরণটিকে উদ্ধার করা যায়।

● সমাধান না ক'রেই x^2 এর ও x এর সহগ এবং ধ্রুবকের সম্পর্ক থেকে নির্ণয় করা যায় সমীকরণের মূল দুটি একই মানের কিন্তু বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে কিনা, কিংবা একে অপরের গুণাত্মক বিপরীত হবে কি না।

● দ্বিঘাত রাশিটির চিহ্ন কী হবে তা নির্ণয় করা যায়।

● কোন শর্ত সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত রাশিকে দু'টি সরল (অর্থাৎ এক-ঘাত বা linear) উৎপাদকে বিভক্ত করা যায় তা উক্ত উৎপাদকীকরণ না ক'রেও জানা সম্ভব। ইত্যাদি।

এ ছাড়াও *নিশ্চায়ক* বা *discriminant* (অর্থাৎ দ্বিঘাত সূত্রের b^2-4ac রাশিটি)-এর চরিত্র থেকেও যে সংশ্লিষ্ট সমীকরণের মূল সম্বন্ধে কয়েকটি তথ্য জানা যায়, তা-ও আমরা আগে দেখেছি। প্রকৃতপক্ষে এই পর্বে আলোচিত হবে আরো খুঁটিনাটি কিছু বিষয়, যেগুলির সবই অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

তবে বিস্তারিত শুরু করার আগে কয়েকটি প্রাথমিক তথ্য, যা আগেই আলোচিত হয়েছে, এখানে সংক্ষেপে আরেক বার উপস্থাপন করা যাক।

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ : $ax^2 + bx + c = 0$।

এখানে a হলো x^2 এর সহগ;

b হলো x এর সহগ;

c হলো ধ্রুবক।

দ্বিঘাত সমীকরণের *reduced form* : $x^2 + bx + c = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের *বিশুদ্ধ রূপ* : $x^2 + c = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের *সাধারণ সূত্র* :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখানে $b^2 - 4ac$ হলো *নিশ্চায়ক*।

নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হলে সমীকরণের মূলদ্বয় হবে কাল্পনিক, a + bi আকারের।

নিশ্চায়ক ধনাত্মক হলে সমীকরণের মূলদ্বয় হবে বাস্তব।

1. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের সংখ্যা

(Number of Roots of a Quadratic Equation)

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের সংখ্যা দুয়ের বেশি হতে পারে না।

A Quadratic Equation cannot have more than two roots.

প্রমাণ (PROOF) : ধরা যাক $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির তিনটি মূল : α, β, y। তাহলে প্রত্যেকটি মূলই প্রদত্ত সমীকরণটিকে ভিন্ন ভিন্ন ভাবে সিদ্ধ করবে। এভাবে তিনটি সমীকরণ পাওয়া যাবে :

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$ay^2 + by + c = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) থেকে (2) বিয়োগ ক'রে :

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) + c - c = 0$$

বা, $a(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + b(\alpha - \beta) = 0$

এখন α এবং β, আমাদের পূর্ব ধারণা (assumption) অনুসারে, ভিন্ন ভিন্ন মূল। ফলে $\alpha - \beta \neq 0$, এবং এ কারণে $\alpha - \beta$ দ্বারা অন্য কোনো রাশিকে ভাগ করা বৈধ। প্রাপ্ত সমীকরণকে $\alpha - \beta$ দ্বারা ভাগ ক'রে পাওয়া যায় :

$$a(\alpha + \beta) + b = 0 \ldots\ldots (4)$$

আবার (2) থেকে একই ভাবে (3) বিয়োগ করা যাক :

$$a(\beta^2 - y^2) + b(\beta - y) + c - c = 0$$

$$a(\beta + y)(\beta - y) + b(\beta - y) = 0$$

এখানেও $\beta \neq y$ ব'লে $\beta - y \neq 0$; ফলে $\beta - y$ দ্বারা যে-কোনো সংখ্যাকে ভাগ করা বৈধ। ভাগ ক'রে পাওয়া যায় :

$$a(\beta + y) + b = 0 \ldots\ldots (5)$$

এবার (4) থেকে (5) বিয়োগ ক'রে পাওয়া যায় :

$$a(\alpha + \beta - \beta - y) + b - b = 0$$

$$a(\alpha - y) = 0 \ldots\ldots (6)$$

এখন হয় $a = 0$, নইলে $\alpha - y = 0$। কিন্তু দু'টির কোনোটিই শূন্য হতে পারে না, কারণ $a = 0$ হলে সমীকরণটি আর দ্বিঘাত থাকে না, এবং α এবং y ভিন্ন মূল ব'লে $\alpha - y \neq 0$। অর্থাৎ সমীকরণ (6) একটি *আত্মবিরোধী* ঘটনা। এই আত্মবিরোধের (contradiction) উৎস হলো আমাদের পূর্বানুমানটি, যাতে আমরা ধ'রে নিয়েছিলাম যে

$ax^2 + bx + c = 0$ এর তিনটি মূল আছে। এর দ্বারা প্রমাণিত হয় যে দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশি মূল থাকতে পারে না।*

বিকল্প প্রমাণ : α যদি $f(x)$ এর একটি মূল হয়, তাহলে $f(x)$ কে $(x - \alpha)$ দ্বারা ভাগ করলে কোনো ভাগশেষ থাকবে না (যা আমরা এখানে প্রমাণ করব না)। তার মানে হলো এই যে $(x - \alpha)$ হলো $f(x)$ এর একটি উৎপাদক (কারণ কোনো সংখ্যাকে তার উৎপাদক দ্বারা ভাগ করলে কোনো ভাগশেষ থাকে না)। তাহলে, ধরা যাক, $f(x)$ এর দু'টি মূল α এবং β। সেক্ষেত্রে $(x - \alpha)$ এবং $(x - \beta)$ হবে $f(x)$ এর দু'টি উৎপাদক। অর্থাৎ $f(x)$ কে এভাবে উৎপাদকের মাধ্যমে লেখা যায় :

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

এখন ধরা যাক $f(x)$ এর আরেকটি মূল আছে, y, যা থেকে তার আরেকটি উৎপাদক পাওয়া যায় : $(x - y)$। তাহলে :

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - y) = 0$$

কিন্তু x-সমন্বিত এই তিনটি উৎপাদককে গুণন ক'রে যে রাশি পাওয়া যায়, তাতে x এর সর্বোচ্চ ঘাত হলো 3, 2 নয় (অর্থাৎ $x \cdot x \cdot x = x^3$)। সুতরাং $f(x)$ যদি দ্বিঘাত হয় তাহলে তার দু'য়ের অধিক মূল থাকতে পারে না।

এ প্রসঙ্গে আরেকটি তথ্য জেনে রাখা ভালো :

n ঘাতের যে-কোনো সমীকরণের মূল হলো nটি, তার বেশি নয়।

Every equation of the nth degree has n roots, and no more.

প্রমাণ (PROOF) : ধরি $f(x) = P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \ldots\ldots + Pn$ (লক্ষ্য করুন, $n = 2$ হলে $f(x) = P_0x^2 + P_1x + P_2$, এবং $n = 3$ হলে $f(x) =$

---

* একটি অসত্য সম্পর্ককে সত্য ধ'রে নিয়ে সঠিক এবং বৈধ উপায় অবলম্বন ক'রে তা থেকে আরেকটি সম্পর্কে উপনীত হয়ে দেখানো যায় যে প্রাপ্ত সম্পর্কটি অবৈধ এবং আত্মবিরোধী। সম্পর্ক নির্ণয় করার পদ্ধতি ছিল বৈধ, অথচ ফল দাঁড়ালো অবৈধ—কেন? তাহলে নিশ্চয়ই অবৈধ ছিল প্রথমকার ধ'রে নেয়া সম্পর্কটি। গণিতে অনেক বিষয়কেই সরাসরি প্রমাণ করা সহজ নয় বা সম্ভব নয়। ফলে সে-সব ক্ষেত্রে প্রমাণের এই পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। একে বলে প্রমাণের পরোক্ষ পদ্ধতি বা **indirect method of proof**। এই বইতে আমরা 'গাণিতিক আরোহ' নামে প্রমাণের আরেকটি পদ্ধতি সম্বন্ধে বিস্তারিত জানব। জ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় ব্যবহৃত এরূপ অন্যান্য পদ্ধতি সম্বন্ধে জানার জন্য দেখুন *চিন্তায় উপাদান*।

$P_0x^3 + P_1x^2 + P_2x + P_3$ . . . . . ইত্যাদি)। ধরা যাক $f(x) = 0$ এর একটি মূল আছে α_1, যা বাস্তব বা কাল্পনিক। তাহলে $(x - \alpha_1)$ দ্বারা $f(x)$ কে নিঃশেষে ভাগ করা যাবে, যেহেতু $(x - \alpha_1)$ হলো $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। ফলে :

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,(q_1(x))$$

যেখানে $q_1(x)$ হলো $(x - \alpha_1)$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করার পর লব্ধ ভাগফল (quotient) [∵ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল]। এই $q_1(x)$ এ x এর সর্বোচ্চ ঘাত হবে $f(x)$-এ x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের চেয়ে 1 কম : অর্থাৎ $n - 1$। এবার $q_1(x)$ এরও একটি মূল থাকবে, যা, ধারা যাক, α_2। তাহলে $q_1(x)$ নিশ্চয়ই $(x - \alpha_2)$ দ্বারা বিভাজ্য। ফলে :

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(q_2(x))$$

যেখানে $q_2(x)$-এ x এর সর্বোচ্চ ঘাত হলো $n - 2$। এভাবে অগ্রসর হলে অবশেষে আমরা $f(x)$ এর সবগুলি উৎপাদক পেয়ে যাব :

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(x - \alpha_3)\,.\,.\,.\,.\,(x - \alpha_n)$$

এভাবে শেষের উৎপাদকটি পাবার পর বাকি থাকবে $q_n(x)$ যেখানে x-এর সূচক হলো শূন্য ; অর্থাৎ $q_n(x^{\circ}) = 1$, যা একটি ধ্রুব সংখ্যা, কোনো চলক (variable) নয়।

সুতরাং $f(x)$ এর উৎপাদক পাওয়া যাবে nটি, এবং এদের যে-কোনো একটি উৎপাদককে শূন্য ক'রে দিলে $f(x) = 0$ হয়ে যাবে।* অতএব $f(x)$ এর জন্য আর কোনো উৎপাদক পাওয়া সম্ভব নয়। সুতরাং প্রমাণিত হলো যে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ nটি মূল থাকতে পারে। অবশ্য কিছু মূল পরস্পর সমান হতে পারে।

2. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি

(Nature of the roots of quadratic equations)

এর আগেই আমরা দ্বিঘাত সূত্রের নিশ্চায়ক থেকে কিভাবে তার মূলের প্রকৃতি সম্বন্ধে জানা যায় তা কিছুটা দেখেছি। এবারও একই বিষয় নিয়ে আলোচনা করা হবে, যার ফলে আলোচিত বিষয়ের কিছুটা পুনরাবৃত্তি ঘটবে, তবে এবার আমরা বিষয়টিকে আরেকটু বিশেষভাবে বিবেচনা করব।

a) সাধারণ আদর্শ রূপ (general standard form) $ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে :

---

* এ থেকে আরেকবার বুঝা যাচ্ছে যে কোনো রাশি α এর জন্য $f(x = \alpha) = 0$ হওয়া হলো $(x - \alpha)$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ ক'রে ভাগশেষ হিসেবে শূন্য পাওয়ার নামান্তর।

● এরূপ ক্ষেত্রে $b^2 - 4ac > 0$ হলে মূলদ্বয়, অর্থাৎ α ও β, বাস্তব (real)। এক্ষেত্রে $\alpha \neq \beta$।

● $b^2 - 4ac < 0$ হলে α ও β কাল্পনিক হবে এবং α এর রূপ $a + bi$ হলে β এর রূপ হবে $a - bi$। এক্ষেত্রেও $\alpha \neq \beta$।

● $b^2 - 4ac = 0$ হলে $\alpha = \beta$।

FOOD FOR THOUGHT

1. $2x^2 + kx - 4 = 0$ সমীকরণের k এর মান কেমন হলে মূলদ্বয় অবাস্তব হবে?

2. $5a^2 + 2x + c = 0$ সমীকরণের c এর কোন সর্বনিম্ন ঋণাত্মক মানের জন্য মূলদ্বয় হবে মূলদ সংখ্যা?

Hint : $b^2 - 4ac$ তে একে একে $c = -1, -2 \dots$ বসান, যতক্ষণ না পর্যন্ত নিশ্চয়াকটি প্রথম বারের জন্য পূর্ণবর্গ হচ্ছে।

3. $3x^2 - kx + 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান করতে হলে k এর মান হিসেবে কত বসাতে হবে?

b) Reduced form, অর্থাৎ $x^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে :

এক্ষেত্রেও পুরোপুরি a) এর নিয়মগুলিই প্রযোজ্য। তবে এখানে $a = 1$ ব'লে এ জাতীয় সমীকরণকে বিশেষভাবে পর্যবেক্ষণ করার অভ্যাস থাকলে সার্বিক বিষয়টিকে চিন্তা করতে বেশি সুবিধা হয়।

$b \neq 0, c \neq 0$ হলে :

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

অর্থাৎ অত্যন্ত সহজেই বুঝা যাচ্ছে যে b এর বর্গ c এর চারগুণ বা তার বেশি হলে α এবং β উভয়ই বাস্তব হবে। $b^2 = 4c$ হলে, বা $b^2 - 4c = d > 0$ হলে—যেখানে d একটি বর্গ সংখ্যা— α এবং β সর্বদা মূলদ (rational) হবে। অপরপক্ষে, $b^2 \neq 4c$ হলে, কিংবা $b^2 - 4c = d$ হলে—যেখানে d কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়—α, β সর্বদা বাস্তব মূলদ (irrational) হবে। আবার b এর বর্গ যদি সর্বদা c এর চারগুণের চেয়ে কম হয়, তাহলে α, β হবে কাল্পনিক।

উপরের আলোচনা থেকে আরো একটি বিষয় স্পষ্ট হয়ে উঠছে : কোনো দ্বিঘাত রাশির মূলদ (rational) সংখ্যায় উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট হবার যোগ্যতা। Reduced form এর $b^2 = 4c$ হলে, অর্থাৎ x এর সহগের বর্গ থেকে c এর চার গুণ বাদ দিলে যদি কিছু অবশিষ্ট না থাকে, তাহলে f(x) কে $(x \pm m)^2$ এই আকারের উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায়। আবার $b^2 - 4c = d$ হলে, এবং d একটি যোগবোধক $(d > 0)$ পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে, f(x) কে $(b_1 x \pm m)\ (b_1 x \pm n)$ আকারের দু'ট উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায়। সুতরাং কোনো দ্বিঘাত রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার আগে এই বিষয়গুলি এক নজর দেখে নিলেও অনেক সুবিধা পাওয়া যায়।

FOOD FOR THOUGHT

নিচের সমীকরণগুলি এবং প্রদত্ত সংশ্লিষ্ঠ তথ্যগুলি দেখে সমীকরণগুলির মূলগুলোর প্রকৃতি সম্বন্ধে মন্তব্য করুন।

1. $f(x) = x^2 + 8x + 16 = 0$

$$8^2 = \boxed{4 \times 16}$$

$\alpha = \text{—}?$

$\beta = \text{—}?$

f(x) এর উৎপাদকদ্বয়ের সাধারণ রূপ কী হবে? α ও β এর মধ্যকার সম্পর্ক কী হবে?

2. $f(x) = x^2 - 4x + \dfrac{7}{4} = 0$

$$4^2 - \boxed{4.\frac{7}{4} = 7} = 3^2$$

f(x) এর উৎপাদকদ্বয়ের সাধারণ প্রকৃতি কী হবে?

α . . . .

β . . . .

3. $f(x) = x^2 + 6x - 8 = 0$

$$6^2 \; (-) \; \boxed{-4.8, \text{ ie}, +32} = 9^2$$

f(x) এর উৎপাদকদ্বয়ের সাধারণ রূপ কী হবে?

α . . . .

β . . . .

3. $f(x) = x^2 + 3x - 2 = 0$

$$3^2 \; (-) \; \boxed{4.2} = 1 = 1^2$$

f(x), α, β সম্বন্ধে যা-কিছু বলা সম্ভব, বলুন।

5. একটি reduced form এর দ্বিঘাত সমীকরণের x এর সহগের বর্গ ধ্রুবপদের চারগুণের চেয়ে কম। সমীকরণটির মূল সম্বন্ধে মন্তব্য করুন এবং তাদের মধ্যকার সম্পর্ক কী তা বলুন।

উদাহরণ-1 : $f(x) = x^2 - 13x + 42.25$ হলে তাকে কি মূলদ রাশির উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যাবে? উৎপাদকের প্রকৃতি কেমন হবে?

সমাধান : এটি দ্বিঘাত রাশির reduced form। এখানে নিশ্চায়ক $b^2 - 4c$।

$\therefore b^2 - 4c$

$= 13^2 - 4\,(42.25)$

$= 0$

সুতরাং $\frac{-6 \pm \text{নিশ্চায়ক}}{2}$ এই সূত্রে –b এর সাথে কিছু যোগ বা তা থেকে কিছু বিয়োগ হচ্ছে না; কারণ নিশ্চায়ক = 0। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দু'টি উৎপাদক হবে একই, যাদের প্রত্যেককে শূন্য ক'রে দিলে একই মূল দুই বার পাওয়া যাবে। সুতরাং উৎপাদকের প্রকৃতি হবে এরূপ : $(x - m)^2$।

যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$$x^2 - 13x + 42.25 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 13x + \frac{169}{4} = 0$$

$$(x)^2 - 2.x.\frac{13}{2} + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = 0 \leftarrow$$

$$x = \frac{13}{2}$$

উদাহরণ-2 : $f(x) = x^2 + 7x - \frac{15}{4} = 0$ সমীকরণটিকে উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করা যাবে কি?

সমাধান : নিশ্চায়ক $b^2 - 4c$

$$= 7^2 - \left(4.\frac{15}{4}\right)$$

$$= 49 + 15$$

$$= 64$$

$$= 8^2$$

নিশ্চায়ক একটি বর্গ সংখ্যা ব'লে f(x) কে $(b_1x \pm m)$ $(b_2 x \pm n)$ আকারের দু'টি উৎপাদকে বিভক্ত করা যাবে। যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$$x^2 + 7x - \frac{15}{4} = 0$$

একে $ax^2 + bx + c = 0$ রূপে রূপান্তরিত ক'রে নেয়া যাক :

$$x^2.4 + 7x.4 - \frac{15}{4}.4 = 0.4$$

$$4x^2 + 28x - 15 = 0$$

$$4x^2 + 30x - 2x - 15 = 0$$

$$2x(2x + 15) - 1(2x + 15) = 0$$

$$(2x + 15)(25 - 1) = 0$$

উদাহরণ-3 : $f(x) = x^2 + 9x - \frac{19}{4} = 0$ হলে উৎপাদকের মাধ্যমে কি সমীকরণটিকে সমাধান করা সম্ভব? সমাধান না করেই এর মূলগুলি সম্বন্ধে মন্তব্য করুন।

সমাধান : এখানে $b^2 - 4c$

$$= 9^2 - \left(4\left(-\frac{19}{4}\right)\right)$$

$$= 81 + 19$$

$$= 10^2$$

মূলগুলি হবে মূলদ সংখ্যা। সুতরাং f(x) কে $(b_1x \pm m)(b_2x \pm n)$ আকারের দু'টি উৎপাদকে বিভক্ত করা যাবে।

সমীকরণটির মূল দু'টি যদি হয় α এবং β, তা হলে $\alpha \neq \beta$; α, β হবে মূলদ (rational)। **যাচাই ক'রে দেখা যাক :**

$$x^2 + 9x - \frac{19}{4} = 0$$

একে $ax^2 + bx + c = 0$ রূপে রূপান্তরিত ক'রে :

$$x^2.4 + 9x.4 - \frac{19}{4}.4 = 0.4$$

$$4x^2 + 36x - 19 = 0$$

$$4x^2 + 38x - 2x - 19 = 0$$

$$2x(2x + 19) - 1(2x + 19) = 0$$

$$(2x + 19)(2x - 1) = 0$$

অর্থাৎ f(x) এখন $(b_1x + m)(b_2x - n)$ এই আকারের দুটি উৎপাদকে বিভক্ত।

প্রকৃতপক্ষে $f(x) = ax^2 + bx + c$ আকারের হলে উপরের $b^2 - 4c$ এর স্থলে $b^2 - 4ac$ বসিয়ে হুবহু একই হিসাব-নিকাশ করা সম্ভব।

c) বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ (Pure quadratic equation) :

বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণের রূপ হলো $ax^2 + c = 0$, অর্থাৎ $ax^2 + bx + c = 0$ এর $b = 0$ হলে যা থাকে। এরূপ সমীকরণের মূল :

$$\alpha, \beta = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}$$

নিশ্চায়কটি (এমনকি সমীকরণটিও) দেখলেই বুঝা যাচ্ছে যে a বা c এর যে-কোনো একটি ঋণাত্মক না হলে মূল হবে কাল্পনিক। যেমন :

$$2x^2 + 8 = 0$$

এর মূল হবে কাল্পনিক, যেহেতু $\sqrt{-4.2.8}$ একটি ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল। এখানে 4ac কখনোই শূন্য হতে পারে না। (– 4ac) ঋণাত্মক হলে α, β এর মান বাস্তব হবে, এবং তা ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে $\alpha = \beta$ হবে। যেমন :

$$2x^2 - 8 = 0$$

এর মূল দুটি সমান ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

d) c = 0 হলে :

সেক্ষেত্রে সমীকরণটি দাঁড়ায় $ax^2+bx = 0$; ফলে তাকে $x\,(ax+b) = 0$ হিসেবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় ব'লে x এর একটি মূল সব সময়ে শূন্য হয়ে যায়। ফলে এরূপ সমীকরণের মূল কখনোই কাল্পনিক হতে পারে না। অপর মূলটি হবে :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.0}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a}$$

$$= \frac{-b-b}{2a} \text{ এবং } \frac{-b+b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a} \text{ এবং } 0$$

সুতরাং অপর মূলটি হবে $-\frac{b}{a}$। $ab > 0$ হলে এই মূলটি হবে ঋণাত্মক, এবং $ab < 0$ হলে এটি হবে ধনাত্মক।

FOOD FOR THOUGHT

কোনো সমীকরণ সমাধান না ক'রেই নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দিতে হবে।

1. নিচের সমীকরণগুলির মূলগুলো সম্পর্কে মন্তব্য করুন :

a) $x^2 + x = 0$

b) $3x^2 + 9 = 0$

c) $30x^2 - 43x = 0$

2. $6x^2 - 9x + k = 0$ তে k এর মান কত হলে x এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি মূল শূন্য হবে?

3. $6x^2 + 9x + k = 0$ হতে k এর মান কত হলে x এর একটি মান শূন্য হবে? k এর উক্ত মানের জন্য সমীকরণটির অপর মূলটি কী হবে?

3. দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক

(Relationship between the roots and the coefficients of a quadratic equation)

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় এবং সহগদ্বয় ও ধ্রুবকের মধ্যে স্পষ্ট সম্পর্ক রয়েছে। আমরা আগেই জেনেছি যে এই সম্পর্ক এত পরিপূর্ণ যে এগুলো জেনে আমরা কোনো দ্বিঘাত সমীকরণকে গঠন করতে পারি, কিংবা তা গঠন না ক'রেই তার মূলগুলি নির্ণয় করতে পারি, কিংবা এসব ব্যাপারে অত্যন্ত অপর্যাপ্ত তথ্য জেনেও আমরা ব'লে দিতে পারি সমীকরণটির মূলদ্বয়ের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক কী। আর এসব কিছুর মূলে রয়েছে দ্বিঘাত সমীকরণ। যার সাথে আমরা এখন পুরোপুরি পরিচিত। সূত্রটি ছিল এরূপ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখন ধরা যাক সমীকরণের দুটি মূল α এবং β। তাহলে :

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[α ও β কে পরস্পর বিনিময়ও করা যেত।]

তাহলে, $\alpha + \beta = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac = D$ ধ'রে :

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

অর্থাৎ $\boxed{\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}}$ . . . . (i)

অর্থাৎ পাওয়া গেল যে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল হবে x-এর সহগ এবং x^2এর সহগের ভাগফলের বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান। অর্থাৎ :

$$\boxed{\alpha + \beta = (-)\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{ এর সহগ}}}$$

আবার $\alpha\beta = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{(-b) + \sqrt{D}}{2a} \times \frac{(-b) - \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left\{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\{b^2 - D\}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

অর্থাৎ $\boxed{\alpha\beta = \dfrac{c}{a}}$ . . . . (ii)

অন্য কথায় মূলদ্বয়ের গুণফল হবে ধ্রুবক এবং x^2 এর সহগের ভাগফল; বা

$$\boxed{\alpha\beta = \frac{\text{ধ্রুবক}}{x^2 \text{ এর সহগ}}}$$

এই পর্যন্ত আমরা দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় এবং তার সহগদ্বয় ও ধ্রুবকের মধ্যকার দু'টি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক পেলাম। প্রকৃতপক্ষে এই দু'টি সম্পর্ক থেকেই α এবং β এর মান বের করা যায়। শুধু তাই নয়, এগুলির মাধ্যমে সমীকরণটিকেও গঠন করা যায়। নিচের উদাহরণগুলি থেকে তা স্পষ্ট বোঝা যাবে। তবে তার আগে নিচের অনুশীলনীটি অবশ্যই করতে হবে।

FOOD FOR THOUGHT

1. সমীকরণটিকে সমাধান না ক'রে $-x^2 + 2x + 15 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল বের করুন, এবং তা থেকে মূলদ্বয়ের মান বের করুন।

Hint : $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ বের করার পর $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ সূত্রের মাধ্যমে $\alpha - \beta$ এর মান নির্ণয় ক'রে তার সাথে $\alpha + \beta$ যোগ ক'রে α এবং β এর মান নির্ণয় করা যায়। অবশ্য অন্য উপায়ও অবলম্বন করা যায়।

2. গাণিতিক পদ্ধতির আশ্রয় না নিয়ে দেখান যে (মাত্র ২/৩ টি বাক্যে) সহগদ্বয় এবং ধ্রুবক বাস্তব সংখ্যা হলে যে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের কাল্পনিক মূলদ্বয়ের যোগফল বা গুণফল সর্বদাই বাস্তব সংখ্যা হবে।

Hint : যেহেতু মূলদ্বয়ের গুণফল সর্বদা $\frac{c}{a}$ এর এবং যোগফল সর্বদা $-\frac{b}{a}$ এর সমান, সেহেতু তা কখনই কাল্পনিক হতে পারে না।

3. নিচের সমীকরণগুলিকে সমাধান না ক'রে α এবং β এর মান বের করুন।

(a) $3x^2 + 4x + 9 = 0$

(b) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

(c) $x^2 - 30x + 1 = 0$

(d) $2x^2 + 5x - 14 = 0$

4. $ax^2 + bx + c = 0$ এর $a = 1$ হলে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ কে b এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

5. $ax^2 + bx + c = 0$ এর $c = 0$ হলে $\alpha\beta$ কে সমীকরণটির কোনো সহগের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

6. $ax^2 + bx + c = 0$ এর $b = 1$ হলে $\alpha + \beta$ এর মান সহগের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

7. $ax^2 + bx + c = 0$ তে $b = 0, c = 0$ হলে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান কী কী হবে?

8. $ax^2 + bx + c = 0$ এর $a = 1$ এবং $b = 1$ হলে $\alpha + \beta$ এর $\alpha\beta$ এর মানগুলি কেমন হবে?

9. কিছু সমীকরণ গঠন ক'রে উপরের 4, 5, 6 এবং 8 নং প্রশ্নের উত্তরে প্রাপ্ত সম্পর্কগুলোর সত্যতা যাচাই করুন।

এখন আমরা কিছু গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ দেখব। তবে তার আগে আরেকটি জিনিস দেখে নেয়া যাক, যা ইতোমধ্যে উপরোক্ত অনুশীলনীতেই করা হয়ে গেছে। $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটিকে reduced form-এ রূপান্তরিত করা যাক। তা করার জন্য উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করতে হবে :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$\boxed{x + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0} \quad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

এ হলো reduced form যাতে $a = 1$। এখানে একটি চমৎকার জিনিস দেখা যাচ্ছে। Reduced form এর দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল হয় তার x-এর সহগের সমান—শুধু চিহ্নটা বদলে যায়, এবং মূলদ্বয়ের গুণফল হয় তার ধ্রুবক বা অনক্ষেপ পদের (absolute term) সমান। তাহলে যদি একটি সমীকরণ, যেমন $x^2 - 4x - 21 = 0$ দেয়া হয়, তাহলে একে উৎপাদকে বিশ্লেষণ না ক'রে কিংবা সূত্র ব্যবহার না ক'রেই আমরা এর মূলগুলি এভাবে বের করতে পারব :

$$\alpha + \beta = -(-4) = 4$$

$$\alpha\beta = -21$$

$$\text{জানা আছে : } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$
$$= 16 + 84$$
$$= 100$$
$$\alpha - \beta = \sqrt{100} = \pm 10$$

এখন প্রথম এবং শেষ সম্পর্ক দুটি থেকে α ও β এর মান পাওয়া যাবে। অবশ্য প্রথম দু'টি সম্পর্ক থেকে মুখে মুখেই মূল দুটোর মান বের করা যেত : -21 কে এমন দুটি উৎপাদকে ভাগ করতে হবে যাদের যোগফল হবে 4। তাহলে $-21 = 7 \times (-3)$, কারণ $7 + (-3) = 4$। সুতরাং মূল দুটি হলো 7 ও -3।

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, অর্থাৎ—

x^2 – (মূলদ্বয়ের যোগফল) . x + (মূলদ্বয়ের গুণফল) = 0

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(iv)}$

এভাবে যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণকে তার মূলদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। সমীকরণটির বাম পার্শ্বকে এভাবেও দেখানো যায় : $(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(v)}$

উদাহরণ-1 : একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় 7 ও 11। মূলদ্বয় বের করার পর গবেষক প্রাপ্ত সমীকরণটিকে হারিয়ে ফেলেছেন। এখন তিনি বুঝতে পেরেছেন যে তিনি সমীকরণটিকে ঠিক মতো গঠন করতে পারেননি। তাতে ধ্রুব পদটি হবে 57.77। এখন এই তথ্যগুলো থেকে তিনি কিভাবে আগের সমীকরণটি নির্ণয় করবেন এবং তা থেকে এখন কিভাবে সঠিক সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত করবেন? ধ'রে নিতে হবে যে তাঁর হিসাবে কোনো ভুল ছিল না।

সমাধান : আগের সমীকরণটি ছিল :

$$x^2 - (7 + 11)x + (7)(11) = 0$$
$$\text{OR } x^2 - 18x + 77 = 0$$

সুতরাং পরিশোধিত সমীকরণটি হবে :

$$x^2 - 18x + 57.77 = 0$$

উদাহরণ-2 : $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি যদি হয় α ও β, তাহলে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করুন যার মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$।

(If α, β are the roots of the equation $px^2 + qx + r = 0$, then find out the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.)

সমাধান : মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha}$

$$= 1$$

সুতরাং $x^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right) x + 1 = 0$ [(iv) অনুসারে]

$$x^2.\alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}.\,\alpha\beta.x + 1.\alpha\beta = 0.\alpha\beta$$

$$x^2.\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)\,x + \alpha\beta = 0$$

এখানে $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(-\frac{q}{p}\right)^2 - 2\,.\frac{r}{p}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p}$$

$$= \frac{q^2 - 2pr}{p^2}$$

এই মানগুলি সমীকরণে বসিয়ে :

$$x^2.\frac{r}{p} - \frac{q^2 - 2pr}{p^2}\,x + \frac{r}{p} = 0$$

$prx^2 - (q^2 - 2pr)\,x + pr = 0$ [উভয় পক্ষকে p^2 দ্বারা গুণন ক'রে]

সুতরাং উপরোক্ত সমীকরণটিই উদ্দিষ্ট সমীকরণ।

উদাহরণ-3 : $x = \frac{7 + \sqrt{-3}}{2}$ হলে $f(x) = x^2 - 7x + 13$ এর মান কত? দেখান যে $x = \frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$ বসালেও $f(x)$ এর মান অপরিবর্তিত থাকবে। কারণ দর্শান।

(Find the value of $f(x) = x^2 - 7x + 13$ for $x = \frac{7 + \sqrt{-3}}{2}$. Show that the value will remain the same if x is set equal to $\frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$. Explain why.)

সমাধান : ধরি $\alpha = \frac{7 + \sqrt{-3}}{2}$ এবং $\beta = \frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$। এখন α এবং β কাল্পনিক রাশি দুটি যেহেতু একে অপরের *অনুবন্ধী (conjugate)*, সেহেতু ধরে নিতে পারি যে এগুলি কোনো একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূল (কারণ, *দ্বিঘাত সমীকরণের কাল্পনিক মূল দুটি সর্বদা অনুবন্ধী আকারে থাকে।*)। তাহলে :

$$\alpha + \beta = \frac{7 + \sqrt{-3}}{2} + \frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$= \frac{7 + \sqrt{-3} + 7 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$= \frac{14}{2}$$
$$= 7$$

[অর্থাৎ α, β যে সমীকরণের মূল, তার $-\frac{b}{a} = 7$]

আবার :

$$\alpha\beta = \frac{7 + \sqrt{-3}}{2} \times \frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(7 + \sqrt{-3}\right)\left(7 - \sqrt{-3}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{7^2 - (\sqrt{-3})^2\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\{49 - (-3)\}$$
$$= \frac{1}{4}\{49 + 3\}$$

$$= \frac{1}{4} \times 52$$

$$= 13$$

$$\left[\text{অর্থাৎ } \frac{c}{a} = 13\right]$$

সুতরাং সমীকরণটি হবে [(iv) অনুসারে]

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - 7x + 13 = 0$$

দেখা যাচ্ছে যে α এবং β কে মূল ধ'রে গঠিত সমীকরণের বামপক্ষ প্রদত্ত $f(x)$ এর সাথে অভিন্ন। এবং α ও β উভয়ের যে-কোন মান x-এর স্থলে বসালে $f(x) = 0$ পাওয়া যায়। কারণ, যা ইতোমধ্যেই বলা হয়েছে, হলো এই যে α এবং β উভয়েই $f(x) = 0$ এর মূল। বহুবদীর (polynomial) ধারণা প্রয়োগ ক'রে বলা যায়,* α এবং β হলো $f(x)$ এর শূন্য (zero)।

মন্তব্য : প্রকৃতপক্ষে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের $f(x)$ উভয় মূল দ্বারাই তা সিদ্ধ হয়। একই কারণে $f(x)$ যে ফাংশনের [ধরি $F(x)$] উৎপাদক, তাতেও [অর্থাৎ $F(x)$-এ] উক্ত α, β-এর মান বসিয়ে একই মান পাওয়া যাবে। নিচের উদাহরণটি থেকে তা বুঝা যাবে।

বিঃ দ্রঃ সমাধানটি $f(x)$-এ সরাসরি x এর মানগুলো বসিয়ে করা যেত। নিজে চেষ্টা করুন।

উদাহরণ-4 : $x = \dfrac{7 + \sqrt{-3}}{2}$ বসালে $F(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 48$ এর মান কত হয়? $x = \dfrac{7 - \sqrt{-3}}{2}$ বসালে $F(x)$ এর মান কত হয়? কেন?

সমাধান : ধরি $\quad \alpha = \dfrac{7 + \sqrt{-3}}{2}$

$$\beta = \frac{7 - \sqrt{-3}}{2}$$

এবার উদাহরণ-3 অনুসরণে $f(x) = 0$ সমীকরণটি বের করি যার মূলদ্বয় হলো α এবং β। এভাবে

$f(x) = 0$ হলে :

$$x^2 - 7x + 13 = 0$$

* বহুপদীর বিস্তারিত ধারণা পাওয়া যাবে 'এই বইয়ের পরবর্তী খণ্ডে।

এখন : $F(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 48$

$$= x^3 - 7x^2 + 3x^2 - 21x + 13x + 39 + 9$$
$$= x^3 - 7x^2 + 13x + 3x^2 - 21x + 39 + 9$$
$$= x(x^2 - 7x + 13) + 3(x^2 - 7x + 13) + 9$$
$$= x.f(x) + 3.f(x) + 9$$

দেখা যাচ্ছে যে F(x) হলো f(x) এর গুণিতকের যোগফলের চেয়ে 9 বেশি। তাহলে F(x)-এর f(x) = 0 বসানো যাক।

$$F(x) = x.0 + 3.0 + 9$$
$$= 9$$

অর্থাৎ α এবং β উভয়কে ভিন্ন ভিন্ন ভাবে x এর মান হিসেবে বসালে F(x) = 9 পাওয়া যাবে।

উদাহরণ-5 : f(x) = 0 এর মূল 3, – 4, $\frac{4}{5}$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

(Form the equation having the roots 3, – 4, $\frac{4}{5}$.)

সমাধান : আমরা পূর্ববর্তী সমীকরণ (v)-এ দেখেছি যে α ও β একটি সমীকরণের মূল হলে সমীকরণটিকে এভাবে গঠন করা যায় :

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

প্রকৃতপক্ষে দুয়ের অধিক মূলবিশিষ্ট সমীকরণের বেলায়ও [তখন অবশ্য আর সমীকরণটি দ্বিঘাত থাকে না] একই কথা প্রযোজ্য। তাহলে নির্মীতব্য সমীকরণের উৎপাদকগুলি হবে $(x - 3)$, $(x + 4)$, $\left(x - \frac{4}{5}\right)$, এবং 1। সুতরাং :

$$f(x) = (x - 3)(x + 4)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\text{OR} \quad (x^2 + x - 12)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\text{OR} \quad x^3 + x^2 - 12x - \frac{4}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{48}{5} = 0$$

$$\text{OR} \quad x^3 + \frac{x^2}{5} - \frac{64x}{5} + \frac{48}{5} = 0$$

$$\text{OR} \quad x^3.5 + \frac{x^2}{5}.5 - \frac{64x}{5}.5 + \frac{48}{5}.5 = 0.5$$

$$\text{OR} \quad 5x^3 + x^2 - 64x + 48 = 0$$

উদাহরণ-6 : k এর মান কত হলে $x^2 + 2kx + 2x + k^2 + 2k + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হবে?

(For what value of k will the roots of $x^2 + 2kx + 2x + k^2 + 2k + 10$ equal to each other.)

সমাধান : এখানে f(x) এর মান শূন্য হবে কেবল তার মূলদ্বয়কে x এর স্থলে বসালে। আপাতত k-কে গ্রাহ্য ক'রে মূলদ্বয়কে α, β ধ'রে তাদের মান নির্ণয় করার চেষ্টা করা যাক।

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x^2 + 2kx + 2x + k^2 + 2k + 1 &= 0 \\
x^2 + (2k + 2)x + (k^2 + 2k + 1) &= 0 \\
\text{এখন } \alpha + \beta &= -2k - 2 \\
\alpha\beta &= k^2 + 2k + 1 \\
(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
&= (-2k - 2)^2 - 4(k^2 + 2k + 1) \\
&= \{-2(k + 1)\}^2 - 4k^2 - 8k - 4 \\
&= 4(k^2 + 2k + 1) - 4k^2 - 8k - 4 \\
&= 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 8k - 4 \\
&= 0 \\
\alpha - \beta &= 0
\end{aligned}$$

দেখা যাচ্ছে যে α এবং β এর জন্য কোনো মান পাওয়া সম্ভব নয়; শুধু এটিই পাওয়া যাচ্ছে যে α = β, যা প্রশ্নে দেয়া আছে। এ থেকে বুঝা যায় যে k এর যে-কোনো মানের জন্য $\alpha - \beta = 0$ হবে বা $\alpha = \beta$ হবে।

যাচাই (Check) : K = 2 ধ'রে :

$$\begin{aligned}
x^2 + 2.2.x + 2x + x^2 + 2.2 + 1 &= 0 \\
x^2 + 6x + 9 &= 0 \\
(x + 3)^2 &= 0 \\
x &= 3 \text{ এবং} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$k = -5$ ধ'রে

$$x^2 + 2(-9)x + 2x + (-9)^2 + 2(-9) + 1 = 0$$
$$x^2 - 18x + 2x + 81 - 18 + 1 = 0$$
$$x^2 - 16x + 64 = 0$$
$$(x-8)^2 = 0$$
$$x = 8 \text{ এবং}$$
$$x = 8$$

এভাবে k-এর যে-কোনো মানের জন্যই দেখানো যায় যে $\alpha = \beta$ হবে।

বিকল্প প্রমাণ : এই প্রমাণটি কারো কারো কাছে আরো বেশি বোধগম্য বা স্পষ্ট ব'লে মনে হতে পারে।

$$x^2 + 2kx + 2x + k^2 + 2k + 1 = 0$$
$$x^2 + (2kx + 2x) + (k^2 + 2k + 1) = 0$$
$$x^2 + 2.k.(k+1) + (k+1)^2 = 0$$
$$\{x + (k+1)\}^2 = 0$$
$$\{x + (k+1)\}\{x + (k+1)\} = 0$$

দেখা যাচ্ছে যে k-এর মান যা-ই হোক, x-এর একটিই মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ k এর সকল মানের ক্ষেত্রে $\alpha = \beta$।

নিশ্চায়ক দ্বারা প্রমাণ :

$$x^2 + 2kx + 2x + k^2 + 2k + 1 = 0$$
$$x^2 + x(2k+2) + (k^2 + 2k + 1) = 0$$
$$\text{নিশ্চায়ক} = (2k+2)^2 - 4.1.(k^2 + 2k + 1)$$
$$= 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 8k - 4$$
$$= 0$$

নিশ্চায়ক k-এর যে-কোনো মানের জন্যই শূন্য। আমরা জানি যে নিশ্চায়কের মান শূন্য হলে মূলদ্বয় অবশ্যই সমান হবে। সুতরাং k-এর যে-কোনো মানের জন্য $\alpha = \beta$।

4. যে শর্ত-সাপেক্ষে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় (1) যোগাত্মক বিপরীত (অর্থাৎ সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত) হবে, (2) একে অপরের গুণাত্মক বিপরীত (multiplicative inverse) হবে, (3) একটি মূল শূন্য হবে, বা (4) উভয় মূলই শূন্য হবে, তা নির্ণয় করতে হবে।

(To find the condition that the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ should (1) be additive inverses of each other, ie, equal in magnitude but opposite in sign, (2) be multiplicative inverses of each other, ie, reciprocals, (3) have only one root equal to zero, or (4) have both roots equal to zero.)

(1) দুটি মূল সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে, ধরি তারা হবে $\alpha, -\alpha$।

তাহলে
$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= -\frac{b}{a}\\ \alpha - \alpha &= -\frac{b}{a}\\ 0 &= -\frac{b}{a}\\ 0 &= -b\\ 0 &= b\end{aligned}$$

অর্থাৎ $b = 0$ হলে দুটি মূলের মান হবে অভিন্ন কিন্তু চিহ্ন হবে ভিন্ন। অন্য কথায়, বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণের ($ax^2 + c = 0$) মূল দুটি হবে এই প্রকৃতির।

(2) একটি মূল অপরটির গুণাত্মক বিপরীত হলে তাদেরকে এভাবে চিহ্নিত করা যায় :

$\alpha, \frac{1}{\alpha}$।

তাহলে :
$$\begin{aligned}\alpha . \frac{1}{\alpha} &= \frac{c}{a}\\ 1 &= \frac{c}{a}\\ a &= c\end{aligned}$$

অর্থাৎ $ax^2 + bx + a = 0$ (যেখানে $c = a$)—এই সমীকরণের দুটি মূল হবে পরস্পর গুণাত্মক বিপরীত (reciprocal)। এভাবে $\frac{c}{a} = -1$ হলে মূল দুটি হবে α এবং $-\frac{1}{\alpha}$।

(3) একটি মূল শূন্য হলে মূল দুটিকে এভাবে চিহ্নিত করা যায় : $\alpha, 0$। তাহলে মূলদ্বয়ের গুণফল :

$$\begin{aligned}\alpha . 0 &= \frac{c}{a}\\ 0 &= \frac{c}{a}\\ 0 &= c\end{aligned}$$

অর্থাৎ $c = 0$ হলে মূল দুটির একটি হবে শূন্য, যা অবশ্য আমরা আগেই দেখেছি।

(4) উভয় মূল শূন্য হলে :

$$0 + 0 = -\frac{b}{a}$$

$$0 = b$$

এবং
$$0.0 = \frac{c}{a}$$

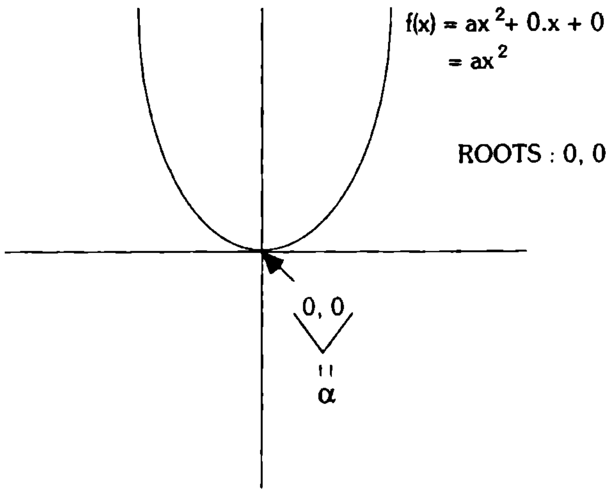
$$0 = c$$

অর্থাৎ শুধু $ax^2 + 0 . x + 0 = ax^2 + 0 + 0 = ax^2$ রূপের উভয় মূলই হবে শূন্য। বলুনতো কেন? এখানে পূর্বে আলোচিত বিষয়ও আলোচনা করা হয়েছে মূলত এক জাতীয় তথ্যকে পাশাপাশি সাজানোর জন্য। তাতে পুনরাবৃত্তির দোষ ঘটলেও প্রাথমিক পর্যায়ের শিক্ষার্থীদের জন্য সুবিধা হবে। নিচের তালিকায় এই গুরুত্বপূর্ণ তথ্যগুলি একত্রে উপস্থাপন করা হলো।

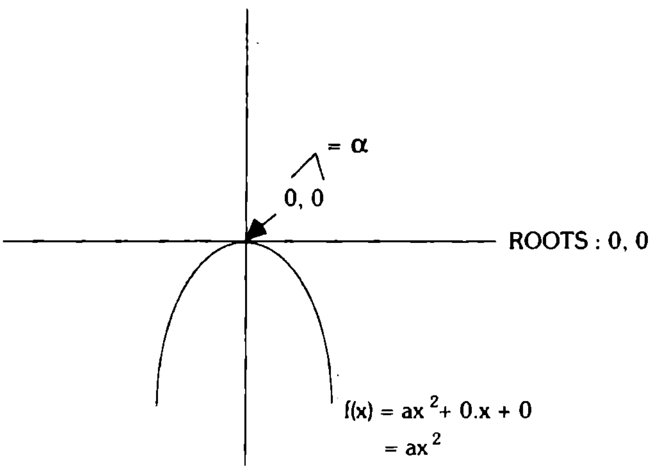
দ্বিঘাত সমীকরণের a, b, c এর বিভিন্ন মানের ওপর α ও β এর মানের নির্ভরশীলতার চিত্র।

a, b, c-এর বিভিন্ন মান						α/β-এর প্রকৃতি
a	x^2 +	b	x +	c	= 0	
a		b		0		$0, \alpha$
a		0		c		$\alpha, -\alpha$
0		b		c		সরল সমীকরণ, দ্বিঘাত নয়
a		0		0		$0, 0$
a		b		a		$\alpha, \frac{1}{\alpha}$
a		b		$-a$		$\alpha, -\frac{1}{\alpha}$

এবার চিত্রের মাধ্যমে উপরোক্ত তথ্যগুলি দেখা যাক।

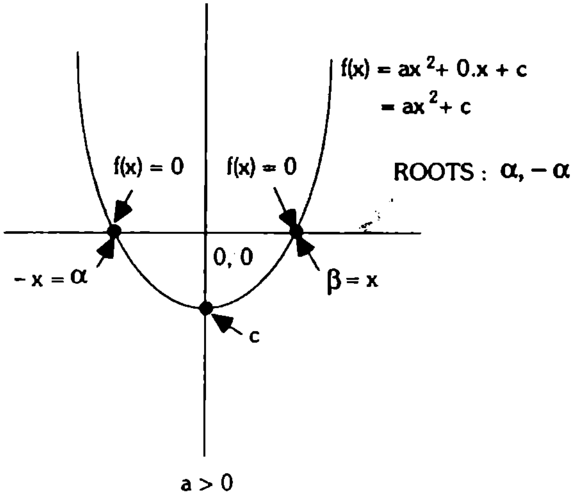


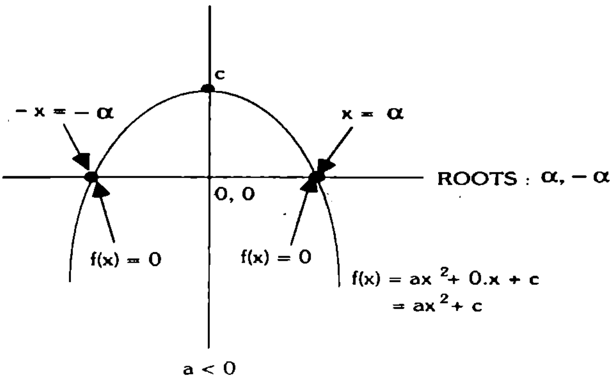
a > 0



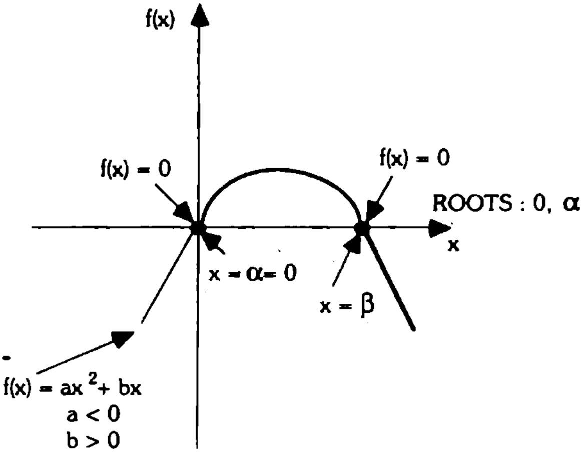
a < 0

অর্থাৎ $ax^2 = 0$তে $a>0$ বা $a<0$ যা-ই হোক না কেন, মূলদ্বয় শূন্য হবে।





অর্থাৎ $a>0$ বা $a<0$ হলে $ax^2 + c = 0$ এর মূলদ্বয় হবে $\alpha, -\alpha$।



এভাবে $a>0$ এবং $b>0$, $a<0$ এবং $b<0$, দ্বারা গঠিত $ax^2 + bx$-এর graph আঁকলে দেখা যাবে যে তার একটি প্রান্ত মূলবিন্দু দিয়ে যাবেই, কিন্তু অপরটি যাবে না। ফলে $\alpha = 0$, $\beta >$ OR < 0।

বি:দ্র: কোনো Polynomial ফাংশানের graph কিভাবে আঁকতে হয়, কোন জাতীয় ফাংশানের সাধারণ প্রকৃতি কেমন হয়, ইত্যাদি বিষয়ে ক্যালকুলাস খণ্ডে এবং জ্যামিতি খণ্ডে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

এবার নিচের অনুশীলনীটি করুন।

FOOD FOR THOUGHT

নিচের সমীকরণের a, b, c-এর মান থেকে মূলগুলোর প্রকৃতি বর্ণনা করুন। মূলগুলিকে গ্রাফ দ্বারা চিহ্নিত করুন।

1) $9x^2 = 0$

2) $2x^2 - 18 = 0$

3) $-5x^2 + 75 = 0$

4) $6x^2 - 24x = 0$

5) $-3x^2 + 6x = 0$

5. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলির চিহ্ন (Signs of the roots of the quadratic equation)

যে শর্ত সাপেক্ষে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির (i) উভয় মূল যোগবোধক হবে, (ii) উভয় মূল বিয়োগবোধক হবে, বা (iii) একটি মূল যোগবোধক এবং অপরটি বিয়োগবোধক হবে, তা নির্ণয় করতে হবে।

(To determine the condition that the equation $ax^2 + bx + c = 0$ should have (i) both roots positive, (ii) both roots negative, or (iii) one root positive and the other negative.)

ধরা যাক $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

(i) যেহেতু $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, সেহেতু, $\frac{-b}{a} > 0$ এবং $\frac{c}{a} > 0$ হতে হবে। কিন্তু $\frac{-b}{a} > 0$ হবে তখনই যখন সমীকরণে b হবে ঋণাত্মক অর্থাৎ (ie, $b<0$ {(–) b →– (– b) → (+) b}। কিন্তু b ঋণাত্মক হওয়া সত্ত্বেও যদি c ঋণাত্মক হয়, কিংবা a ঋণাত্মক হয়, তাহলে $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ এর $\frac{c}{a} < 0$ হবে, যার ফলে α ও β-এর যে-কোনো একটি বা উভয়টি ঋণাত্মক হয়ে যাবে। সুতরাং শুধু $b < 0$ হলেই চলবে না, তার চিহ্নের সাথে a ও c এর চিহ্নের সম্পর্ক থাকতে হবে।

			$\alpha + \beta =$	$\alpha\beta =$	$\alpha > \beta$ ধরলে	
a	b	c	$\frac{-b}{a}$	$\frac{c}{a}$	α	β
+	+	+	−	+	−	−
+	+	−	−	−	−	+
+	−	−	+	−	+	−
−	−	−	−	+	−	+
−	−	+	−	−	−	+
−	+	+	+	−	+	−
+	−	+	+	+	+	+ ⇐
−	+	−	+	+	+	+ ⇐

উপরের তালিকাটির বিভিন্ন সম্পর্ককে বিচ্ছিন্নভাবে মুখস্থ রাখা কঠিন, তবে সেখানে থেকে কয়েকটি চমৎকার সাধারণ সম্পর্ক পাওয়া যাচ্ছে :

i) a ও c-এর চিহ্ন অভিন্ন হলে, এবং তা b-এর চিহ্নের বিপরীত হলে α ও β উভয়েই ধনাত্মক হবে।

ii) a ও b-এর চিহ্ন একই হলে মূলদ্বয়ের মধ্যে বড়টির (তালিকায় α-এর) মান অবশ্যই ঋণাত্মক হবে, এবং কেবল a, b, c সবগুলোর চিহ্ন ধনাত্মক হলে উভয় মূল ঋণাত্মক হবে।

iii) b ও c-এর একই চিহ্ন হলে (a-এর চিহ্নের উপর নির্ভরশীল না হয়েই) মূলদ্বয়ের মধ্যে বড়টির চিহ্ন ধনাত্মক এবং ছোটটির চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

iv) a ও c-এর একই চিহ্ন হলে উভয় মূলের চিহ্ন একই হবে—ধনাত্মক বা ঋণাত্মক।

এই সাধারণীকরণের (generalization) পরও সম্পর্কগুলিকে মুখস্থ রাখতে অনেকের অসুবিধা হতে পারে। কিন্তু নিচের অনুশীলনীটি করলে উক্ত সমস্যা অনেকাংশেই দূরীভূত হয়ে যাবে।

FOOD FOR THOUGHT

1. নিচের সমীকরণগুলিকে সমাধান না ক'রেই কেবল a, b, c-এর চিহ্ন দেখে α ও β (যেখানে $\alpha>\beta$) এর চিহ্নগুলো কী হবে তা বলুন।

1) $2x^2 + x + 5 = 0$

2) $2x^2 + x - 5 = 0$

3) $2x^2 - x - 5 = 0$

4) $-2x^2 - x - 5 = 0$

5) $-3x^2 - 2x + 10 = 0$

6) $-6x^2 + 7x + 15 = 0$

7) $3x^2 - 4x + 7 = 0$

8) $-10x^2 + 4x - 20 = 0$

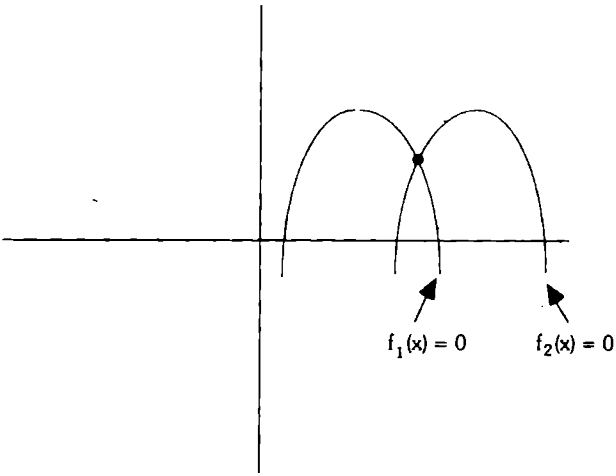
9) $9x^2 + x - 45 = 0$

10) $6x^2 - 3x + 11 = 0$

2. $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণটির বৃহত্তর মূলটি ঋণাত্মক এবং ক্ষুদ্রতর মূলটি ধনাত্মক হলে m, n, l-এর চিহ্ন কী হবে তা নির্ণয় করুন।

6. দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল (Common roots of quadratic equations)

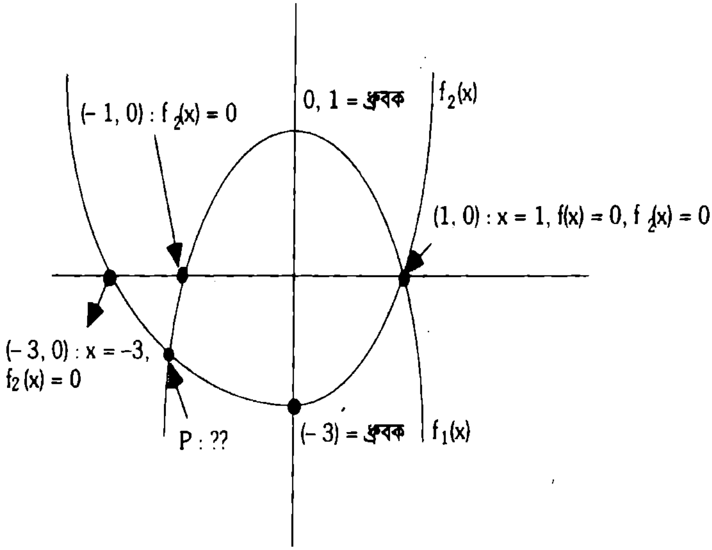
কোনো দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বা দুটি সাধারণ মূল থাকতে পারে। একটি সাধারণ মূল থাকলে সংশ্লিষ্ট দ্বিঘাত ফাংশান দুটির curve পরস্পরকে x-অক্ষে একটি বিন্দুতে ছেদ (intersect) করবে। সাধারণ মূল দুটি থাকলে তারা ছেদ করবে দুটি বিন্দুতে। তবে অবশ্যই x-অক্ষে।



এ কারণে উপরের $f_1(x) = 0$ এবং $f_2(x) = 0$ সমীকরণ দুটির কোনো সাধারণ মূল নেই, যদিও তাদের সাধারণ বিন্দু আছে। ব্যাপারটি অনেকেই বুঝতে পারে না। সুতরাং উদাহরণ নেয়া যাক।

$$f_1(x): \quad -x^2 + 1 = 0$$
$$f_2(x): \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

প্রথম সমীকরণের দুটি মূল হলো + 1 এবং – 1। দ্বিতীয় সমীকরণের দুটি মূল হলো 1 এবং – 3। ফলে এদের curve দুটি পরস্পরকে **x-অক্ষে** ছেদ করবে শুধু (1,0) বিন্দুতে (নিচের চিত্র দেখুন)।



চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে $f_1(x) : -x^2 + 1$ এর curveটি x অক্ষের সাথে x = 1 এবং x = – 1 বিন্দুদ্বয়ে x-অক্ষকে ছেদ করেছে। $f_2(x) : x^2 + 2x -3 = 0$ (অর্থাৎ $(x -1)(x + 3) = 0$) এর curveটি x = 1 এবং x = – 3বিন্দুদ্বয়ে x অক্ষকে ছেদ করেছে। ফলে সমীকরণ দুটির মূলদ্বয় যথাক্রমে 1, – 1 এবং 1, – 3। কিন্তু curve দুটি পরস্পরকে আরেকটি বিন্দুতে ছেদ করেছে : তা হলো p। তাই ব'লে এই p-এর জন্য x-এর যে-মান পাওয়া যায়, তা কিন্তু উভয় সমীকরণের *সাধারণ মূল* নয়। এই ছেদ করার অর্থ হলো, x-এর এই মানের জন্য (এখানে x = – 2) $f_1(x) = f_2(x)$, যদিও $f_1(x) = f_2(x) = 0$ নয়। যেমন :

$$f_1(x) \quad : -x^2 + 1$$
$$= -(-2)^2 + 1$$
$$= -4 + 1$$
$$= -3$$

$$f_2(x) \quad : x^2 + 2x - 3$$
$$= (-2)^2 + 2(-2) - 3$$
$$= 4 - 4 - 3$$
$$= -3$$

অর্থাৎ $x = -2$ এর জন্য $f_1(x) = f_2(x) = -3$।

কিন্তু এর ব্যাখ্যা কী? আসলে এই p-বিন্দুতেই উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকত, যদি সমীকরণ দুটি হতো সহ-সমীকরণ (simultaneous equations বা a system of equations), যাতে একটি সমীকরণ থেকে একটি চলকের মান বের ক'রে অন্য সমীকরণে বসানো হতো (এ হলো সেরূপ সমীকরণ সমাধান করার *একটি* পদ্ধতি)। অন্য কথায়, সহ-সমীকরণে যে-বিন্দুতেই দুই বা ততোধিক ফাংশানের curve ছেদ করবে, তার x অক্ষের মান তাদের প্রত্যেকটি সমীকরণকে সিদ্ধ করবে এবং সেক্ষেত্রে $f_1(x) - f_2(x) = 0$ হবে। কিন্তু এখানে আমরা একটি সমীকরণের মাধ্যমে অন্যটির সমাধান করিনি : প্রত্যেকটিকে আলাদাভাবে সমাধান করেছি। ফলে প্রত্যেকটির মূল হবে x-এর সেই মান যেখানে প্রত্যেকের curve x-অক্ষকে ছেদ করবে। অবশ্য এ ব্যাপারে পরবর্তী পর্বে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

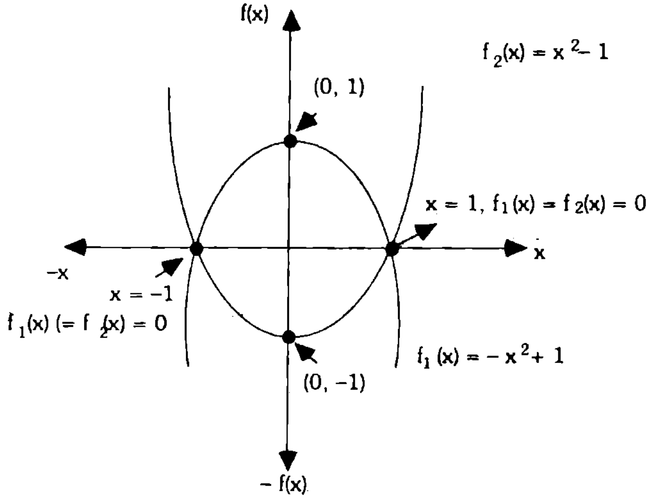
দুটি সমীকরণের মধ্যে উভয় মূলও সাধারণ হতে পারে। যেমন :

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$

এই সমীকরণ দুটির উভয় মূলই সাধারণ। প্রকৃতপক্ষে এদের যে-কোনো একটিকে–1 দ্বারা গুণন ক'রে অপরটি পাওয়া যায় :

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$-x^2.(-1) + 1.(-1) = 0.(-1)$$
$$x^2 - 1 = 0$$

ফলে উভয় সমীকরণ 'মূলত' একই সমীকরণের দুটি রূপ। কিন্তু এদের curve কি একই হবে? আদৌ নয়। এদের curve দুটি হবে একে অপরের প্রতিবিম্ব (reflection); ঠিক যেন আয়নার সামনে একটিকে ধরা হলো এবং অপরটিকে আয়নার মধ্যে দেখা গেল। যেমন :



আবার নিচের সমীকরণ তিনটির মূলদ্বয়ও অভিন্ন :

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$5x^2 + 10x - 15 = 0$$
$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

এখানে প্রথম সমীকরণটি হলো তৃতীয়টির (বা একে অপরের) প্রতিবিম্ব (উপরে যেমন দেখানো হয়েছে)। আবার প্রথমটিকে 5 দ্বারা কিংবা তৃতীয়টিকে – 5 দ্বারা গুণন ক'রে দ্বিতীয়টিকে পাওয়া যায়। সুতরাং *সমাধানের* দৃষ্টিকোণ থেকে সবগুলি সমীকরণই একটিমাত্র সমীকরণের তিনটি রূপ।

এবার তাহলে যে-শর্তে দুটি সমীকরণের প্রত্যেকটির মূলদ্বয়ের একটি বা উভয়টি সাধারণ (common) হয় তা নির্ণয় করা যাক। ধরা যাক সমীকরণ দুটি হলো :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

1) সাধারণ মূলটি α হলে তা উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। ফলে $x = \alpha$ বসিয়ে :

$$a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর মাধ্যমে :

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

তাহলে :

$$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$$\alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} \;\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

এবং $$\frac{\alpha}{1} = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অর্থাৎ $$\alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \;\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে :

$$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অর্থাৎ $\mathbf{(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2}$

এটাই নির্ণেয় শর্ত।

এখানে α-এর নির্ণীত মান থেকে সমীকরণ দুটির অপর দুটি মূলও বের করা যায়।

প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c_1}{a_1}$

অর্থাৎ অপর মূলটি β_1 হলে :

$$\alpha\beta_1 = \frac{c_1}{a_1}$$

$$\beta_1 = \frac{c}{a_1} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

এই সমীকরণে α-এর পূর্বোক্ত (i) বা (ii) তে নির্ণীত α-এর মান বসালেই β_1 এর মান পাওয়া যাবে।

$$\text{অতএব } \beta_1 = \frac{c_1(c_1a_2 - c_2a_1)}{a_1(b_1c_2 - b_2c_1)} \text{ বা } \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1(c_1a_2 - c_2a_1)}$$

ঠিক একই ভাবে, দ্বিতীয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c_2}{a_2}$। এর অপর মূলটি β_2 হলে

β_2 :

$$\beta_2 = \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

অতএব

$$\beta_2 = \frac{c_2(c_1a_2 - c_2a_1)}{a_2(b_1c_2 - b_2c_1)} \text{ বা } \frac{c_2(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_2(c_1a_2 - c_2a_1)}$$

FOOD FOR THOUGHT

1. দুটি সমীকরণের যদি একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে তাদের কি কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকবে? থাকলে তার সংখ্যা সর্বোচ্চ কতটি হতে পারে? তার আকার (form) কী? একটি নির্দিষ্ট উদাহরণ নিয়ে (যা এই বই থেকেও নেয়া যেতে পারে) বুঝান।

2. দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি সাধারণ একঘাত উৎপাদক থাকার শর্ত কী?

[**Hint :** ইতোমধ্যে তা নির্ণয় করা হয়েছে।]

এবার তাহলে যে-শর্তসাপেক্ষে দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের উভয় মূলই সাধারণ (common) হবে তা নির্ণয় করা যাক। ধরা যাক $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটির উভয় মূলই সাধারণ এবং মূলদ্বয় হলো α, β_1। তাহলে :

$$\text{মূলদ্বয়ের যোগফল : } \alpha + \beta = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

$$\text{OR } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

$$\text{OR } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ldots\ldots \text{(i)}$$

মূলদ্বয়ের গুণফল : $\alpha\beta = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$

$$\text{OR } \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায় :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

এটিই নির্ণেয় শর্ত।

FOOD FOR THOUGHT

1. দুটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় সাধারণ (common) হলে তাদের উৎপাদকগুলিও কি সাধারণ হবে? তাদের উৎপাদকগুলির এক বা একাধিক যদি সাধারণ হয়, তাহলে a, b, c এর মাধ্যমে যে-শর্তে সেগুলি সাধারণ তা কিভাবে প্রকাশ করা যায়?

2. $ax^2 + bx + c$ এর মূলদ্বয় α, β হলে রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

3. 2-নং প্রশ্নের উত্তরে নির্ণীত উৎপাদকগুলির গুণফলকে শূন্যের সাথে সমীকৃত করুন এবং x-এর মানগুলি বের করুন। এবং 2-নং এবং 3-নং প্রশ্নের উত্তরের ওপর মন্তব্য করুন।

4. 2-নং প্রশ্নের উত্তরে নির্ণীত উৎপাদকে $\alpha = \beta$ বসালে $ax^2 + bx + c$ রাশিটিকে কি একটি পূর্ণবর্গ রাশি হিসেবে দেখানো যায়? এর পর যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত করা হয় তাহলে x এর মান দুটি কী কী হবে? ঠিক x-এর এই মানদ্বয়ের জন্য নিশ্চায়কের $(b^2 - 4ac)$ মান কী হতে হবে?

5. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের মান, নিশ্চায়কের মান, এবং তার বাম পাশের দ্বিঘাত রাশির পূর্ণবর্গ হওয়ার মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে? থাকলে, তা কী?

উদাহরণ : $x^2 + x - 12 = 0$ এবং $x^2 - 9x + 18 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের কোনো সাধারণ মূল আছে কি না তা সমীকরণ দুটিকে সমাধান না ক'রেই নির্ণয় করুন।

সমাধান : সমীকরণ দুটির দুটি সাধারণ মূল থাকলে নিচের শর্তটি সত্য হবে :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

এখানে প্রথম সমীকরণটির ক্ষেত্রে a_1, b_1, c_1 এবং দ্বিতীয় সমীকরণটির ক্ষেত্রে a_2, b_2, c_2 ব্যবহার ক'রে :

$$\frac{1}{1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{-9} \stackrel{?}{=} \frac{-12}{18}$$

দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{1}{1} \neq -\frac{1}{9} \neq -\frac{12}{18}$।

সুতরাং সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূল সাধারণ নয়। এবার এদের একটি মূল সাধারণ কি না তা যাচাই ক'রে দেখা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে নিচের সমীকরণটি সিদ্ধ হবে :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$$

মান বসিয়ে :

$$\{1.(-9) - 1\ .\ 1\}\{1.\ 18 - (-9)(-12)\} \stackrel{?}{=} \{(-12).\ (1) - 18\ .\ 1\}^2$$
$$\{-10\}\{-90\} \stackrel{?}{=} 900$$
$$900 = 900$$

সমীকরণটি সিদ্ধ হয়েছে। সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ দুটির একটি এবং কেবলমাত্র একটি সাধারণ মূল আছে। সাধারণ মূলটির মান :

$$\alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$
$$= \frac{-90}{-30}$$
$$= 3$$

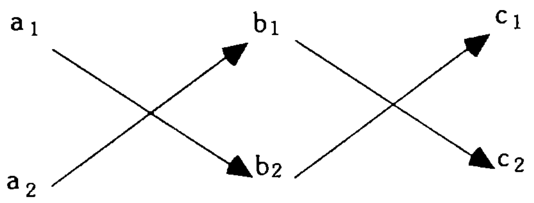
প্রথম সমীকরণের অপর মূলটি :

$$\beta_1 = \frac{c_1}{a_1} \cdot \frac{1}{\alpha}$$
$$= \frac{18}{1} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= 6$$

দ্বিতীয় সমীকরণের অপর মূলটি :

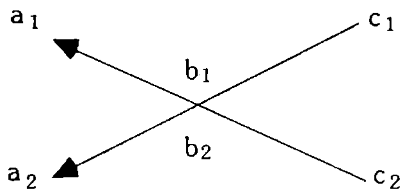
$$\beta_2 = \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{1}{\alpha}$$
$$= -\frac{12}{1} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= -4$$

NOTE : দুটি সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত-প্রকাশক সমীকরণটি নিচের চিত্রের সাহায্যে সহজে মনে রাখা যায় :



এ হলো সমীকরণটির বামপার্শ্বকে মনে রাখার কৌশল। মিলিয়ে পড়ার সুবিধার জন্য তা এখানে তুলে দেয়া হলো : **বামপার্শ্ব :** $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - (b_2c_1)$

এবার ডানপার্শ্বের জন্য কৌশল :



মিলিয়ে পড়ুন : **ডানপার্শ্ব :** $(c_1a_2 - c_2a_1)^2$

উদাহরণ : $f_1(x) = x^2 + kx - 35$, $f_2(x) = x^2 - 7x + 6$ হলে, k এর কোন মানের জন্য $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকবে? উৎপাদকটি কী?

সমাধান : যে শর্ত সাপেক্ষে $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর একটি সাধারণ মূল থাকবে, ঠিক সেই শর্ত সাপেক্ষেই তাদের একটি সাধারণ উৎপাদক থাকবে। শর্তটি হলো :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ এর মান বসিয়ে :

$$\{1.(-7) - 1.k\}\{k.6 - (-7).(-35)\} = \{(-35).1 - 6.1\}^2$$

$$\{-7-k\}\{6k + 245\} = \{-41\}^2$$

$$
\begin{aligned}
-42k - 6k^2 + 1715 + 245k &= 1681 \\
-6k^2 + 203k + 1715 - 1681 &= 0 \\
-1.\,(-6k^2 + 203k + 34) &= 0.(-1) \\
6k^2 - 203k - 34 &= 0 \\
6k^2 - 204k + k - 34 &= 0 \\
6k\,(k - 34) + 1\,(k - 34) &= 0 \\
(k - 34)\,(6k + 1) &= 0 \\
k - 34 &= 0 \text{ হলে} \\
k &= 34 \\
\text{এবং} \qquad 6k + 1 &= 0 \text{ হলে} \\
k &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

এখানে উভয় মানই গ্রহণযোগ্য। $k = 34$ হলে,

$f_1(x) = (x - 1)(x + 35)$

এবং $k = -\frac{1}{6}$ হলে,

$f_1(x) = (x - 6)(6x + 35)$

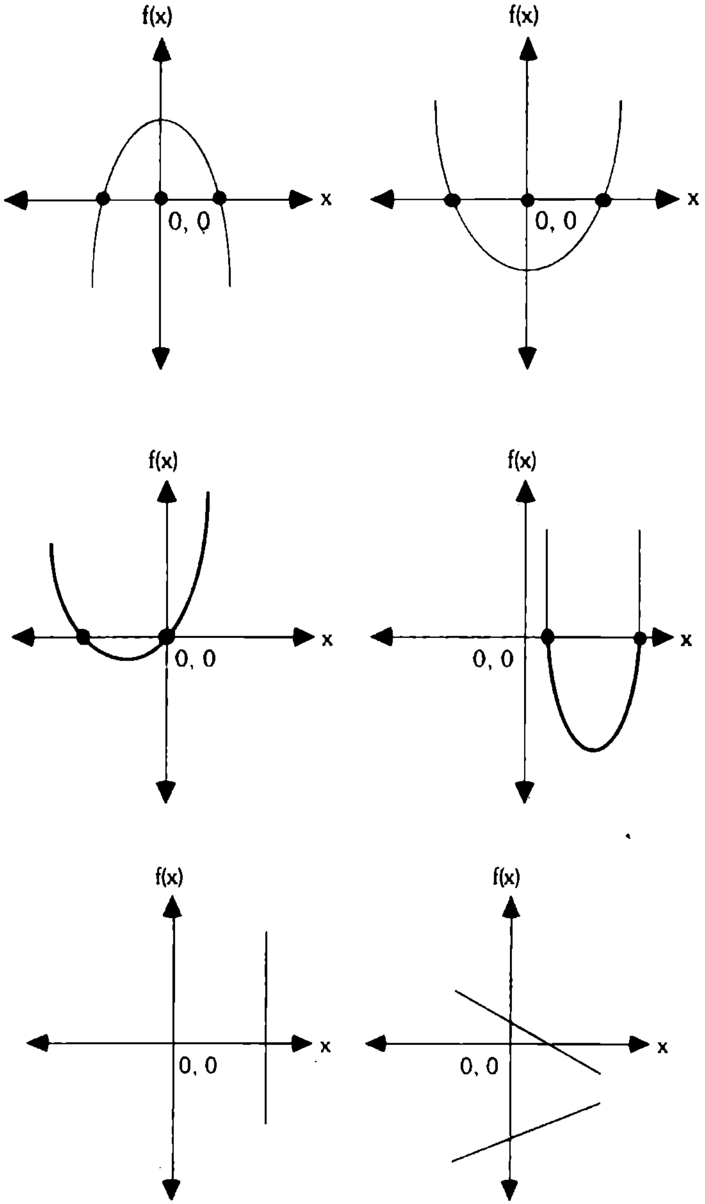
এছাড়া $f_2(x) = (x - 6)(x - 1)$

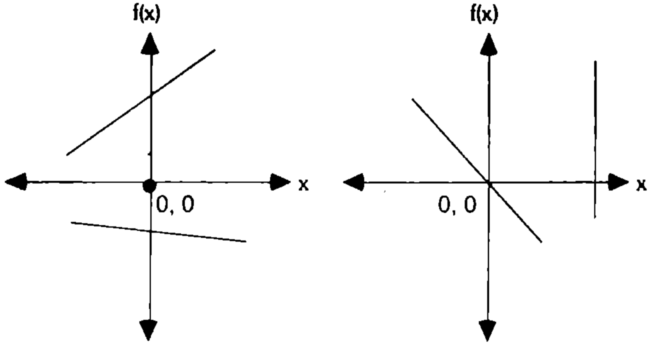
(যাচাই ক'রে দেখুন।)

7. দ্বিঘাত রাশির চিহ্ন (Sign of the Quadratic Equation)

আমরা দেখেছি কখন দ্বিঘাত রাশির মূলদ্বয়ের চিহ্ন কী হবে। আমরা এও দেখেছি মূলদ্বয়ের চিহ্নের সাথে সমীকরণের বামপার্শ্বের রাশিটির সহগদ্বয় ও ধ্রুবকের চিহ্নের সম্পর্ক কী। কিন্তু '$ax^2 + bx + c$' এই রাশিটিকে যদি a, b, c এর মানকে নির্দিষ্ট রেখে x এর বিভিন্ন মানের জন্য একেকটি সংখ্যায় রূপান্তরিত করা হয়, তাহলে সংখ্যাগুলির চিহ্ন কী কী হবে তা আমরা দেখিনি। আসলে x এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য যদি $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর মান নির্ণয় করা হয়, তাহলে উক্ত মানটি ঋণাত্মক, ধনাত্মক, বা শূন্য হতে পারে। x এর স্থলে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যে-কোনো একটি বসালে f(x) এর জন্য পাওয়া যাবে শূন্য। কিন্তু $x \neq \alpha \neq \beta$ এমন কোনো মান বসালে $f(x) > 0$ বা $f(x) < 0$ হবে। প্রথমে চিত্রের মাধ্যমে এই চিহ্নের স্বরূপ জেনে নেয়া যাক।

নিচে $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর কয়েক ধরনের curve দেখানো হলো।





উপরোক্ত চিত্রগুলোতে x-অক্ষ থেকে কোনো curve এর যে-কোনো বিন্দুর দূরত্ব হলো ঐ বিন্দুতে (অর্থাৎ x এর ঐ মানের জন্য) f(x) এর মান। এই বিন্দুটি যদি f(x) অক্ষ বরাবর x-অক্ষের 0,0 বিন্দুর উপরের দিকে হয়, তাহলে $f(x) > 0$, অর্থাৎ f(x) এর মান ধনাত্মক, এবং বিন্দুটি যদি f(x) অক্ষ বরাবর 0,0 বিন্দুর নিচের দিকে কোথাও হয়, তাহলে $f(x) < 0$, অর্থাৎ f(x) এর মান ঋণাত্মক। চিত্রগুলি থেকে স্পষ্টতই বুঝা যাচ্ছে যে শুধু α, β এর মানের বা চিহ্নের ওপর ভিত্তি ক'রে f(x) এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সুতরাং অন্য গাণিতিক উপায় খুঁজতে হবে।

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়কে α এবং β ধরা যাক, যেখানে $\alpha > \beta$।

$$ax^2 + bx + c$$
$$= ax^2 + \frac{b}{a}.a.x + \frac{c}{a}.a.x$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

যেহেতু $-\frac{b}{a} = \alpha + \beta$, সেহেতু $\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta)$; এবং $\frac{c}{a} = \alpha.\beta$। সুতরাং উপরোক্ত রাশিতে এই মানগুলি বসিয়ে :

$$= a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$$
$$= a\{x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta\}$$
$$= a\{x(x - \alpha) - \beta(x - \alpha)\}$$
$$= a\{(x - \alpha)(x - \beta)\}$$
$$= a(x - \alpha)(x - \beta)$$

এবার রাশিটিকে উৎপাদকে বিভক্ত করা গেছে।*

এখন এই রাশিমালা থেকে $f(x)$ এর চিহ্ন সম্বন্ধে বলা যাবে।

a) $a > 0$ হলে :

$x > \alpha$ হলে, $\alpha > \beta$ ব'লে

$(x - \alpha) > 0$ এবং $(x - \beta) > 0$

ফলে $(a (x - \alpha) (x - \beta) = f(x) > 0$

$x < \beta$ হলে, $\beta < \alpha$ ব'লে—

$(x - \beta) < 0$ এবং $(x - \alpha) < 0$

ফলে $x - \alpha) (x - \beta) > 0$ [কারণ $(-) \times (-) = (+)$]

ফলে $a (x - \alpha) (x - \beta) = f(x) > 0$

$x < \alpha$ এবং $x > \beta$ হলে, অর্থাৎ x এর মান α ও β এর মাঝামাঝি হলে—

$(x - \alpha) < 0$ এবং $(x - \beta) > 0$

ফলে $(x - \alpha) (x - \beta) < 0$ [∵ $(-) \times (+) = (-)$]

ফলে $a (x - \alpha) (x - \beta) = f(x) < 0$

সুতরাং দেখা গেল যে a যোগবোধক হলে $x > \alpha$ বা $\alpha < \beta$ এর জন্য $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন হবে যোগবোধক, এবং $\alpha > x > \beta$ হলে $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন হবে বিয়োগবোধক।

b) $a < 0$ হলে :

$x > \alpha$ হলে $x > \beta$; ফলে–

$(x - \alpha) > 0$ এবং $(x - \beta) > 0$

ফলে $(x - \alpha) (x - \beta) > 0$

ফলে $a (x - \alpha) (x - \beta) < 0$ [∵ $a < 0$]

---

* $ax^2 + bx + c = 0$ হলে $a (x - \alpha) (x - \beta) = 0$; ফলে উভয় পক্ষকে $\frac{1}{a}$ দ্বারা গুণন ক'রে পাওয়া যায় $(x - \alpha) (x - \beta) = 0$, যা আমরা আগেই দেখেছি।

অর্থাৎ $f(x) < 0$

$x < \beta$ হলে $x < \alpha$; ফলে—

$(x - \beta) < 0$ এবং $(x - \alpha) < 0$

ফলে $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ [$\because (-) \times (-) = (+)$]

ফলে $a(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ [$\because a < 0$]

$x < \alpha$ কিন্তু $x > \beta$ হলে—

$(x - \alpha) < 0$ কিন্তু $(x - \beta) > 0$

ফলে $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ [$\because (-) \times (+) = (-)$]

ফলে $a(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ [$\because a < 0$]

অর্থাৎ $f(x) > 0$

সুতরাং দেখা গেল যে a যোগবোধক হলে $x > \alpha$ বা $x < \beta$ এর জন্য $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন হবে বিয়োগবোধক, এবং $\alpha > x > \beta$ হলে $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন হবে যোগবোধক।

c) $\alpha = \beta$ হলে :

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \alpha) = \alpha(x - \alpha)^2$$

[কিংবা $a(x - \beta)(x - \beta) = a(x - \beta)^2$]

ফলে $(x - \alpha)^2$ সব সময়ই যোগবোধক। এক্ষেত্রে $f(x)$ এর মান যোগবোধক হবে যদি $a > 0$ হয়, এবং বিয়োগবোধক হবে যদি $a < 0$ হয়।

d) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক হলে $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন কী হবে? সেক্ষেত্রে রাশিটির চিহ্ন হবে a এর চিহ্নের মতো। দেখুন :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= ax^2 + \frac{b}{a}.\, ax + \frac{c}{a}.a$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\}$$

[NOTE : রাশিটিকে কিভাবে এই রূপে আনা হলো তা পরবর্তী section-এ দেয়া হয়েছে।]

এখন $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয় কাল্পনিক ব'লে $b^2 - 4ac$ হলো ঋণাত্মক, যেহেতু এ হলো সমীকরণটির নিশ্চায়ক। ফলে $-(b^2 - 4ac)$ বা $4ac - b^2$ হলো ধনাত্মক। এ কারণে—

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

রাশিটির মান ধনাত্মক। এখন $f(x)$ = 'a × উপরোক্ত ধনাত্মক রাশি' ব'লে ($f(x)$ এর চিহ্ন হবে a এর চিহ্নের অনুরূপ।

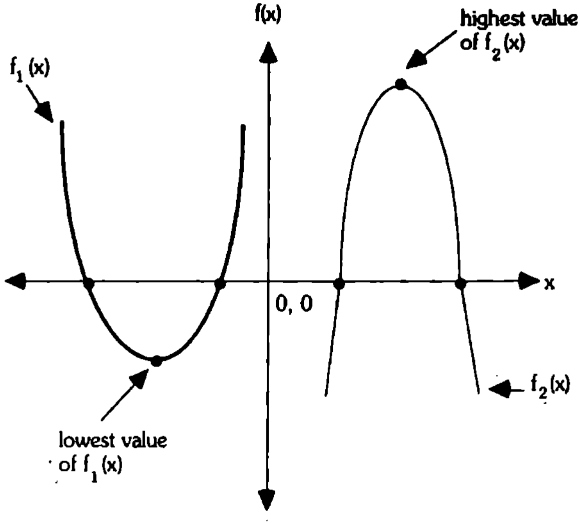
তাহলে মোটের ওপর একটি জিনিস স্পষ্টভাবে বোঝা যাচ্ছে : **x-এর সকল *বাস্তব* মানের জন্য, $x \neq \alpha$, $x \neq \beta$ হলে, এবং $\alpha > x > \beta$ *না হলে*, $ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন হবে a এর চিহ্নের মতো।**

FOOD FOR THOUGHT

এতক্ষণ আমরা a, α, β, x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর চিহ্ন কেমন হবে তা দেখেছি। $x = \alpha$, $x = \beta$ হলে রাশিটির মান কী হবে? তাহলে $f(x)$ এর মান কেমন হলে $x \neq \alpha$, $x \neq \beta$ হবে? $f(x) = 2x^2 - x + 1$ রাশিটিতে x এর কিছু মান এবং α, β এর মান বসিয়ে তা যাচাই করুন।

8. $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানসমূহ (The highest and the lowest values of $f(x) = ax^2 + bx + c$)

নিশ্চয়ই পাঠকের এতক্ষণে বুঝতে বাকি নেই যে $f(x) = ax^2 + bx + c$ এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানকে রেখাচিত্রে নিম্নরূপে দেখানো যায়।



গাণিতিকভাবে এই বিন্দুগুলিতে $f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে হলে আমাদেরকে এই অধ্যায়ের প্রথম পর্বে বর্ণিত 'বর্গ-পূরণ' পদ্ধতিটি ব্যবহার করতে হবে।

$$ax^2 + bx + c$$

$$= ax^2 + a.\frac{b}{x}x + a.\frac{c}{a}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

$$= a\left[\left\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a.a}.a$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

এখানে $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ সব সময়ই যোগবোধক হবে, যেহেতু a, b, x বাস্তব সংখ্যা।

সুতরাং :

a) $a>0$ হলে, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, অর্থাৎ $x=-\frac{b}{2a}$ হলে $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ হবে $\left[a\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2=a.0^2=0\right]$, নইলে তা শূন্যের চেয়ে বেশি মানের হবে। অর্থাৎ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ রাশিটির সর্বোচ্চ মানের কোনো সীমা নেই, তবে ($a>0$ হলে) তার সর্বনিম্ন মান হবে শূন্য। আবার $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এর মান ঋণাত্মক বা ধনাত্মক হতে পারে, যেহেতু রাশিটিতে ঋণাত্মক চিহ্ন আছে। এই রাশিটির মান যদি ধনাত্মক হয়, তাহলে f(x) এর মানের কোনো উর্ধ্বসীমা নেই (যা একটু আগেই বলা হয়েছে); তবে এটি যদি ঋণাত্মক হয়, তাহলে উক্ত ঋণাত্মক মান সবচেয়ে বেশি হবে তখন যখন a \b(x + \f(b,2a))^2 = 0 হবে, অর্থাৎ x = – \f(b,2a) হবে। সুতরাং f(x) এর সর্বনিম্ন মান হবে $\frac{4ac-b^2}{4a}$, যখন $x=-\frac{b}{2a}$।

b) আবার $a<0$ হলে, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$। তখন f(x) এর মান ধনাত্মক হতে পারে কিংবা f(x) এর ঋণাত্মক মান কমতে পারে তখনই যখন $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ হয় [যার ফলে ঋণাত্মক $a\times 0=0$ হবে; অর্থাৎ a এর ঋণাত্মক মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$ কে প্রভাবিত করবে না।], অর্থাৎ x = – \f(b,2a) হয়। অর্থাৎ x = – \f(b,2a) হলে f(x) এর সর্বোচ্চ মান হয় $\frac{4ac-b^2}{4a}$।

FOOD FOR THOUGHT

1. $f(x)=x^2-3x$ এ $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ বসালে নিম্নোক্ত মানগুলি পাওয়া যায় :

x	f(x)
–3	18
–2	10

−1	4
0	0
1	—2
2	—2
3	0
4	4
5	15

f(x) এর সর্বোচ্চ মান কত? তখন x এর মান কত?

f(x) এর সর্বনিম্ন মান কত? তখন x এর মান কত?

এবার গাণিতিকভাবে সাধারণীকরণ (generalize) ক'রে f(x) এর জন্য সীমা নির্ণয় করুন। দুই সীমার মধ্যে কোনো পার্থক্য আছে কি? কেন? পূর্ণ সংখ্যার দ্বারা যাচাই ক'রে সব সময় কি চূড়ান্ত ফলটি পাওয়া যায়?

[Hint : এখানে কিছুটা ক'রে দেয়া হলো :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x \\ &= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2.1}\right)^2 - \left(\frac{3}{2.1}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

এখানে $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যখন x = ...। ফলে f(x) এর সর্বনিম্ন মান হবে . . . .।]

2. $f(x) = -2x^2 - x + 3$ হলে f(x) এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে। নিচে x এর কিছু মানের জন্য f(x) এর সংশ্লিষ্ট মানগুলি দেয়া হলো।

x	f(x)
—5	—52
—4	—33
—3	—18
—2	—7

-1	0
0	3
1	0
2	-7
3	-18
4	-33
5	-52

এই মানগুলি থেকে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাচ্ছে 3। এই মান $x = 0$ এর জন্য। এখন গাণিতিকভাবে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় ক'রে দেখান যে উপরোক্ত পদ্ধতিতে x এর জন্য ভগ্নাংশ নিয়েও তা সঠিকভাবে নির্ণয় করা যেত।

3. $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন। x এর কোন মানের জন্য এই মান পাওয়া যায়? এখানে একে একে x এর বিভিন্ন মান নিয়ে (যেমন $x = -5, -4, -3 \ldots\ldots 3, 4, 5$) এবং গাণিতিকভাবে—এই উভয়ভাবেই প্রশ্নটির সমাধান করুন।

NOTE : উপরোক্ত 1 এবং 2 নং প্রশ্নে x এর যে-যে মানের জন্য $f(x) = 0$ পাওয়া গেছে, সেগুলি হলো $f(x) = 0$ এর মূল।

তাহলে একটি বিষয় স্পষ্ট হয়ে গেল : $ax^2 + bx + c$ রাশির $a > 0$ হলে তার কোনো সর্বোচ্চ মান নেই, এবং $a < 0$ হলে তার কোনো সর্বনিম্ন মান নেই। আরো একটি বিষয় জানা গেল : $f(x) = ax^2 + bx + c$ রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পাবার জন্য $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ এর মান বের করলেই হলো ; অর্থাৎ $x = -\frac{b}{2a}$ বসালে $f(x)$ এর যে-মান পাওয়া যায়, তাই-ই হলে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান। এবার এই ফলগুলিকে পূর্ববর্তী চিত্রগুলির সাথে মিলিয়ে দেখুন।

9. দুটি চলক (variable) বিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির দুটি এক-ঘাত উৎপাদকে বিভাজিত হবার যোগ্যতা (Factorability of a quadratic expression with two variables into two expressions of the first degree)

দুটি চলক দ্বারা গঠিত সব দ্বিঘাত রাশিকে দুটি এক-ঘাত উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায় না। যে-সব এরূপ দ্বিঘাত রাশিকে দুটি এক-ঘাত উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায় সেগুলির একটি বৈশিষ্ট্য আছে, যাকে আমরা রাশিটির দুটি এক-ঘাত উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট হবার শর্ত বলতে পারি। এখন সেই শর্ত আবিষ্কার করতে হবে।

প্রথমে f(x) এর f(x, y) [দুটি চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত ফাংশান] এর রূপের মিল এবং পার্থক্য বুঝার চেষ্টা করুন।

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

যেখানে x, y বাদে অন্য প্রতীকগুলির মান নির্দিষ্ট। আসলে $ax + by + c$ আকারের দুটি এক-ঘাত রাশির গুণফল এই আকারের হয়।

f(x, y) কে ঘাতের (power) নিম্ন ক্রমানুসারে (in descending order) সাজিয়ে $f(x, y) = 0$ আকারে সমীকৃত ক'রে :

$$ax^2 + 2x\,(hy + g) + by^2 + 2fy + c = 0$$

এই সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ আকারে বিবেচনা করা যায়, যেখানে

$$b = 2\,(hy + g)$$

$$c = by^2 + 2fy + c \text{ ।}$$

সুতরাং এটিকে x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করলে x এর মান হয় নিম্নরূপ :

$$x = \frac{-2\,(hy + g) \pm \sqrt{\{-2\,(hy + g)\}^2 - 4.a.\,(by^2 + 2fy + c)}}{2a}$$

রাশিটির লব (numerator) :

$$-2\,(hy + g) \pm \sqrt{\{-2\,(hy + g)\}^2 - 4a\,(by^2 + 2fy + c)}$$

নিশ্চায়ক :

$$4\,(hy + g)^2 - 4a\,(by^2 + 2fy + c)$$

$$= 4\,\{(hy + g)^2 - a\,(by^2 + 2fy + c)\}$$

সুতরাং উপরোক্ত লব :

$$2\{-(hy+g)\} \pm \sqrt{2^2\{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)\}}$$

$$= 2\{-(hy+g)\} \pm 2\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}$$

$$= 2[-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}]$$

সুতরাং $x = \dfrac{\text{উপরোক্ত লব}}{2a}$

$$= \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

এখন— ঠিক $ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে যেমনটি বলা হয়েছিল—$f(x, y)$ কে দুইটি সরল (linear) উৎপাদকের গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যাবে তখনই যখন রেডিক্যাল চিহ্নটির মধ্যকার নিশ্চায়ক একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। (তা না হলে সেক্ষেত্রে পাওয়া যাবে, ধরা যাক, $\sqrt{p}$। কিন্তু আমরা প্রথম অধ্যায়েই দেখেছি যে $\sqrt{p}$ একটি অমূলদ (irrational) সংখ্যা যাকে $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না। ফলে $f(x, y)$ কে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করাও যাবে না।) এখন উপরোক্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় :

$$ax = -(hy+g) \pm \sqrt{\text{Discriminant}}$$

$$ax + hy + g = \pm\sqrt{\text{Discriminant}}$$

$$= \sqrt{h^2y^2 + 2ghy + g^2 - aby^2 - 2afy - ac}$$

$$= \sqrt{h^2y^2 - aby^2 + 2ghy - 2afy + g^2 - ac}$$

$$= \sqrt{(h^2 - ab)y^2 + y(2gh - 2af)y + (g^2 - ac)}$$

এখন নিশ্চায়কটি পরিণত হয়েছে একটি দ্বিঘাত সমীকরণে, যাতে চলক হলো y (অর্থাৎ এর গঠন হলো $ay^2 + by + c$)। এখন রেডিক্যাল চিহ্নের মধ্যস্থ এই নোতুন দ্বিঘাত রাশিটির মানকে হতে হবে পূর্ণবর্গ। ফলে এর নিশ্চায়ককে হতে হবে শূন্য। সুতরাং :

$$(2gh - 2af)^2 - 4.(h^2 - ab)(g^2 - ac) = 0$$

$$4g^2h^2 - 8afgh + 4a^2f^2 - 4g^2h^2 + 4abg^2 + 4ach^2 - 4a^2bc = 0$$

$$-8afgh + 4a^2f^2 + 4abg^2 + 4ach^2 - 4a^2bc = 0$$

$$-4a(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2) = 0$$

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

এই হলো নির্ণেয় শর্ত। একে বলে $f(x, y)$ এর নিশ্চায়ক।

অবশ্য "$f(x, y)$ কে দুটি সরল উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায় কিনা তা দেখান" এরূপ প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে অনেকে এই সমীকরণটি ব্যবহার করার চেয়ে পুরা পদ্ধতিটিকে অনুসরণ করার পক্ষপাতী। সমীকরণটি মুখস্থ রাখা দুষ্কর ব'লেই অনেকে এরূপ ভেবে থাকে। পুরা পদ্ধতিটিকে অনুসরণ করতে হলে কী করতে হবে তা এখানে সংক্ষেপে আরেকবার বর্ণনা করা হলো :

- প্রথমে রাশিটিকে $ax^2 + bx + c$ আকারে সাজান।
- এবার $ax^2 + bx + c$ এর নিশ্চায়ক নির্ণয় করুন।
- এবার রেডিক্যাল চিহ্নটি বাদ দিয়ে উক্ত নিশ্চায়ককে $ay^2 + by + c$ আকারে সাজান।
- এবার এই শেষোক্ত রাশিটির নিশ্চায়ক নির্ণয় করুন। একে বিস্তৃত (expand) করলে নির্ণেয় শর্ত পাওয়া যাবে।

অধ্যায় : ৪

সেট থিওরি
(Set Theory)

এমনকি একজন অগণিতবিদের জন্যও সেট থিওরি একটি অত্যন্ত আনন্দদায়ক এবং নান্দনিক বিষয়। প্রাকৃতিক বিজ্ঞান (পদার্থ বিজ্ঞান, রসায়ন বিজ্ঞান ইত্যাদি) এবং সামাজিক বিজ্ঞানের (সমাজবিজ্ঞান, অর্থনীতি ইত্যাদি) যাবতীয় শাখার যেখানেই মানবীয় যৌক্তিক চিন্তার বিশুদ্ধ প্রয়োগ আবশ্যক, সেখানে এই সেট থিওরি মৌলিক এবং গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। আধুনিক কম্পিউটার বিজ্ঞান এবং যুক্তিবিজ্ঞানের গোটা চিন্তা প্রক্রিয়ার ভিত্তিমূলে দাঁড়িয়ে রয়েছে সেট থিওরির ফর্মুলা। আসলে জ্ঞানের যে-শাখাতেই গণিত প্রযোজ্য, এবং যে-বিষয়ের সংশ্লিষ্ট চিন্তাপদ্ধতি মৌলিকভাবে গাণিতিক (তাতে স্পষ্টভাবে গণিতের ফর্মুলা ব্যবহৃত হোক বা না হোক), সেখানেই সেট-সম্পর্কিত বীজগণিত প্রয়োগ ক'রে চিন্তার একটি বিশুদ্ধ গাণিতিক কাঠামো তৈরি ক'রে নেয়া যায়। মে[illegible] লজিকের সর্বাধুনিক গাণিতিক উপস্থাপনের ভিত্তিমূলে রয়েছে সেট থিওরির [illegible] কাঠামো। আধুনিক বিশুদ্ধ (pure) এবং বিমূর্ত (abstract) গণিতের সব শাখা[illegible] (যেমন analysis, topology) সেট থিওরি হলো চিন্তার এবং উপস্থাপনের মৌলি[illegible] হাতিয়ার। প্রকৃতপক্ষে গণিত-সচেতন যে-কোনো চিন্তাবিদই তাঁর চিন্তার বিশুদ্ধ এবং নৈর্ব্যক্তিক পটভূমি হিসাবে সেট থিওরিকে ব্যবহার করেন। সুতরাং কেবল পরীক্ষায় পাশ করার জন্য নয়, সেট থিওরি শেখা উচিত তা থেকে প্রকৃত ফল পাবার জন্য—তাকে জীবনের কাজে লাগানোর জন্য।

সেট থিওরির প্রাথমিক দিকগুলি অত্যন্ত সহজ-সরল। তা আনন্দদায়কও বটে। এই বইতে আনন্দের দিকটিকে বিশেষ গুরুত্ব দেয়া হবে। তবে যেহেতু এটি হবে প্রাথমিক আলোচনা, সেহেতু জটিল প্রসঙ্গে আমরা যাব না। এবং একথাও মনে রাখতে হবে যে গণিতের উচ্চতর শাখাগুলিতে সেট থিওরির মৌলিক এবং সহজ নিয়মগুলি বিভিন্ন কায়দায় ব্যবহৃত হয়, যেখানে সংশ্লিষ্ট বিষয়বস্তুর জটিলতার কারণে অনেক সময়ে বুঝা যায় না যে তাতে সেট-সম্পর্কিত সহজ সূত্রাবলী ব্যবহৃত হয়েছে।

সেট সম্পর্কিত নিয়মাবলীর কিছু নিয়ম প্রাথমিক বিচারে প্রথাবহির্ভূত, যার কারণে সেগুলির প্রতি সহজেই দৃষ্টি আকৃষ্ট হয়। পাঠকের আগ্রহ সৃষ্টির জন্য প্রথমেই কিছু উপস্থাপিত করছি।

প্রাথমিক গণিত থেকে আমরা জানি যে A একটি সংখ্যা হলে ঃ

$$A + A = 2A$$
(যেমন, $3 + 3 = 2.3$)

কিন্তু সেটের সূত্র অনুসারে ঃ

$$A + A = A$$

এবং ফলে A কে অসংখ্য বার যোগ করলেও যোগফল হবে A। আবার গুণনের ক্ষেত্রেও একই ফল পাওয়া যায় ঃ

$$A . A = A$$

A এবং I নিলে ঃ

$$A + I = I$$

এবং $A . I = A$

এক common sense এর বাইরের ব'লে মনে হলেও আসলে এ কিন্তু তা নয়। একটু বিচার বিশ্লেষণ করলেই বিষয়টি সহজ হয়ে যাবে।

গাণিতিক যুক্তি (mathematical logic) এবং সম্ভাবনাতত্ত্ব (probability theory) সেট থিওরির ওপর সরাসরি নির্ভরশীল। এই অধ্যায়ে আমরা এই বিষয় দুটির ওপর কিছুটা আলোকপাত করব। পরবর্তী অধ্যায়টির বিষয়বস্তুকে (ফাংশান) আলোচনা করার জন্য সেটের ধারণা ব্যবহার করা হবে।

সেট হলো একাধিক বস্তুর বা ধারণার নামের তালিকা। তালিকাতে উল্লেখিত বস্তুগুলির প্রত্যেকের মধ্যে একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য আছে ব'লেই তাদেরকে ঐ বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে একটি সেট বলা যাচ্ছে। এই দৃষ্টিকোণ থেকে বলা যায় যে সেট হলো একটি শ্রেণী (class) বা একটি বৈশিষ্ট্য (characteristic) যা কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকের মধ্যে আছে। যেমন **মৌলিক সংখ্যার সেট** (the set of all prime numbers), **জোড় সংখ্যার সেট** (the set of all *even* numbers) ইত্যাদি হলো সেটের উদাহরণ।

কোনো সেটকে প্রথা অনুসারে capital letters A, B, I, N ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ফলে ঃ

$$A = \{3, 4, 9, 10, 0\}$$

হলো একটি সেট। এতে পাঁচটি *উপাদান* (**element**, member) আছে। এই উপাদানগুলির যে-কোনো একটিকে, যেমন 9 কে, নিয়ে আমরা বলতে পারি যে ঃ

9 হলো A এর অন্তর্ভুক্ত

9 **belongs** to A

বা $9 \in A$

আবার $B = \{3, 9, 0\}$ আরেকটি সেট হলে আমরা বলতে পারি যে ঃ

B হলো A এর উপসেট

B is a ***subset*** of A

বা B is **contained** in A

বা $B \subset A$

কারণ B তে যে উপাদানগুলি আছে, তা A তেও আছে। অধিকন্তু A তে অতিরিক্ত কিছু উপাদান আছে যা B তে নেই। এজন্য B হলো A এর **proper subset** বা প্রকৃত উপসেট, যাকে আমরা প্রতীকী কায়দায় (symbollically) এভাবে বুঝাই ঃ

$$B \subseteq A$$

আবার $B = \{3, 4, 9, 10, 0\}$ হলে আমরা বলে থাকি যে ঃ

$B \subset A$

এবং $A \subset B$

এবং ফলে—

$$A = B$$

এভাবে কোনো সেটকে আমরা তার নিজের **subset** হিসেবে বিবেচনা করতে পারি, তবে সেক্ষেত্রে সেটটি তার নিজের **proper subset** নয়।

FOOD FOR THOUGHT

ছেলে পিতাকে 'বাবা' বলে। পিতাও আদর ক'রে ছেলেকে অনেক সময়ে 'বাবা' বলে। তাই ব'লে ছেলে কি পিতার প্রকৃত বাবা? কিংবা পিতা কি ছেলের সন্তান?

সম্পর্কের (relationship) এরূপ ধারণা সেট থিওরি এবং ফাংশান সম্পর্কিত ধারণা বুঝার ক্ষেত্রে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ, যা পরবর্তী অধ্যায়ে আলোচ্য।

দুটি সেটের সম্পর্ক হুবহু দুটি সংখ্যার সম্পর্কের মতো নয়। এদের মধ্যে মৌলিক পার্থক্য আছে এবং সম্পর্কের ধারণাটিকে প্রতিটি ক্ষেত্রে তার নিজস্ব যুক্তির আলোকে বিবেচনা করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ, $a = 4$, $b = 7$ হলে ঃ

$$b > a$$

বা $$a < b$$

এখানে '$>$' কে '$\supset$' দ্বারা প্রতিস্থাপিত ক'রে $A = \{3, 4, 9, 12\}$ এবং $B = \{4, 9, 12\}$ এর সম্পর্ককে বিবেচনা করতে গিয়ে লেখা যায় ঃ

$$A \supset B$$

বা $$B \subset A$$

কিন্তু তাতেও '$>$' এবং '$\supset$' এর ধারণাকে সমার্থক হিসাবে খুঁজে পাওয়া যায় না। সংখ্যার ক্ষেত্রে '$>$' বা '$<$' হলো **পূর্ণ-ক্রমিক** (completely ordered) এবং সেটের ক্ষেত্রে '$\subset$' বা '$\supset$' হলো **আংশিক-ক্রমিক** (partially ordered) সম্পর্ক।

এখন আমরা algebra of sets নিয়ে আলোচনা করার আগে set সম্পর্কিত আরো কিছু প্রতীকী পদ্ধতির সাথে পরিচিত হব। আমরা বলেছি যে সেটকে চিহ্নিত করা হয় A, B, C ইত্যাদি capital letter দ্বারা। কোনো সেটের উপাদানকে যখন কোনো প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, তখন অবশ্য বেছে নেয়া হয় small letter, যেমন a, b, x, y ইত্যাদি। উপস্থাপনের কয়েকটি পদ্ধতি ঃ

$$x \in A$$

(x belongs to A

বা x is an element of A)

$$x \notin A$$

(x does not belong to A

বা x is not an element of A)

$$A = \{x | x \text{ is even}\}$$

(A is the set of numbers x such that x is even)

শেষোক্ত প্রতীকী ব্যবস্থায় '|' চিহ্নটির (উলম্ব রেখাংশ বা vertical bar) অর্থ হলো 'such that' বা 'এমন যে' বা 'যেখানে'। প্রতীকী ব্যবস্থাটি এরূপও হতে পারত ঃ

$$A = \{x | x \text{ is even and } 0<x<11\}$$

তাহলে A দ্বারা 0 থেকে 11 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির মধ্যে জোড় যে-সংখ্যাগুলি আছে, তাদের সেটকে বুঝাত। অর্থাৎ ঃ

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

এভাবে নিচের প্রতীকগুলি বৈধ ঃ

$B_1 = \{x | x = \text{married woman}\}$

$B_2 = \{x | x = \text{widowed woman}\}$

$B_3 = \{x | x = \text{Bangladeshi citizen}\}$

$B_4 = \{x | x = \text{a NATO country}\}$

$B_5 = \{x | x \text{ is a vowel}\}$

$B_6 = \{x | x \text{ is a natural calamity}\}$

$B_7 = \{x | x \text{ is a town and it is in Bangladesh}\}$

$B_8 = \{\text{Madhab, Rita, Tomy}\}$

দুটি সেটের সমতার পূর্বশর্ত হলো এই যে তাদের একটিতে যে-যে উপাদান আছে অন্যটিতেও সেই-সেই উপাদান থাকতে হবে এবং উভয়ের উপাদানসংখ্যা একই হতে হবে। এভাবে ঃ

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

এবং $B = \{o, a, u, i, e\}$

হলে $A = B$, কারণ $A \subset B$ এবং $B \subset A$। সেট দুটির অভ্যন্তরে উপাদানগুলির ক্রম **(order)** পাল্টে গেলে তাদের সমতা নষ্ট হয় না, যদি তারা পূর্বোক্ত শর্ত পালন করে। উপরের উদাহরণ থেকেও তা বুঝা যাচ্ছে।

কোনো সেটের উপাদানসংখ্যাকে যদি গুণে শেষ করা যায়, তাহলে সেটটিকে বলে সসীম (finite) সেট, এবং অন্যথায় তাকে বলে অসীম (infinite) সেট।

$$A = \{x | x \text{ is a bird}\}$$

$$N = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

এখানে যদিও পৃথিবীর সব পাখি গুণে শেষ করা খুব কষ্টকর (এবং ব্যবহারিক অর্থে তা সম্ভব নয়), তবুও গাণিতিক বিচারে A হলো একটি সসীম সেট, কারণ একটি নির্দিষ্ট সময়ে পৃথিবীর যাবতীয় পাখির সংখ্যা সসীম। অপরপক্ষে N হলো একটি অসীম সেট।

যে সেটে কোনো element নেই, তাকে বলে **null set** বা শূন্য সেট। একে ϕ(গ্রীক small letter ফাই, phi) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$$\phi = \{\quad\}$$

এই সেটটি একটি শূন্য সেট। তবে শূন্য সেটকে দেখানোর জন্য কোনো বন্ধনীর দরকার হয় না। কারণ সব ক্ষেত্রে শূন্য সেট বলতে একই জিনিস বুঝায়।

কোনো আলোচ্য বিষয়ের যাবতীয় সেটগুলিকে নিয়ে গঠিত বৃহত্তম এবং সর্বগ্রাসী সেটকে বলে মহাসেট বা **universal set**। একে U দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

দুটি সেটের মধ্যে তুলনা করা সম্ভব কেবল তখনই যখন তাদের যে-কোনোটি অন্যটির উপসেট হয়, অর্থাৎ ঃ

$$A \subset B$$

বা $$B \subset A$$

হয়। এই বৈশিষ্ট্যকে বলে তুল্যতা বা **comparability**।

কোনো নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে U মহাসেট এবং A উক্ত মহাসেটের একটি উপসেট হলে, A′ দ্বারা A-তে নাই কিন্তু U-তে আছে এমন জিনিসগুলির সেটকে বুঝানো হয়। এখানে A′ কে বলে পূরক সেট বা **complement** (of A, . . .)। যেমন ঃ

$$U = \{1, 2, 3, \ldots 20\}$$

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$

$$A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$$

সেট সমন্বয়ের নিয়মাবলী
(Basic set operations)

A, B দুটি সেট এবং ϕ ও U যথাক্রমে শূন্য সেট ও মহাসেট হলে নিচের সূত্রগুলি প্রযোজ্য ঃ

1) $A \subset A$ (কোনো সেট নিজেই নিজের উপসেট।)।

2) $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হলে $A = B$।

3) $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হলে $A \subset C$।

এখানে '$\subset$' সম্পর্কটি হলো একটি ক্রমিক সম্পর্ক (ordered relation), যার ফলে সম্পর্কটি ধারাবাহিকভাবে সেট পরম্পরায় সংক্রমিত হতে পারে।

4) $\phi \subset A$ (A যে-কোনো সেট)

5) $A \subset U$

6) $A + A = A$

7) $A \, . \, A = A$

8) $A + B = B + A$

9) $A + (B + C) = (A + B) + C$

10) $A (B + C) = (AB + AC)$

11) $A + \phi = A$

12) $A \, . \, \phi = \phi$

13) $A + U = U$

14) $A \, . \, U = A$

15) $A \, . \, B = B \, . \, A$

16) $A(BC) = (AB)C$

17) $A + (BC) = (A + B) (A + C)$

18) $A \subset B$ হলে ঃ

$A + B = B$

$A \, . \, B = A$

সূত্রগুলির কিছু কিছু বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধীয় **commutative** এবং **distributive law** এর অনুরূপ (যাচাই করুন, অধ্যায়–১) কিন্তু কিছু কিছু ব্যতিক্রমধর্মী। 6, 7, 13, 14, 18 নং সূত্রগুলির অনুরূপ কোনো সূত্র সংখ্যার জগতে নেই। 17 নং সূত্রটি পুরোপুরি আলাদা। সংখ্যার ভুবনে এর কোনো সমতুল নেই।

আমরা এতক্ষণ যে-অর্থে '+' এবং ' . ' চিহ্নদুটিকে ব্যবহার করেছি তা সাধারণ অর্থে যোগ ও গুণনের মতো নয়। আসলে আমরা '+' দ্বারা যাকে বুঝিয়েছি তাকে সেটের ভাষায় বলে **'যৌক্তিক যোগফল' (logical sum)** বা **'union'** (সংযুক্তি), এবং অনেক ক্ষেত্রে বিভ্রান্তি এড়ানোর জন্য তার বদলে $\cup$ চিহ্নটিকে ব্যবহার করা হয়। একই

ভাবে আমরা '.' চিহ্ন দ্বারা যাকে বুঝিয়েছি তাকে বলে **'যৌক্তিক গুণফল' (logical product)** বা **intersection** (ছেদ), যাকে $\cap$ চিহ্নটি দ্বারা নির্দেশ করা হয়। A এবং B এর মধ্যে সংযুক্তির অর্থ হলো :

A or B

= both A **and** B

উদাহরণ :

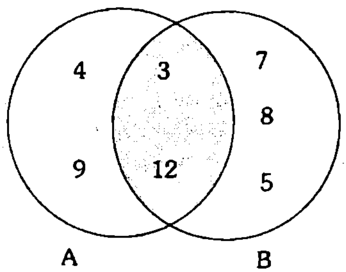
$$A = \{3, 4, 9. 12\}$$

$$B = \{3, 7, 8, 5, 12\}$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B \\ \text{বা} \quad A \cup B \end{array}\right\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\}$$

A এবং B-তে আলাদা আলাদাভাবে যে-সব উপাদান আছে তা A + B তেও আছে।

সেট সংযুক্তির এই ধারণাকে **ভেন চিত্র** (বা ভেন-অয়লার চিত্র, Venn–Euler diagram (দুজন গণিতবিদের নাম অনুসারে)) দ্বারা খুব সহজে ব্যাখ্যা করা যায়।



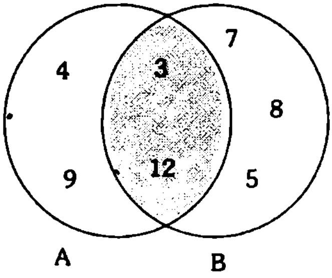
A + B

চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে সংযোজনের পর A এবং B এর সবগুলি উপাদান নিয়ে গঠিত হয়েছে A + B সেট।

দুটি সেটের ছেদ বলতে শুধু সেই উপাদানগুলিকে বুঝায় যারা উক্ত সেট দুটির উভয়ের মধ্যে আগে থেকে আছে, অর্থাৎ যেগুলি তাদের মধ্যে সাধারণ (common)। পূর্বোক্ত সেট A এবং B এর ক্ষেত্রে :

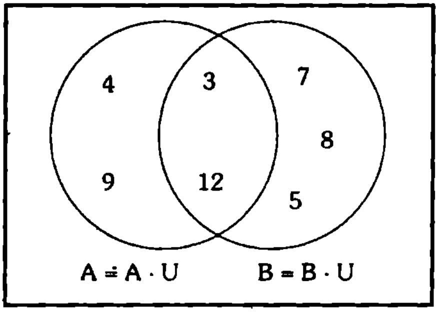
$$\left.\begin{array}{r} A \,.\, B \\ \text{বা} \quad A \cap B \end{array}\right\} = \{3, 12\}$$

বিষয়টিকে ভেনচিত্রের মাধ্যমেও দেখানো হলো ঃ



A · B

এই দুটি সেটের ক্ষেত্রে মহাসেট U = {3, 4, 5, 7, 8, 9, 12} = A + B



U

উপরের চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে U-এর সার্বিক দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করলে ঃ

$$\left.\begin{array}{r} A \cdot U \\ \text{বা}\ \ A \cap U \end{array}\right\} = \{3, 4, 9, 12\} = A$$

এবং

$$\left.\begin{array}{r} B \cdot U \\ \text{বা}\ \ B \cap U \end{array}\right\} = \{3, 5, 7, 8, 12\} = B$$

এবং

$$\left.\begin{array}{r} A \cup U \\ \text{বা}\ \ A + U \end{array}\right\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\} = U$$

এবং

$$\left.\begin{array}{r} B \cup U \\ \text{বা } B + U \end{array}\right\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\} = U$$

A তে আছে A, অর্থাৎ A এর নিজস্ব উপাদানগুলি। সুতরাং U এর সাপেক্ষে A তে যা নাই তা হলো A এর পূরক, A′, যেখানে ঃ

$$A' = U - A = \{7, 8, 5\}$$

এভাবে $B' = U - B = \{4, 9\}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ফলে} & A + A' \\ \text{বা} & A + \text{not} - A \end{array}\right\} = \{3, 4, 9, 12\} + \{7, 8, 5\}$$

$$= \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\} = U$$

অর্থাৎ $A + A' = U$

একই ভাবে ঃ

$$\left.\begin{array}{r} B + B' \\ \text{বা } B + \text{not - } B \end{array}\right\} = \{3, 5, 7, 8, 12\} + \{4, 9\}$$

$$= \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\}$$

$$= U$$

অর্থাৎ $B + B' \quad = U$

আবার ঃ

$$\begin{aligned} A' + B' &= \{7, 8, 5\} + \{4, 9\} \\ &= \{4, 5, 7, 8, 9\} \\ &= \{3, 4, 5, 7, 8, 9\} \\ &= \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\} - \{3, 12\} \\ &= U - A \,.\, B \end{aligned}$$

অর্থাৎ $A' + B' = U - AB$

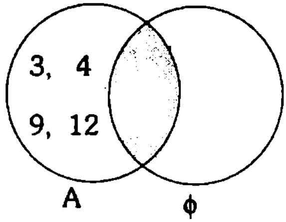
এবার উক্ত A এবং B সেট দুটিকে আলাদা আলাদাভাবে শূন্য সেট ϕ এর সাথে সম্পৃক্ত ক'রে দেখা যাক ঃ

$$\begin{aligned} A + \phi &= \{3, 4, 9, 12\} + \{\quad\} \\ &= \{3, 4, 9, 12\} \\ &= A \end{aligned}$$

অর্থাৎ $A + \phi = A$

ঠিক যেমন কোনো সংখ্যার সাথে শূন্য (0) যোগ করলে যোগফল হয় সেই সংখ্যাই (eg, a + 0 = a)। B + ϕ এর ক্ষেত্রেও যোগফল হবে B। গুণণের ক্ষেত্রে ঃ

$A . \phi \quad = \{3, 4, 9, 12\} \cap \{\quad\}$



$= \phi$

অর্থাৎ $A . \phi \quad = \phi$

এভাবে $B . \phi = \phi$

এই বিষয়টিও সাধারণ সংখ্যার সাথে শূন্যের গুণনের মতো ($a \times 0 = 0$)।

পূর্বোক্ত U এর ধারণা থেকে আরো কিছু বিষয় স্পষ্ট হয়ে ওঠে ঃ

(A তে যা আছে) $\cap$ (A তে যা নেই)

$= A \cap A'$

$= A . A'$

$= \phi$

কারণ এদের মধ্যে common কিছু নেই। অর্থাৎ

$A . A' = \phi$

অন্য কথায়, কোনো সেট এবং তার পূরক সেটের intersection হলো null সেট।

তাহলে U এর পূরক সেট কী হবে? অর্থাৎ এমন কী আছে যা U-তে নেই? এক্ষেত্রেও উত্তর হলো ϕ। তাহলে ϕ এর পূরক সেট কী হবে? অর্থাৎ ϕ এর আওতা-বহির্ভূত সেটটি কী? উত্তর হলো U। অর্থাৎ

$\phi' = U$

এবার আরো একটু এগিয়ে ভাবতে হবে ঃ A' এর পূরক সেটটি কী? অর্থাৎ A এর complement এর complement কী? উত্তর হলো A। অর্থাৎ ঃ

$A'' = A$

এভাবে ঃ

$$U'' = U$$

$$\phi'' = \phi$$

শেষোক্ত সমীকরণ দুটিকে অত্যন্ত সহজেই প্রমাণ করা যায় ঃ

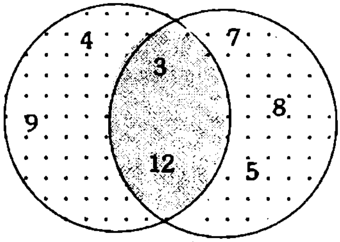
$$\begin{aligned} U'' &= (U')' \\ &= (\phi)' \\ &= \phi' \\ &= U \end{aligned}$$

একই ভাবে ঃ

$$\begin{aligned} \phi'' &= (\phi')' \\ &= (U)' \\ &= U' \\ &= \phi \end{aligned}$$

আবারও সেট A, B-তে ফিরে যাওয়া যাক। $(A + B)' = ?$

প্রথমত ভাবতে অসুবিধা হলেও ভেনচিত্রের মাধ্যমে বিষয়টিকে অত্যন্ত সহজভাবে দেখা যায় ঃ



A + B

$$\left.\begin{array}{l} \text{অর্থাৎ } A + B \\ \text{বা } \quad A \cup B \end{array}\right\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\}$$

তাহলে এমন কী আছে যা (A + B) তে নেই? অর্থাৎ $(A + B)' = ?$ এখানে U কে টেনে আনতে হবে। কারণ *কোনো সেটের বাইরে কী আছে তা মাপতে হলে আগে জানতে হবে এখানে 'বাহির' কত দূর পর্যন্ত বিস্তৃত*। এই বাহির-ভেতর মিলেই হলো U।

ফলে ঃ

$$(A + B)' = U - (A + B)$$
$$= \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\} - \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 12\}$$
$$= \phi$$

আবার (A তে যা নেই) $\cap$ (B তে যা নেই)

$$= A' \cap B'$$
$$= \{7, 8, 5\} \cap \{4, 9\}$$

= ϕ (কারণ এদের মধ্যে common কিছু নেই)

তাহলে পাওয়া গেল

$$(A + B)' = A' . B'$$

এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে যে $(A + B)' = A'.B'$ সম্পর্কটি সবক্ষেত্রে সত্য, U এর মধ্যে A, B ভিন্ন অন্যান্য সেট থাকলেও। কিন্তু U তে অন্যান্য সেট থাকলে

$$A' . B' = \phi$$
$$(A + B)' = \phi$$

সম্পর্ক দুটি সত্য না-ও হতে পারত। এ কারণে এই শেষোক্ত সম্পর্ক দুটিকে সূত্র ভেবে বসা ঠিক হবে না।

এবার সেই প্রথম সম্পর্কটিকে আবার বিবেচনা করা যাক ঃ

$$A \subset B$$

হলে A′ এবং B′ এর মধ্যে কী সম্পর্ক হবে? উদাহরণের মাধ্যমেই উত্তরটি দেখা যাক।

$$A = \{3, 9\}$$

এবং $B = \{3, 5, 7, 9, 10\}$

হলে $A \subset B$, অর্থাৎ A হলো B এর subset। এখানে ঃ

A′ = A তে যা নেই কিন্তু A + B তে আছে

$$= \{5, 7, 10\}$$

এবং B′ = B তে যা নেই কিন্তু A + B তে আছে

$$= \phi$$

যেহেতু ϕ যেকোনো সেটের subset হতে পারে, সেহেতু B′ হলো A′ এর subset। অর্থাৎ ঃ

$$B' \subset A'$$

প্রকৃতপক্ষে ঃ

$A \subset B$ এর অর্থই হলো $B' \subset A'$

এবার তাহলে বলুন তো $(AB)' = ?$

অর্থাৎ A ও B এর উভয়ের common উপাদানগুলি নিয়ে যে সেট, তার মধ্যে কী নেই? বিশ্লেষণ ক'রে দেখা যাক ঃ

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

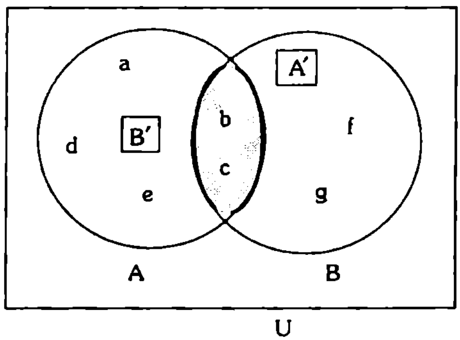
এবং $B = \{b, c, f, g\}$

হলে,

$$\begin{aligned} A . B &= \{b, c\} \\ (AB)' &= U - AB \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g\} - \{b, c\} \\ &= \{a, d, e, f, g\} \\ &= \{a, d, e\} + \{f, g\} \\ &= B' + A' \\ &= A' + B' \end{aligned}$$

অর্থাৎ $(AB)' = A' + B'$

ভেনচিত্রের মাধ্যমেও বিষয়টিকে দেখা যেতে পারে ঃ



$$\begin{aligned} A . B &= \{b, c\} \\ (AB)' &= U - \{b, c\} \\ &= \{a, d, e, f, g\} \\ &= \{f, g\} + \{a, d, e\} \\ &= A' + B' \end{aligned}$$

এবার একটি চমৎকার জিনিস লক্ষ্য করুন। বিষয়টি সেটের প্রসঙ্গে আপনার একটি অন্তর্দৃষ্টি খুলে দিবে। আমরা এতক্ষণ যে সমন্বয় এবং অপরিবর্তনীয় প্রতীকগুলি ব্যবহার করেছি সেগুলি হলো ঃ

$$\subset , \supset$$

$$+ , \bullet$$

$$\phi , U$$

এই প্রতীকগুলি ব্যবহার ক'রেই A, B ইত্যাদি নামক একাধিক সেটকে পরস্পরের সাথে সম্পৃক্ত করা হয়েছে। মজার বিষয়টি হলো এই যে, পূর্বোক্ত সূত্রগুলির কোনোটিতে $\subset$ এর বদলে $\supset$, + এর বদলে $\bullet$, এবং ϕ এর বদলে U বসালে যে নোতুন সম্পর্কগুলি পাওয়া যাবে সেগুলিও বৈধ এবং ইতোমধ্যেই উক্ত সূত্রগুলির মধ্যে সেগুলি রয়েছে। অন্য কথায়, পূর্বে আলোচিত সূত্রগুলির যে-কোনোটিকে এই নিয়মে পাল্টে ফেললে উক্ত সেটেরই অন্য কোনো একটি সূত্র পাওয়া যাবে। এই অর্থে নিয়মগুলির সেটটি **আবদ্ধ** (closed)। অন্য কথায়, উক্ত নিয়মাবলীর অধীনে থেকে তাদের মধ্যে হস্তক্ষেপ করলেও তাদের মধ্যে নেই এমন কোনো নিয়ম তৈরি করা যাবে না, কিংবা তাদের প্রভাব-বলয়ের বাইরে আসা যাবে না। কুয়োর ব্যাঙ আজীবন কুয়োর মধ্যে থাকে কেন? কারণ সে কুয়োর মাঝের লাফ দেয়। কোনো বিষয়ের সংশ্লিষ্ট সূত্রাবলীকে এই পর্যায়ে এনে পৌঁছাতে পারলে উক্ত বিষয়কে পরিপূর্ণভাবে জানা বা উদ্ভাবন করা বা আবিষ্কার করা যায়। শুধু তাই নয়, এই পর্যায়ে এসে মানব যুক্তির পৌনপুনিকতা এবং সীমাবদ্ধতাকে উপলব্ধি করতে পারলে সংশ্লিষ্ট বিষয়ের দার্শনিক পর্যায়ের মৌলিক জ্ঞান অর্জন করা যায়। এরূপ সূক্ষ্ম পর্যায়ে পৌঁছে গিয়ে তা থেকে আবার গোটা বাস্তবতাকে ব্যাখ্যা বিশ্লেষণ করার কার্যকর দক্ষতা অর্জন করার বিভিন্ন উপায় আলোচিত হয়েছে এই লেখকের *অন্ধকারের বস্ত্রহরণ : বৈজ্ঞানিক ও বুদ্ধিবৃত্তিক সৃজনশীলতার রাজ্যে এক গোপন অভিযান* এবং *উদ্ভাবনী চিন্তার কাঠামো ঃ বহির্জগৎকে আমরা যেভাবে জানি* নামক বই দুটিতে। উল্লেখ্য, উক্ত পর্যায়ের দক্ষতা মানব জ্ঞানের যে-কোনো শাখাতেই সচ্ছন্দে এবং পুরোপুরি সার্থকভাবে প্রয়োগ করা যায়।

যাহোক, আমরা দুয়েকটি সূত্র যাচাই ক'রে দেখি।

$$A + A = A$$

এখানে, '+' এর বদলে '•' বসিয়ে ঃ

$$A . A = A$$

পাওয়া গেল, যা, আমরা জানি, একটি বৈধ সূত্র।

আরেকটি সূত্র ঃ

$$A + \phi = A$$

এখানে '+' এর স্থলে '•' এবং ϕ এর স্থলে U বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$A . U = A$$

এবং এটিও একটি বৈধ সূত্র যা আমরা আগেই দেখেছি। আরেকটি সূত্র নেয়া যাক ঃ

$$A + U = U$$

এ'তে '+' এর স্থলে '•' এবং U এর স্থলে ϕ বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$A . \phi = \phi$$

এটিও কি আমরা ইতোমধ্যে পাইনি?

অন্যান্য সূত্রগুলির ওপর একই প্রক্রিয়া আরোপ করার জন্য পাঠকের ওপরই দায়িত্ব চাপানো গেল। যাচাই করুন। এবং আনন্দিত হোন। তত্ত্বের পরিপূর্ণতার সৌন্দর্য উপভোগ করুন। গণিত হলো পরম সৌন্দর্যময় বিশুদ্ধ জ্ঞান। এবং বিশুদ্ধ জ্ঞানই পরম আনন্দের।

সেট থিওরির এই যুগ্মতাকে বলে duality (ডুয়ালিটি)—অর্থাৎ তাতে মুদ্রার এপিঠও আছে ওপিঠও আছে। এরূপ duality আছে জ্যামিতিতে, বীজগণিতে, বিজ্ঞানের সূত্রাবলীতে—এবং সব পরিপূর্ণ বিজ্ঞানে, যা আমরা এই সিরিজের পরবর্তী খণ্ডগুলিতে ধাপে ধাপে এবং সহজ-সরল উপায়ে দেখব।

গাণিতিক যুক্তিতে সেট থিওরির প্রয়োগ

(Application of set theory to mathematical logic)

আমরা আগেই বলেছি যে সেট থিওরি হলো formal logic এর একটি অংশ। আবার গণিত হলো ব্যাপক অর্থে logic এরই একটি কাঠামোপূর্ণ প্রয়োগিক দিক (যা Frege, Cantor, Russell, Whitehead, Dedekind, Hilbert, Gödel প্রমুখ গণিতশাস্ত্রবিদ এবং দার্শনিক বিস্তারিত বিশ্লেষণ এবং প্রমাণের মাধ্যমে দেখাতে চেষ্টা

করেছেন এবং প্রতিষ্ঠিতও করে গেছেন।) মানুষের যাবতীয় objective বা নৈর্ব্যক্তিক (বা বস্তুনিষ্ঠ বা পক্ষপাতিত্বহীন) চিন্তাও যৌক্তিক। কিন্তু চিন্তার প্রক্রিয়ার সাথে আবশ্যিকভাবে আবেগ, পূর্বধারণা, ব্যক্তিগত পছন্দ-অপছন্দ ইত্যাদি জড়িত হয়ে পড়ে, যদি না তাকে শুরু করার পর একটি যান্ত্রিক পদ্ধতির হাতে ছেড়ে দেয়া হয়। যান্ত্রিকতার এই সুবিধা সবচেয়ে বেশি পাওয়া যায় গণিত থেকে। চিন্তন প্রক্রিয়ায় formal logic এর আশ্রয় নিলেও সেই সুবিধা পাওয়া যায়। কিন্তু একটি যান্ত্রিক অভ্যাসকে (যা প্রথমত কৃত্রিমতার ওপর নির্ভরশীল) স্বভাবগত সৃজনশীলতার (যা মূলত অকৃত্রিম এবং প্রস্তুতিহীন) সাথে মিলিয়ে নেয়া খুব একটি সহজ কাজ নয়। তার জন্য চাই দীর্ঘ দিনের অভ্যাস এবং আন্তরিক প্রচেষ্টাপূর্ণ আত্মীকরণ। কৃত্রিমতাপূর্ণ যান্ত্রিক যুক্তিকে একবার স্বাভাবিক অভ্যাসের মধ্যে গ্রথিত করতে পারলে উক্ত যান্ত্রিকতা থেকে সর্বোচ্চ ফল পাওয়া যায়। চিন্তার মাধ্যমে বিশুদ্ধ সত্যে উপনীত হওয়ার এটিই একমাত্র নির্ভরযোগ্য উপায়। এ কারণে নিচের উদাহরণগুলির আয়োজন করা হয়েছে। এখানে উপস্থাপিত কাল্পনিক তথ্যগুলিকে আশ্রয় ক'রে পাঠককে সংশ্লিষ্ট পদ্ধতিগুলিকে আয়ত্ত করার জন্য আহ্বান করা যাচ্ছে। অর্থাৎ তথ্যগুলির দিকে বেশি নজর দেবার প্রয়োজন নেই, প্রধানত প্রক্রিয়াগুলির প্রতিই বেশি নজর দিতে হবে।

1. আপনার স্ত্রীর তিনটি মানসিক বৈশিষ্ট্য তাঁর স্বভাবের মধ্যে প্রবলভাবে গ্রথিত : a, b, c। আপনার স্বভাবের চারটি প্রধান বৈশিষ্ট্য হলো ঃ c, d, e, f।

ধরা যাক একই জাতীয় বৈশিষ্ট্যের উপস্থিতি উভয়ের মধ্যে প্রবল হলে পারস্পরিক ঝগড়া-বিবাদ বেশি লেগে থাকে। এ সত্য জেনে আপনি তাঁকে বললেন : যে-স্বভাব তোমার মধ্যে প্রবল কিন্তু আমার মধ্যে প্রবল নয়, তুমি তাকে লালন কর, এবং যা আমাদের উভয়ের মধ্যে প্রবল তা আমরা উভয়ে পরিহার করব। শুনে তিনিও আপনাকে শর্ত দিলেন : যে-স্বভাব আমার মধ্যে প্রবল তুমি তা তোমার মধ্যে রেখ না। আপনারা উভয়ে পরস্পরের প্রস্তাবে রাজি হলেন। ধ'রে নেয়া হলো যে আপনারা উভয়ে উভয়ের স্বভাব সম্পর্কে জ্ঞাত। শুধু তাই নয়, প্রতিটি স্বভাবের (বা অভ্যাসের) বিপরীত স্বভাবও আছে যা আপনারা প্রয়োজনবোধে অভ্যাসের মধ্যে টেনে আনতে আপত্তি করবেন না ব'লে পরস্পরকে প্রতিশ্রুতি দিয়েছেন (যেমন, গালমন্দ করতে চাওয়ার বিপরীত হলো গালমন্দ সহ্য করতে চাওয়া; বেড়াতে যেতে চাওয়ার বিপরীত হলো বেড়াতে নিয়ে যেতে

চাওয়া . . .)। বিপরীত স্বভাব/অভ্যাস উভয়কে কাছে টানে এবং উভয়ের মধ্যে সম্প্রীতি বাড়িয়ে দেয়। তাহলে আপনাদের উভয়ের আচরণের তালিকাগুলি কেমন হবে, যদি আপনারা উভয়েই যার যার প্রতিশ্রুতির প্রতি অঙ্গীকারবদ্ধ থাকতে চান?

প্রিয় পাঠক, আমি সরাসরি গাণিতিক চেহারার কোনো সমস্যা বেছে নেইনি ব'লে এটি ভাবা ঠিক হবে না যে এ নিয়ে চিন্তা করলে সময় নষ্ট হবে। আমরা অধিকাংশ লোকে গাণিতিক সমস্যার জন্য গাণিতিক সমাধান খোঁজার জন্য প্রস্তুত থাকি, কিন্তু ক'জনে দৈনন্দিন জীবনেও গাণিতের প্রয়োগে অভ্যস্ত হবার চেষ্টা করি? 'অগাণিতিক' সমস্যায় যাঁরা গাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োগ করার জন্য সচেষ্ট হন, তাঁরাই হয়ে ওঠেন প্রকৃত গণিতজ্ঞ। অর্থনীতি, ম্যানেজমেন্ট, সমাজবিদ্যা, মনোবিজ্ঞান, দর্শনশাস্ত্র, জীববিজ্ঞান ইত্যাদি ক্ষেত্রকে আগে 'অগাণিতিক' ক্ষেত্র ব'লে মনে করা হতো ব'লে এই বিজ্ঞানগুলিতে কেউ তখন গণিতের পদ্ধতির পরীক্ষা নিরীক্ষা চালাননি। ফলে তখন এগুলি প্রকৃত বিজ্ঞান হয়ে উঠতে পারেনি। কিন্তু আধুনিক যুগে কিছু মনীষী এরূপ 'খাপ-ছাড়া, দায়িত্ব নিয়েছেন ব'লে আমরা জ্ঞানের উক্ত শাখাগুলির বিকশিত রূপ দেখার সুযোগ পেয়েছি। সুতরাং আহ্বান জানাচ্ছি এই 'অগাণিতিক' বিষয়গুলিকে বিশেষ গাণিতিক মর্যাদা দিতে এগিয়ে আসুন।

আপনার স্ত্রীর স্বভাবের সেট : $W = \{a, b, c\}$

আপনার স্বভাবের সেট : $Y = \{c, d, e, f\}$

আপনাদের উভয়ের মধ্যে যে-স্বভাব প্রবল :

$$\left.\begin{array}{r} W \,.\, Y \\ \text{বা } W \cap Y \end{array}\right\} = \{c\}$$

ধরা যাক এই c দ্বারা বুঝাচ্ছে যে রাগ হলে আপনারা উভয়ে উত্তপ্তবাক্যে তর্ক শুরু করেন। কেউই কারো কথা সহ্য করতে পারেন না। উভয়ের মধ্যে এই একই জাতীয় বৈশিষ্ট্য থাকায় আপনাদের সাংসারিক শান্তি বিঘ্নিত হতে পারে ব'লে উভয়কে এ ব্যাপারে সহনশীল হতে হবে। প্রয়োজনবোধে দুজনের মহাসেট থেকে c কে একেবারে বাদ দিতে হবে। কিংবা উভয়ের মধ্যে c' (অর্থাৎ অন্যের c এর উপস্থিতিতে নিরব হয়ে থাকা) বৈশিষ্ট্যটিকে অন্তর্ভুক্ত করতে হবে।

c কে বাদ দিলে বলতে হয় যে আপনাদের পারস্পরিক সম্পর্ক খুব ভালো যাবে। কারণ আপনার সেটে অন্য যে-বৈশিষ্ট্যগুলি আছে, তাঁর সেটে সেগুলি নেই। একই কথা বিপরীতক্রমেও সত্য। অর্থাৎ c বাদ দিলে ঃ

$$W \not\subset Y$$
$$Y \not\subset W$$
এবং $$W \,.\, Y = \phi$$

অর্থাৎ দুজনের মধ্যে অন্য কোনো মানসিক সংঘর্ষ লাগার সম্ভাবনা শূন্য। এ থেকে অনুমান করা যাচ্ছে যে আপনাদের এক জনের মধ্যে যে-যে বৈশিষ্ট্য আছে, অন্য জনের মধ্যে তা স্বাভাবিকভাবে সহ্য করার সদিচ্ছাও আছে। অর্থাৎ ঃ

$$W' = \{d, e, f, a', b'\}$$

যার অর্থ হলো, W এর complement-এ W-কে সহ্য করার উপাদান (a', b') এবং Y এর উপাদানগুলি আছে। একই ভাবে ঃ

$$Y' = \{a, b, d', e', f'\}$$

যার ব্যাখ্যা আগের মতোই। লক্ষ্য করুন, এবারও কিন্তু ঃ

$$W' \,.\, Y' = \phi$$

অর্থাৎ দুটি সেটের মধ্যে সংঘর্ষ লাগার কোনো ভয় নেই, এবং প্রতিটি সেটের মধ্যে অপরটির আক্রমণ শোষণ করার ক্ষমতাও রয়েছে।

অবশ্য আমরা একটি অত্যন্ত সহজ এবং তুচ্ছ উদাহরণ নিয়েছি। কেন নিয়েছি তা তো আগেই বলেছি। তাছাড়া প্রতিটি উপাদানের সাথে অন্যান্য উপাদানের পরোক্ষ যোগসূত্রও থাকতে পারে, যা প্রদত্ত সেটে অন্তর্ভুক্ত হয়নি। কিন্তু সেসব প্রসঙ্গ হিসাবের সাথে জড়িত নয়, তা হিসাবের আগের ব্যাপার।

2. আবুল (A), বাবর (B), চন্দন (C), দেলোয়ার (D), এশা (E), এবং ফরহাদের (F) কাছে সর্বমোট ৪ ধরনের জিনিস আছে—কলম, পেন্সিল, ঘড়ি, বই, ক্যামেরা, রেডিও, চশমা, এবং ব্যাটারি। জিনিসের সংখ্যা মোট 18টি। জিনিসগুলির সংকেত নিম্নরূপ ঃ

কলম = a
পেন্সিল = b
ঘড়ি = c
বই = d
ক্যামেরা = e
রেডিও = f
চশমা = g
ব্যাটারি = h

আবুল এবং বাবর উভয়ের কাছে পেন্সিল ও ঘড়ি আছে। অন্য কোনো কিছু তাদের উভয়ের কাছে নেই।

আবুল এবং এশার উভয়ের কাছে কলম ও পেন্সিল আছে। অন্য কোনো কিছু তাদের উভয়ের কাছে নেই।

দেলোয়ারের কাছে পেন্সিল আছে।

চন্দন ও দেলোয়ার উভয়ের কাছে রেডিও ও চশমা আছে।

বাবর ও চন্দন উভয়ের কাছে ক্যামেরা আছে।

ফরহাদের কাছে এমন দুটি জিনিস আছে যা দেলোয়ারের কাছেও আছে কিন্তু আবুল বা বাবরের কাছে নেই।

এশার কাছে এমন একটি জিনিস আছে যা অন্য কারো কাছে নেই।

কার কাছে কী আছে তার একটি (সম্ভাব্য) তালিকা তৈরি করুন। কারো কাছে একই জিনিসের দুটি নাই, এবং এক জনের কাছে সর্বোচ্চ চারটি জিনিস আছে।

এবার সমাধান করা যাক। প্রশ্নটি বড় হলেও আসলে তেমন কঠিন নয়। এটি একটি পুরোপুরি গাণিতিক সমস্যা। প্রদত্ত সমাধান পদ্ধতিকে অনুসরণ না ক'রেও আপনি অন্যভাবে নিজে চেষ্টা ক'রে দেখতে পারেন।

প্রথম তথ্য অনুসারে ঃ

$$A . B = \{b, c\} \ldots\ldots (1)$$

দ্বিতীয় তথ্য অনুসারে ঃ

$$A . E = \{a, b\} \ldots\ldots (2)$$

চতুর্থ তথ্য অনুসারে ঃ

$$C . D = \{f, g\} \ldots\ldots (3)$$

পঞ্চম তথ্য অনুসারে ঃ

$$B. C = \{e\} \ldots\ldots (4)$$

ষষ্ঠ তথ্য অনুসারে ঃ

$$D = \{f,\ g,\ b,\ x \mid x = \text{অন্য কোনো একটি জিনিস কিংবা কিছুই না}\} \ldots\ldots (5)$$

যেহেতু এক জনের কাছে মোট চারটি জিনিসের বেশি থাকতে পারে না, এবং যেহেতু তৃতীয় তথ্য অনুসারে দেলোয়ারের কাছে পেন্সিল (b) আছে, সেহেতু দেলোয়ারের কাছে f, g, b বাদে বড়জোর একটি জিনিস থাকতে পারে, যাকে x দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

ষষ্ঠ তথ্য অনুসারে আরো পাওয়া যায় ঃ

$$F . D = \{f, g\} \ldots\ldots (6)$$

একই তথ্য অনুসারে এও পাওয়া যাচ্ছে যে ঃ

$$f, g \notin A \ldots\ldots (7)$$

$$f, g \notin B \ldots\ldots (8)$$

এখানে $U = \{a, b, c, d, e, f, g\} \ldots\ldots (9)$

(1), (2), (7) থেকে ঃ

$a, b, c, \in A$, কিন্তু $f, g \notin A$

সুতরাং $A = \{a, b, c, x | x = a, b, c, f, g$ ভিন্ন অন্য কিছু$\}$

(1), (4), (8) থেকে ঃ

$b, c, e, \in B$, কিন্তু $f, g, \notin B$

সুতরাং $B = \{b, c, e, x | x = b, c, e, f, g$ ভিন্ন অন্য কিছু$\}$

(3), (4) থেকে ঃ

$e, f, g \in C$

সুতরাং $C = \{e, f, g, x | x = e, f, g$ ভিন্ন অন্য কিছু$\}$

(5) অনুসারে ঃ

$D = \{b, f, g, x | x =$ অন্যকিছু, যার উপস্থিতিতে প্রদত্ত কোনো শর্ত ভঙ্গ হয় না।$\}$

(2) থেকে ঃ

$E = \{a, b, x, x_2 | x_1, x_2 =$ অন্য জিনিস$\}$

6 থেকে ঃ

$F = \{f, g, x_1, x_2 | x_1, x_2 =$ অন্য কিছু$\}$

এই পর্যন্ত প্রাপ্ত তথ্য থেকে প্রাপ্ত মহাসেট ঃ

$$U_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$U_1' = \{h\}$$

অর্থাৎ এশার কাছে h (ব্যাটারি) আছে যা আর কারো কাছে নেই। সুতরাং $x_1 = h$:

$E = \{a, b, h, x_2 | x_2 =$ অন্য কিছু$\}$

আবার এই পর্যন্ত প্রাপ্ত মোট জিনিসের সংখ্যা 17টি। সুতরাং মাত্র একটি সেটে (অর্থাৎ এক জনের কাছে) d উপাদানটি (অর্থাৎ বই) আছে এবং অন্যান্য সেটগুলির x এর মান শূন্য। বইটি আবুলের হাতে আছে *ধ'রে নিলে* পাওয়া যায় ঃ

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{b, c, e\}$$

$$C = \{e, f, g\}$$

$$D = \{b, f, g\}$$

$$E = \{a, b, h\}$$

$$F = \{f, g\}$$

3. ধরা যাক আমাদের দেশে ঃ

রাজনীতিকদের দল (Group of politicians) = P.

ধনী লোকের দল (Group of rich people) = R.

শিক্ষিত লোকের দল (Group of educated people) = E.

সচেতন লোকের দল (Group of conscious people) = C.

স্বার্থপর লোকের দল (Group of selfish people) = S.

এ ব্যাপারে আপনাকে নিচের তথ্যগুলি দেয়া হলো (ধরা যাক তথ্যগুলি সত্য) ঃ

$$P \subset R \ldots\ldots (1)$$

$$R \not\subset E \ldots\ldots (2)$$

$$E \subset C \ldots\ldots (3)$$

$$C \,.\, P \neq \phi \ldots\ldots (4)$$

$$C \,.\, S = \phi \ldots\ldots (5)$$

$$P \,.\, S' \neq \phi \ldots\ldots (6)$$

তথ্যগুলিকে আপনি কিভাবে ব্যাখ্যা করবেন?

এই সমাধানটি খুব মনোযোগ দিয়ে বিবেচনা করতে হবে।

1) $P \subset R$ থেকে বুঝা যায় যে P হলো R এর একটি উপসেট। অর্থাৎ সব P R এর মধ্যে আছে। অর্থাৎ ঃ

All P are R

বা All politicians are rich.

(সব রাজনীতিকই ধনী।)

অবশ্য এর অর্থ এই নয় যে সব ধনী লোকেই রাজনীতিক, কারণ $R \subset P$ কি না তা এখানে বলা হয়নি।

2) $R \not\subset E$ এর অর্থ হলো R, E এর একটি উপসেট নয়, অর্থাৎ ঃ

All R are not E

বা All rich people are not educated.

(সব ধনী লোক শিক্ষিত নয়।)

এ থেকে অবশ্য একথা অনুমান করা ঠিক হবে না যে সব শিক্ষিত লোক ধনী নয় কিংবা ধনী।

3) $E \subset C$ থেকে বুঝা যায় যে ঃ

All E are C

বা All educated people are conscious.

(সব শিক্ষিত লোকই সচেতন।)

তার মানে অবশ্য এই নয় যে সব সচেতন লোক শিক্ষিত। তা হলে বলা হতো ঃ

$C \subset E.$

4) $C . P \neq \phi$, অর্থাৎ P এবং C এর মধ্যে common লোকসংখ্যা শূন্য নয়, অর্থাৎ সচেতন (C) রাজনীতিকদের (P) সংখ্যা শূন্য নয়, অর্থাৎ ঃ

Some P are C

বা Some politicians are conscious

(কিছু কিছু রাজনীতিক সচেতন।)

এ দ্বারা একথাও বুঝা যায় যে কিছু কিছু সচেতন ব্যক্তি রাজনীতিক বটে, তবে এ থেকে এরূপ বুঝা যায় না যে সব সচেতন ব্যক্তিই রাজনীতিক, কারণ এখানে বলা হয়নি $C . P = C$, বা $C \subset P$।

5) $C . S = \phi$, অর্থাৎ সচেতন (C) এবং স্বার্থপর (S) গ্রুপ দুটির মধ্যে common কেউ নেই, অর্থাৎ এমন কোনো সচেতন (বা স্বার্থপর) লোক নেই যে স্বার্থপর (বা সচেতন), অর্থাৎ ঃ

No C are S

বা No conscious person is selfish.

6) $P \, . \, S' \neq \phi$, অর্থাৎ রাজনীতিক এবং অস্বার্থপর দলদুটির মধ্যে common লোকসংখ্যা শূন্য নয়, অর্থাৎ ঃ

Some P are not–S

বা Some politicians are not selfish

(কিছু রাজনীতিক স্বার্থপর নন।)

সাবধান ঃ

(1), (2), এবং (3) থেকে যদি কেউ ভেবে বসেন যে ঃ

Some politicians are not educated

তাহলে ভুল হবে। সচরাচর অনেকেই বাক্য দুটি থেকে এই সিদ্ধান্ত টানবে। কিন্তু সেট operation এর মাধ্যমে সেগুলি থেকে এরূপ কোনো তথ্য পাওয়া যাচ্ছে না। যৌক্তিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক পদ্ধতির গুরুত্ব কতখানি তা এখান থেকেই বুঝা যায়।

(1), (2), এবং (3) থেকে যদি এমন কিছু পাওয়া যেত যে—

$$P \, . \, E' \neq \phi$$

তাহলে উক্ত সিদ্ধান্ত সঠিক হতো। কিন্তু প্রদত্ত তথ্য তিনটি থেকে এই সূত্রে আসার কোনো উপায় নেই।

প্রদত্ত তথ্যগুলি থেকে কি আর কিছু অনুমান করা যায়? সেট থিওরির সূত্রাবলীর মাধ্যমে বের করার চেষ্টা করুন এবং তা যাচাই করুন।

4. মনে করুন এদেশে যত ধরনের (শ্রেণীর) লোক আছে তাদের সেট U। আরো মনে করুন যে আপনি নিচের কায়দায় লোকসংখ্যাকে শ্রেণীবদ্ধ করেছেন ঃ

ধনী লোকের দল = R

সৎ লোকের দল = H

ব্যবসায়ীর দল = B

ঘুষ-খোর বা ঘুষ-প্রদানকারী লোকের দল = D

আপনি অনেক পর্যবেক্ষণ এবং তদন্তের পর এই সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হয়েছেন ঃ

1) এদেশের আপনার সংজ্ঞা অনুসারে ধনী লোক আছে।

2) এদেশে এমন লোক অনেক আছেন যারা সৎ কিন্তু ধনী নন।

3) এদেশে এমন ধনী লোক আছে যারা সৎ নয়।

4) এদেশের গোটা লোকসংখ্যাকে শুধু ধনী, সৎ, এবং ব্যবসায়ী এই তিন ভাগে ভাগ করা সম্ভব।

5) এদেশে যত ব্যবসায়ী আছে, তাদের সবাইকে হয় ঘুষ দিতে হয় না হয় নিতে হয়।

6) ঘুষ দেয়া-নেয়া ছাড়া ব্যবসায়ে সফল হওয়া যায় না, এবং ব্যবসায়ে সফল না হয়ে ধনী হওয়া এদেশে সম্ভব নয়।

তথ্যগুলি থেকে আপনি একটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত নিতে চান এবং সে ব্যাপারে আপনি সেট থিওরির নিয়মাবলী ব্যবহার করতে চান। কী সিদ্ধান্ত টানবেন?

সমাধান !—

এখানে 1) অনুসারে :

$$R \neq \phi$$

2) অনুসারে :

$$H \,.\, R' \neq \phi$$

3) অনুসারে :

$$R \,.\, H' \neq \phi$$

4) অনুসারে :

$$U = R + H + B$$

5) অনুসারে :

$$B \subset D$$

6) অনুসারে :

$$R \subset D$$

ঘুষ লেন-দেন যারা করে তাদেরকে যদি অসৎ বলতে হয়, তাহলে বলা যায় যে :

$$D \subset H'$$

এবং যেহেতু $B \subset D$ এবং $D \subset H'$, সেহেতু $B \subset H'$, অর্থাৎ এদেশে সব ব্যবসায়ীই অসৎ; এবং যেহেতু $R \subset D$ এবং $D \subset H'$, সেহেতু এদেশে সব ধনী লোকই অসৎ।

সিদ্ধান্তগুলি বাস্তবে সত্য নয় নিঃসন্দেহে। কিন্তু *যৌক্তিকভাবে* সেগুলি কি বৈধ? নিজে অন্যভাবেও যাচাই করুন।

এই জাতীয় আরো অসংখ্য উদাহরণ দেয়া যায়। কিন্তু দৈনন্দিন জীবন থেকে অন্যান্য উদাহরণ সৃষ্টি ক'রে সেগুলিকে বিশ্লেষণ করার দায়িত্ব পাঠকের ওপর ছেড়ে দিয়ে আমরা কয়েকটি মূল সূত্র দেখব।

$$A \, . \, A' = ?$$

অন্য কথায়, কোনো কিছু কি একই সাথে কোনো সেটের মধ্যে এবং বাইরে থাকতে পারে? অন্যভাবে ঘুরিয়েও বলা যায়, কোনো কিছু কি একই সাথে আছে এবং নেই হতে পারে? না। একে বলে law of contradiction বা আত্মবিরোধের তত্ত্ব। দৃশ্যমান বা বোধগম্য বাস্তবতার কোনো কিছু আত্মবিরোধপূর্ণ হতে পারে না। ফলে ঃ

$$AA' = \phi$$

মানব যুক্তি সার্বিকভাবে যে নিয়ম মেনে চলে তাকে বলা যায় law of excluded middle* বা যুক্তির প্রান্তীয় নীতি। এই নীতি অনুসারে, কোনো কিছুর কোনো বৈশিষ্ট্য হয় আছে, কিংবা নেই—যে-কোনো একটি সত্য হবে, উভয়টি নয়। ফলে ঃ

$$A + A' = U$$

একটি মজার ব্যাপার হলো এই যে, সেট থিওরি সম্পর্কিত যাবতীয় সূত্রাবলীকে মাত্র তিনটি সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়। সমীকরণ তিনটি হলো ঃ

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A' + B')' + (A' + B)' = A$$

এ থেকেই বুঝা যায় যে ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মতো সেট থিওরিকেও এই তিনটি মৌলিক অনুসিদ্ধান্ত থেকে অবরোহ (deductive) পদ্ধতিতে বিকশিত করা যায়। তা করা হলে, AB এবং $A \subset B$ কে $A+B$ এবং A' দ্বারা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যাবে ঃ

AB-র অর্থ হলো $(A' + B')'$

$A \subset B$-র অর্থ হলো $A + B = B$

গণিতের কোনো শাখাকে এভাবে অল্প সংখ্যক স্বতঃসিদ্ধ বা axiom বা পূর্বনীতি দ্বারা সার্বিকভাবে ব্যাখ্যা করতে পারলে উক্ত শাখার সার্বিক দার্শনিক ভিত্তিটি জানা যায়। আর সেভাবেই তার মূল কাঠামোটিকে জেনে তাকে যেমন প্রয়োজন মতো বিকশিত ক'রে

* বিষয়টিকে অন্য দৃষ্টিকোণ থেকে জানার জন্য দেখুন *অন্ধকারের বস্ত্রহরণ ঃ বৈজ্ঞানিক এবং বুদ্ধিবৃত্তিক সৃজনশীলতার রাজ্যে এক গোপন অভিযান।*

তোলা যায়, তেমনি জ্ঞানের অন্যান্য শাখায় তার প্রয়োগের সম্ভাবনা সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা অর্জন করা যায়। গণিতবিদ Peano এরূপ একটি সফল পদ্ধতি বের করেছিলেন পাটীগণিতকে axiomatic উপায়ে ব্যাখ্যা করার জন্য। তাঁর সমকালীন গণিতবিদ Frege, Dedekind এবং তাঁদেরকে অনুসরণ ক'রে Russell, Whitehead এবং আরো কিছু গণিতবিদ-দার্শনিক সেই ধারাকে এগিয়ে নিতে গিয়ে কিছু যুগান্তকারী আবিষ্কার এবং বিপ্লব সাধন করেছিলেন। উল্লেখ্য, ইউক্লিডীয় স্বতঃসিদ্ধগুলির পারস্পরিক নির্ভরশীলতাকে বিচার করতে গিয়ে তাদের মধ্যে একটি অসঙ্গতি থেকে আবিষ্কৃত হয় নন-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি, যাতে নেতৃত্বস্থানীয় অবদান রাখেন Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Gauss এর মতো সৃজনশীল গণিতবিদগণ। এর ফলশ্রুতি হিসাবে যে গণিতের ধারার জন্ম হয়েছিল, তার ওপর ভিত্তি ক'রেই আইনিস্টাইন* (Einstein) তাঁর আপেক্ষিতা তত্ত্ব প্রদান করতে পেরেছিলেন। উক্ত গাণিতিক সিস্টেম ছাড়া আমরা জগৎ পাল্টে দেয়া আপেক্ষিকতা তত্ত্ব পেতাম না।

সেট থিওরির সমীকরণগুলির যে ব্যতিক্রমধর্মী চরিত্র, তা লক্ষ্য করা গেছে পাটীগণিত এবং বীজগণিতেও। যেমন ঃ দুটি সংখ্যার যোগফলকে তাদের ল. সা. গু. এবং গুণফলকে তাদের গ. সা. গু. দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, $a \subset b$ দ্বারা 'a হলো b এর একটি উৎপাদক' এবং a' দ্বারা $\frac{30}{a}$ বুঝানো হলে, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 এই আটটি সংখ্যায় উক্ত নিয়মগুলি প্রয়োগ করলে যে গাণিতিক সিস্টেম পাওয়া যায় তা সেট থিওরির কাঠামোর অনুরূপ হয়। যাচাই ক'রে দেখা যাক ঃ

$2 + 5 = 10$ [5, 2 এর ল. সা. গু. = 10]

$2 . 5 = 1$ [5, 2 এর গ. সা. গু. = 1]

$3 \subset 6$, কারণ 3 হলো 6 এর একটি উৎপাদক।

$$2' = \frac{30}{2} = 15$$

$$5' = \frac{30}{5} = 6$$

ইত্যাদি। এবার পূর্বোক্ত কিছু সমীকরণ এখানে ব্যবহার করা যাক ঃ

$$(A + B)' = A'B'$$

* Einstein শব্দটি জার্মান ভাষার। বাংলায় জার্মান *শব্দটির* চেয়ে বাঙালির *উচ্চারণকে* প্রাধান্য দেয়ার জন্য আমি 'ন' এর সাথে 'ই' কার ব্যবহার ক'রে থাকি। দ্রুত উচ্চারণে 'নি' উচ্চারণই স্বাভাবিক। অবশ্য এই বানান পাঠককে মানতে হবে এমন কোনো কথা নেই।

বামপক্ষ ঃ

$$
\begin{aligned}
&(A + B)' \\
&= (2 + 5)' \\
&= 10' \\
&= \frac{30}{10} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ডানপক্ষ ঃ

$$
\begin{aligned}
&A'B' \\
&= 2' \,.\, 5' \\
&= \frac{30}{2} \cdot \frac{30}{5} \\
&= 15 \,.\, 6
\end{aligned}
$$

= 3 [কারণ '·' দ্বারা গ. সা. গু. বুঝানো হচ্ছে।]

আরেকটি সমীকরণ ঃ

$$A + A' = U$$

বামপক্ষ ঃ

$$
\begin{aligned}
&5 + 5' \\
&= 5 + \frac{30}{5} \\
&= 5 + 6
\end{aligned}
$$

= 30 ['+' = ল. সা. গু]

= U [কারণ এখানে U = 30]

আরেকটি সূত্র নেয়া যাক ঃ

$$A + (BC) = (A + B)\,(A + C)$$

বামপক্ষ ঃ

$A + (BC)$

= 6 + (15 . 10) [ইচ্ছেমতো সংখ্যা নেয়া হলো]

= 6 + 5 [15 . 10 এর গ. সা. গু. = 5]

= 30 [6, 5 এর ল. সা. গু. = 30]

ডানপক্ষ ঃ

$$(A + B)(A + C)$$
$$= (6 + 15)(6 + 10)$$
$$= 30.30 \quad [6, 15 \text{ এর ল. সা. গু.} = 6, 10 \text{ এর ল. সা. গু.} = 30]$$
$$= 30 \quad [30, 30 \text{ এর গ. সা. গু} = 30]$$

এভাবে অন্যান্য সূত্রগুলিকেও যাচাই করা যাবে। এরূপ আরো অনেক structure পর্যবেক্ষণ ক'রে ব্রিটিশ গণিতবিদ জর্জ বুল (George Boole, 1815–1864) 1854 সালে **An Investigation into the Laws of Thought** নামে একটি বই প্রকাশ করেন, যাতে তিনি গণিতকে বিশুদ্ধ যুক্তির কাঠামোর মধ্যে টেনে এনে একটি নোতুন যৌক্তিক গাণিতিক ধারার প্রবর্তন করেন। তাঁর নামানুসারে গণিতের উক্ত শাখাটিকে Boolean Algebra নামে অভিহিত করা হয়। তাঁর এই আবিষ্কার যৌক্তিক-গাণিতিক চিন্তায় একটি নোতুন ধারার সূচনা করেছিল। এমনকি ইলেকট্রিক সার্কিটের গঠন এবং কম্পিউটারের লজিক গেটের ধারণাও এসেছিল তাঁর সেই বিশুদ্ধ চিন্তার ফসল থেকেই।* এই সিরিজের পরবর্তী একটি ধাপে আমরা বুলিয়ান অ্যালজেবরা নিয়ে আলোচনা করব।

সম্ভাবনাতত্ত্বে সেট থিওরির প্রয়োগ

সম্ভাবনাতত্ত্বে (probability theory) সেট থিওরির প্রয়োগ অত্যন্ত কার্যকর এবং তত্ত্বীয়ভাবে অন্তর্দৃষ্টিদায়ী। সম্ভাবনার ধারণাটি গণিতের ইতিহাসে অত্যন্ত আধুনিক এবং বিজ্ঞানের জটিলতম এবং সর্বাধুনিক শাখাগুলির প্রত্যেকটিতে এর ব্যবহার অত্যাবশ্যক। বাস্তবতার (reality) ভিন্ন ভিন্ন কাঠামো অনুসারে এর ধারণার আলোকে বিভিন্ন তত্ত্বও গ'ড়ে উঠেছে। তবে আমরা এখানে এর মৌলিক ধারণাটিকেই প্রতিষ্ঠিত করব শুধু। এবং একটি কথা এ প্রসঙ্গে মনে রাখলে সম্ভাবনা তত্ত্বের গুরুত্ব উপলব্ধি করতে সহজ হবে ঃ যে-সব ক্ষেত্রে বাস্তবতা বহুমাত্রিক (multidimensional) এবং তার প্রতিটি ঘটনাই (event, phenomenon) অন্যটি থেকে আপাতভাবে বিচ্ছিন্ন (discrete),

* *দেখুন একটি আইডিয়ার জন্ম ঃ কম্পিউটার, কিভাবে এল, কিভাবে কাজ করে, কেন করে* (রোদেলা পাবলিকেশন্স)।

এবং ফলে সেসব ক্ষেত্রগুলিকে অন্য কোনো একক বা একগুচ্ছ গাণিতিক সূত্রের আওতায় এনে ব্যাখ্যা করা যায় না (সমাজবিজ্ঞান, অর্থনীতি, মনোবিজ্ঞান, জনমিতি, কোয়ান্টাম মেকানিক্স সহ যে-কোনো উপাত্তনির্ভর গবেষণাকর্ম এরূপ বাস্তবতার আওতায় পড়ে), সেসব ক্ষেত্রে সম্ভাবনাতত্ত্ব এবং তার ওপর নির্ভরশীল বিভিন্ন পদ্ধতিই বিশ্লেষণের, তত্ত্বগঠনের, এবং সিদ্ধান্তগ্রহণের একমাত্র হাতিয়ার।

কোনোরূপ formal সংজ্ঞার সাহায্য না নিয়েও আমরা বলতে পারি যে, একগুচ্ছ বা অসংখ্য ঘটনার (সম্ভাবনার) মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট ঘটনা কতবার ঘটবে ব'লে গাণিতিকভাবে অনুমান করা যায়, তাকে বলে উক্ত ঘটনার সম্ভাবনা (probility)। যেমন, একটি ছক্কার ছয়টি পার্শ্ব (face, side) আছে। ছক্কাটির গঠন একেবারে সুষম (uniform)। তাকে যদি 10 বার ফেলা হয়, তাহলে তার মধ্যে কতবার 6 পড়বে?

সম্ভাবনা মূল বিষয়টিকে অনেকেই ধরতে পারে না। অথচ গাণিতের ফর্মুলা ব্যবহার ক'রে কাজ চালিয়ে যায় ঠিকই। আমরাও এখানে এ বিষয়ে তত্ত্বীয় আলোচনা করব না, তবে এই উদাহরণটিকে নিয়ে চিন্তার মধ্যে একটু খেলা করব, অর্থাৎ Thought Experiment করব।† ধরা যাক ছক্কাটির সব পাশেই কেবল একটি সংখ্যা লেখা আছে—6। তাহলে তো তাকে যতবারই ফেলা হোক, প্রতিবারই 6 পড়বে। সেক্ষেত্রে 10 বারের মধ্যে 6 পড়বে 10 বার। এবং 100 বারের মধ্যে 6 পড়বে 100 বার। 500 বারের মধ্যে 500 বার। ইত্যাদি। তাহলে সম্ভাবনা হলো ঃ

ছক্কাটিকে 100 বার ফেললে 6-এর পিঠ পড়বে 100 বার। সুতরাং সংশ্লিষ্ট ঘটনার সম্ভাবনা $\frac{100}{100} \times = 100\%$ বা 1।

কিন্তু বাস্তবে একটি ছক্কাতে পিঠ থাকে 6টি—1, 2, 3, 4, 5, 6। ফলে তাতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা থাকে মাত্র একবার। এই সংখ্যাগুলির সেটকে D দ্বারা এবং ছক্কাটিকে একবার ফেলার পর যা ঘটবে তাকে P(x) দ্বারা চিহ্নিত ক'রে বলা যায় যে, P(x) সেটে একটি নির্দিষ্ট সময়ে মাত্র একটি সংখ্যা থাকবে। ফলে ঃ

$$\text{probalility of 6 বা } P(6) \quad = \frac{\text{6 কয়টি?}}{\text{মোট সংখ্যা কয়টি? (D)}}$$

† Thought Experiment-এর কৌশলটি বিজ্ঞানী এবং চিন্তাবিদদের দ্বারা কিভাবে ব্যবহৃত হয় তা জানার জন্য দেখুন *অন্ধকারের বস্ত্রহরণ।*

$$= \frac{1টি}{6টি}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$= \cdot 166 \ldots$$

তাহলে ছক্কাটিকে 10 বার ফেললে 6 পড়তে পারে $\cdot 166 \times 10$ বার $= 1\cdot 66$ বার; 100 বার ফেললে $\cdot 166 \times 100$ বার $= 16$ বা 17 বার, ইত্যাদি।

একটি প্যাকেটে তাস থাকে 52টি – 13টি ডায়মন্ড, 13টি স্পেড, 13টি হার্ট, 13টি ক্লাব। প্রতি শ্রেণীর তাসে একটি ক'রে king থাকে। ভালো ক'রে শাফ্‌ল করা এক সেট তাস থেকে চোখ বুজে একটি তাস উঠালে ঃ

একটি ডায়মন্ড (D) পাবার সম্ভাবনা কত?

একটি স্পেড পাবার সম্ভাবনা কত?

একটি স্পেডের কিং (Ks) পাবার সম্ভাবনা কত?

সমাধানটি খুব সোজা। ডায়মন্ডের সংখ্যাকে n(D), স্পেডের সংখ্যাকে n(S), . . . মোট তাসের সংখ্যাকে n(T) দ্বারা প্রকাশ করলে, এবং P(x) দ্বারা x পাবার সম্ভাবনাকে বুঝালে ঃ

P (D) = ডায়মন্ড পাবার সম্ভাবনা $= \frac{n(D)}{n(T)}$

$$= \frac{13}{52}$$

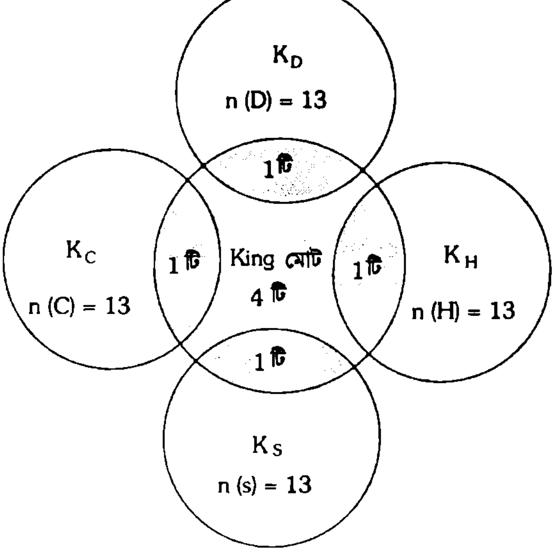
$$= \frac{1}{4}$$

$= \cdot 25$ বা 25%

অর্থাৎ চোখ বুজে 100 বার টানলে সম্ভাবনা আছে যে তাদের মধ্যে 25 বারই পাওয়া যাবে ডায়মন্ড। স্পেডের ক্ষেত্রেও একই হিসাব প্রযোজ্য।

কিন্তু স্পেডের কিং পাবার সম্ভাবনা কত? অর্থাৎ P(Ks) = ?

এই প্রশ্নের জবাব দেয়ার আগে নিচের ভেনচিত্রটি একবার দেখে নেয়া যাক।



চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে D, C, S, H প্রতিটি শ্রেণীর কার্ডের মধ্যে King মোট 4টি। সুতরাং যখন প্রশ্ন ওঠে S এর king নিয়ে তখন king কে এমন একটি শ্রেণী হিসেবে ভাবতে হয় যার মোট সদস্য সংখ্যা 4। আবার শুধু একটি king পেলেই হলো না, Spade এর king পেতে হবে। এ কারণে আমাদেরকে নির্ণয় করতে হবে n(S) এবং n(K) এই দুটি সেটের intersection এর সম্ভাবনা। অর্থাৎ ঃ

$$P(K_S) = P(S \cap K) = \frac{n(S \cap K)}{n(T)}$$

$$= \frac{1}{52}$$

$$\approx \cdot 01923$$

প্রতিবার ভালোভাবে শাফ্ল ক'রে যদি 1000 বার তাস টানা হয়, তাহলে স্পেডের কিং পাওয়া যেতে পারে ($\cdot 01923 \times 1000$) বার বা 19 বার।

অবশ্য যদি বিশেষ কোনো শ্রেণীর কিং-এর কথা না ব'লে শুধু বলা হয় কতবার কিং পাওয়া যাবে (K_S, K_D, K_C, বা K_H), তাহলে সম্ভাবনাটি একটু বেড়ে যাবে ঃ

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(T)}$$

$$= \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{13}$$

$$\approx \cdot 0769$$

এবং 1000 বার চেষ্টা করলে যে-কোনো ধরনের কিং পাওয়া যাবে ($\cdot 079 \times 1000$) বার বা 76 বা 77 বার।

সম্ভাবনার ধারণার সাথে সম্পৃক্ত সেট গুচ্ছের যোগ-বিধি একটু ভিন্ন ধরনের। যেমন A এবং B এর সম্ভাবনা জানা থাকলে A + B এর সম্ভাবনা, P(A + B), নির্ণয় করার ক্ষেত্রে নিচের সূত্র প্রয়োগ করতে হয় ঃ

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

অর্থাৎ $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

কারণ, A এবং B এর মধ্যে এমন কিছু উপাদান থাকতে পারে যারা A, B উভয়ের মধ্যে common। সেগুলিকে A এবং B কে যোগ করার সময়ে দুই বার হিসাবে আনা হয়ে যাবে। ফলে সেগুলিকে একবার বাদ দিয়ে উক্ত ভুল সংশোধন করতে হয়। A, B এর মধ্যে যদি common কিছু না থাকে, তাহলে $(A \cdot B)$ বা $(A \cap B)$ এর মান হবে শূন্য, এবং তখন $P(A + B) = P(A) + P(B)$।

আবারও তাসের উদাহরণ নেয়া যাক। ভালোভাবে শাফ্‌ল করা 52টি তাস থেকে আন্দাজে যে-কোনো একটি টানলে তার একটি হার্ট (H) বা হার্টের টিক্কা (Ace of Heart) হবার সম্ভাবনা কত?

পরিচ্ছন্নভাবে চিন্তা শুরু করা যাক। ধরা যাক 52টি তাস থেকে 52টিকে টানা হলো। তাহলে প্রাপ্ত ঃ

No. of heart = 13

No. of ace of heart = 1

হার্টের টিক্কা তো একটিই মাত্র থাকতে পারে। হিসাবে পাওয়া যাচ্ছে 14টি (13 + 1)। কিন্তু তাস তো পাওয়া যাবে আসলে 13টি, যাদের মধ্যে টিক্কাও অন্তর্ভুক্ত আছে। ফলে ঃ

$$(H + A_H) = H + A_H - H \cdot A_H$$

অর্থাৎ $(H \cup A_H) = H + A_H - (H \cap A_H)$

যেহেতু ঃ $A_H \subset H$, সেহেতু

$$A_H + H = H$$
$$= 13$$

সুতরাং উক্ত সূত্রের প্রতীকগুলির মান দাঁড়াবে ঃ

$$\begin{aligned} 13 &= H + A_H - H \cdot A_H \\ &= 13 + 1 - 1 \\ &= 14 - 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

শেষের রাশিটিকে বাদ দেয়ার প্রয়োজনীয়তা যাচাই হয়ে গেল। এবার তাহলে সম্ভাবনা নির্ণয় করা যাক ঃ

$$\begin{aligned} P(H + A_H) &= P(H) + P(A_H) - P(HA_H) \\ &\overset{?}{=} \frac{13}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52} \end{aligned}$$

কিন্তু এখানে $P(A_H)$ এর মান বসানোতে ভুল হয়ে গেছে। যেহেতু $A_H \subset H$, এবং যেহেতু H কে ইতোমধ্যেই হিসাবে নেয়া হয়েছে, সেহেতু A_H এর সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে *H এর সম্ভাবনার সাপেক্ষে*। ফলে ঃ

$$P(A_H) = \frac{1}{13}$$

কেননা ঃ
$$\begin{aligned} n(H) &= U - \{n(S) + n(C) + n(D)\} \\ &= 52 - \{13 + 13 + 13\} \\ &= 13 \end{aligned}$$

ফলে
$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{n(H)}{n(T)} \\ &= \frac{13}{52} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

এবং
$$\begin{aligned} P(A_H) &= \frac{n(A_H \cap H)}{n(H \cap C)} \\ &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

পূর্বোক্ত সমীকরণে মানটি বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$
\begin{aligned}
P(H + A_H) &= P(H) + P(A_H) - P(HA_H) \\
&= \frac{13}{52} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} \\
&= \frac{13 + 4 - 1}{52} \\
&= \frac{16}{52} \\
&= \frac{4}{13} \\
&\approx \cdot 3076
\end{aligned}
$$

অর্থাৎ প্রতিবার ভালোভাবে শাফ্ল ক'রে 1টি ক'রে তাস 1000 বার টানলে সর্বমোট প্রায় 307 বার হার্ট বা *হার্টের টিক্কা* পাওয়া যাবে।

যেহেতু এই অধ্যায়টি মূলত সম্ভাবনা-সম্বন্ধীয় নয়, সেহেতু এ বিষয়ে আর আলোচনা করা হলো না।

অধ্যায় : ৫

ফাংশান এবং রিলেশন (Functions and Relations)

আমরা যারা প্রচলিত পদ্ধতিতে গণিত শিখেছি, তারা গণিতকে তার মৌলিক এবং দার্শনিক স্তর থেকে আয়ত্ত করতে পারিনি। এ কারণে অধিকাংশ ছোটখাট প্রশ্নের উত্তর আমরা দিতে পারি না। শুধু তাই নয়, সেসব ক্ষেত্রে উক্ত প্রশ্নের জবাব দিতে গিয়ে আবার সেই প্রশ্নটিকেই পাই, এবং জবাব পাওয়া যায়নি ব'লে ভেবে বসি যে প্রশ্নটিই গুরুত্বপূর্ণ ছিল না। ফলে অনেক গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্রে আমরা কিছু উত্তর মুখস্থ ক'রে রাখি—সেগুলির পেছনে যে প্রশ্নগুলি ছিল তাদের ইতিহাসকে বেমালুম ভুলে যাই। উদাহরণস্বরূপ ঃ

$$2 + 3 = 5$$

সমীকরণটিতে '+' দ্বারা কী বুঝাচ্ছে? এবং '=' চিহ্নের মানেই বা এখানে কী? এরূপ প্রশ্নের সম্মুখীন হলে অনেকে খুব বেকায়দায় পড়ে যায়। কেউবা আবার বলে যে এটিই তো নিয়ম। অনেকে আবার সরাসরি ব'লে দেয় যে এসব প্রশ্নের উত্তর না জেনেও গণিত শেখা যায়। কিন্তু না, তা যায় না। ওভাবে ভাবা মানে গণিতকে কেবল একটি গণনার হাতিয়ার হিসাবে মনে করা। কিন্তু গণিত নিজেই একটি চিন্তার কাঠামো; তা কেবল বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার তথ্যের পরিমাণগত দিকগুলির মাপ-জোখের সহায়ক যন্ত্র নয়। বলা বাহুল্য, তত্ত্বীয় পদার্থবিদ্যা, আধুনিক জীববিদ্যা, পারমাণবিক রসায়নবিদ্যা, কম্পিউটারের আধুনিকতম তত্ত্বাবলী এবং প্রযুক্তি ইত্যাদির অনেক কিছুর ধারণা এবং সার্বিক কাঠামো এসেছে গণিতের বিভিন্ন বিষয়ের কাঠামোগত আন্তঃসম্পর্ক অনুসন্ধানের ফলশ্রুতি হিসাবে। তাছাড়া গণিতের বিভিন্ন কাঠামোর মৌলিক আন্তঃসম্পর্ক না জানলে খোদ গণিতকেই জানা যায় না এবং নোতুন আবিষ্কার-উদ্ভাবন দ্বারা তার পরিসরকে আরো বিকশিত ক'রে তোলা যায় না। এসব কারণে এরূপ মৌলিক প্রশ্নের জবাব খুঁজতেই হবে। অন্তত প্রশ্নগুলি দ্বারা আকৃষ্ট হতে হবে।

তাহলে উক্ত উদাহরণে '+' দ্বারা কী বুঝানো হয়েছে? 'বৃদ্ধি'? সেটিও ঠিক নয়। বৃদ্ধি হলো '+' প্রক্রিয়াটির ফল। এখানে + এবং = হলো দুটি প্রক্রিয়া যেগুলি একই সাথে

ক্রিয়াশীল। 'যোগ' দ্বারা এক সেট সংখ্যার মধ্যে একটি পরম্পরা (order) বুঝাচ্ছে এবং '=' দ্বারা বুঝাচ্ছে উক্ত পরম্পরায় 2 এবং 3 এর সাথে অন্য একটি সংখ্যার সম্পর্ক। নিচের ধারাটি থেকে বিষয়টি স্পষ্ট হবে ঃ

$$N = \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots$$

এখানে N = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, যা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। চিত্রের মাধ্যমে এতে দেখানো হয়েছে যে N এর 2 এবং 3 সংখ্যা দুটির সাথে উক্ত সেটের আরেকটি সংখ্যা সম্পৃক্ত ঃ 5। অন্য কথায়, N এর 2 ও 3 এর 'যোগাত্মক সম্পর্কের' সাথে তার আরেকটি উপাদান সমতুল্য, যা হলো 5। 4 ও 5 এর বেলাতেও একই কথা প্রযোজ্য।

কিন্তু 'যোগাত্মক সম্পর্ক' দ্বারা এখানে কী বুঝানো হচ্ছে? সম্পর্কটি 'বিয়োগাত্মক' হলে কি তা 5 এর সাথে সমতুল্য হতো?

না, তা হতো না। প্রতিটি সম্পর্কের কমপক্ষে একটি বিশেষ 'দিক' বা direction থাকে। বিয়োগাত্মক সম্পর্কের direction হবে ভিন্ন ঃ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$$

চিত্রে 'বিয়োগ' এর দিক দেখানো হলো। প্রদর্শিত উদাহরণ দুটি হলো ঃ

$$3 - 2 = 1$$

$$7 - 5 = 2$$

এরূপ আলোচনার ধারাবাহিকতায় আরো এগুতে গেলে জানতে হবে সেট N এর 1, 2, 3, . . . ইত্যাদি প্রতীকগুলির ক্রম বা order এর রীতি কেমন। আসলে N এর উপাদানগুলির ক্রমের এই বিশেষ রীতির কারণেই সেগুলিতে '+' '–' উপরোক্ত চরিত্র প্রদর্শন করছে, এবং সে কারণেই গণনার ক্ষেত্রে সেগুলিকে ব্যবহার করা যায়। জটিল সংখ্যার সেটের উপাদানগুলির এই ক্রম নেই ব'লে জটিল সংখ্যাকে গণনার কাজে ব্যবহার করা যায় না। কিন্তু ক্রম নিয়ে আমরা এখানে আলোচনা করব না। তবে N এর ক্রমের আরেকটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য দেখার জন্য নিচের উদাহরণ তিনটিকে বিবেচনা করা যাক ঃ

$$N = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \ldots$$

$$1 + 0 = 1$$

$$4 + 0 = 4$$

$$8 + 0 = 8$$

চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে 1 এর সাথে 0 এর সম্পর্ক উক্ত 1 এর সাথে সমতুল্য; 4 এর সাথে 0 এর সম্পর্ক উক্ত 4 এর সাথে সমতুল্য; 8 এর সাথে 0 এর সম্পর্ক আবারও 8 এর ওপর আপতিত হচ্ছে।

অর্থাৎ N এর কোনো উপাদানের সাথে 'শূন্য'এর যোগবোধক (বা বিয়োগবোধক) সম্পর্ক উক্ত উপাদানের ওপরই আপতিত হয়, এবং ফলে সম্পর্কটি N এর ক্রম বরাবর কোনো দিকে ধাবিত হয় না। এই কথাটিকেই আমরা দৈনন্দিন ভাষায় এভাবে ব'লে থাকি যে, কোনো সংখ্যার সাথে 0 কে যোগ করলে যোগফল হয় উক্ত সংখ্যাই, এবং দৈনন্দিন ভাষার এই ছক-বাঁধা রূপের মধ্যে সম্পর্কের প্রকৃত রহস্যটি ঢাকা প'ড়ে থাকে।

এই বিষয়টিকে আমরা উল্টোভাবে বিবেচনা ক'রে নিজেদেরকে প্রশ্ন করতে পারি ঃ শূন্য কাকে বলে?

শূন্যের অস্তিত্ব সংজ্ঞার ব্যাপার। সংখ্যার উদ্ভাবনের হাজার হাজার বছরের মধ্যেও শূন্য উদ্ভাবিত হয়নি। তা উদ্ভাবিত হয়েছে এবং স্পষ্টভাবে ব্যবহৃত হয়েছে অনেক পরে। আসলে বিমূর্ত (abstract) গণিতে সংখ্যার জন্য 'শূন্য' শব্দটিই বেমানান। একে বলা হয় 'একক' বা unity—অর্থাৎ যা কোনো কিছুকে তার নিজের ওপর আপতিত করে। যোগ এবং বিয়োগের ক্ষেত্রে এককটিকে '0' এবং গুণন ও ভাগের ক্ষেত্রে 1 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। গুণনের ক্ষেত্রে ঃ

$$2 \times 1 = 2$$

$$7 \times 1 = 7$$

$$9 \times 1 = 9$$

অর্থাৎ 1, 2 কে তার নিজের ওপরই ফেলে দিচ্ছে, ইত্যাদি। চিন্তার মধ্যে গতানুগতিকতার প্রভাবকে এড়াবার জন্য '+' এবং '×' চিহ্নদুটিকে বাদ দিয়ে একটি অপ্রচলিত প্রতীক '*' ব্যবহার করলে ভালো হবে ঃ

যোগের ক্ষেত্রে ঃ

$$2 * 0 = 2$$
$$7 * 0 = 7$$
$$9 * 0 = 9$$

গুণনের ক্ষেত্রে ঃ

$$2 * 1 = 2$$
$$7 * 1 = 7$$
$$9 * 1 = 9$$

এবার '*' চিহ্নটির সাহায্যে '+' এবং '×' এর গতানুগতিক 'অগাণিতিক' অর্থ থেকে মুক্তি পাওয়া গেছে। কিন্তু '0' এবং '1' প্রতীক দুটির হাত থেকেও মুক্তি পাওয়া দরকার। এই প্রতীকগুলিকে বাদ দিয়ে আমরা 'একক'কে বুঝাতে 'e' প্রতীকটিকে ব্যবহার করব ঃ

যোগের ক্ষেত্রে ঃ

$$2 * e = 2$$
$$7 * e = 7$$
$$9 * e = 9$$

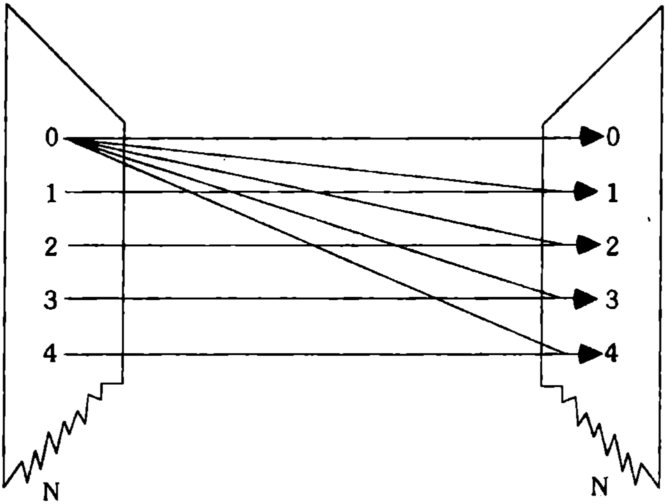
এবং গুণনের ক্ষেত্রে ঃ

$$2 * e = 2$$
$$7 * e = 7$$
$$9 * e = 9$$

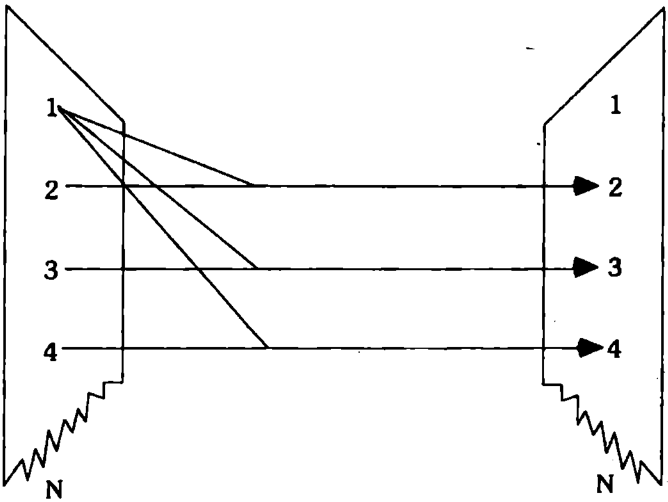
এবার কেউ কেউ প্রথমে বিভ্রান্ত হয়ে যেতে পারেন ঃ যোগ এবং গুণনের ছবি তো একই রকমের হলো। তাহলে বুঝব কিভাবে কোনটি যোগ কোনটি গুণন?

কিন্তু বিভ্রান্ত হওয়ার চেয়ে বরং আশ্বস্তই হওয়া উচিত। কারণ আমরা একটি সত্যকে আবিষ্কার করলাম ঃ এককের (e) সম্পর্কের বিচারে যোগ এবং গুণনের কাঠামোগত (structural) এবং পরিমাণগত (quantitative) চিত্র একই রকমের! অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে e কোনো সংখ্যাকে তার সাথেই সম্পৃক্ত করে। গণিত বোঝার জন্য এরূপ কাঠামোকে অধ্যয়ন করাই আসল কথা। আর কাঠামোকে বোঝা মানে তার অন্তর্গত উপাদানগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের চরিত্র উদ্ঘাটন করা। এই বিষয়টিকে বুঝানোর জন্য আমরা এতক্ষণ উপরোক্ত আলোচনার অবতারণা করলাম।

এবার আমরা নিচের চিত্রের সাহায্যে যোগাত্মক এবং গুণাত্মক এককের mapping বা চিত্রায়ন দেখব :



সেট N-এ $a + 0 = a$



সেট N-এ (0 বাদে) $1 \times a = a$

গাণিতিক সম্পর্কের কিছু প্রকারভেদ সংক্ষেপে আলোচনা করা যাক। যেহেতু কোনো বিষয়ের ব্যাপক প্রয়োগের সুযোগ যেখানে নেই সেখানে তার ব্যাপক আলোচনাও সম্ভব নয়, সেহেতু সম্পর্কের ধারণা ব্যাপকভাবে বিশ্লেষণ করা এখানে সম্ভব নয়। সেরূপ আলোচনা অন্য কোনো প্রাসঙ্গিক ক্ষেত্রে করা হবে। আমরা বর্তমান আলোচনায় কঠোর গাণিতিক প্রতীকী ভাষাও অনুসরণ করব না।

এতক্ষণ যেমন আমরা দেখেছি, কোনো সম্পর্কের সাথে তিনটি বিষয় জড়িত ঃ

একটি সেট A,

একটি সেট B, এবং

সেট A এর একটি উপাদানকে সেট B এর অনুরূপ কোনো উপাদানের নামে যুক্ত করার একটি নিয়ম বা Rule। এই Rule কে বলে Function।

ধরা যাক $x \in A$ এবং $y \in B$। অর্থাৎ x ও y যথাক্রমে সেট A ও সেট B এর উপাদান। এই (x, y) **ক্রমযুক্ত যুগলকে** (ordered pair, কারণ (x, y) আর (y, x) এক কথা নয়) কার্তেসীয় গুণজ (Cortesian Product) $A \times B$* এর বিভিন্ন প্রাসঙ্গিক (x, y) যুগলের সাথে সম্পৃক্ত করার জন্য বেঁধে দেয়া কোনো নিয়মকে বলে একটি মুক্তবাক্য বা open sentence। ফলে ঃ

P(x, y) = x **is made of** y

বুঝালে,

P(door, wood) = A door is made of wood.

P(spoon, metal) = A spoon is made of metal.

P(brick, mud) = Brick is made of mud.

ইত্যাদি বাক্যে প্রথম এবং দ্বিতীয় পদের মধ্যকার সম্পর্ক কী তা P(x, y) নামক propositional function বা প্রস্তাবনামূলক সম্পর্ক স্থাপনকারী বাক্য দ্বারা বুঝা যায়। এই সম্পর্ককে R দ্বারা এভাবে প্রতীকী কায়দায় প্রকাশ করা যায় ঃ

$$R = (A, B, P(x, y))$$

অর্থাৎ সেট A এর x এবং B এর y কে P(x, y) অনুসারে সংযুক্ত করার নিয়মটিকে বলে সংশ্লিষ্ট $x \in A$ এবং $y \in B$ এর মধ্যে সম্পর্ক।

---

* $x \in A$, $y \in B$ হলে $A \times B$ দ্বারা (x, y) এর সম্ভাব্য সকল যুগলকে বুঝায়, যেমন ঃ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots$ ।

P(x, y) সত্য বা মিথ্যা হতে পারে। যেমন, x = door এবং y = air ধ'রে নিয়ে যদি বলা হয় যে A door is made of air, তাহলে P(x, y) হলো false। কিন্তু যদি প্রস্তাবনাটি সত্য (true) হয়, তাহলে x, y এর কোনো বিশেষ মানের (যেমন x = a = a door, y = b = wood) জন্য লেখা যায় যে ঃ

aRb

যেখানে R = (A, B, P(x, y))

= is made of (এক্ষেত্রে)।

এই R কে পড়া হয় ঃ a **is related to** b। অর্থাৎ এখানে R হলো একটি চলক (variable) নিয়ম, যা একেক structure এর ক্ষেত্রে একেক রকমের।

আগে থেকেই সচেতন থাকতে হবে যে aRb আর bRa এক না-ও হতে পারে। R কে আবারও অন্য কোনো প্রতীক, যেমন '+', দ্বারা প্রতিস্থাপিত ক'রে দেখা যেতে পারে এরূপ ভুল হওয়ার সম্ভাবনা কেন থেকে যায়। তখন

aRb = a + b।

কিন্তু বাস্তব সংখ্যার অভিজ্ঞতা থেকে আমরা জানি যে ঃ

a + b = b + a

যেমন 3 + 2 = 2 + 3

বা 5 = 5

এই অভিজ্ঞতার জ্ঞান সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রে আমাদেরকে অজ্ঞ ক'রে রাখার জন্য যথেষ্ঠ। কারণ এখানে যেহেতু '+' দ্বারা বিভিন্ন ধরনের R কে বুঝানো হচ্ছে, সেহেতু কোনো কোনো ক্ষেত্রে aRb এর a এবং b commutative না-ও হতে পারে। স্পষ্ট উদাহরণ নিয়ে বলা যায়, R = is brother of হয়, তাহলে ঃ

aRb = bRa

হতে পারে। কারণ, উদাহরণস্বরূপ,

a is brother of b

মানেই হলো

b is brother of a

তবুও এখানে সমস্যা আছে ঃ b তো একজন মেয়েও হতে পারে। এবং ফলে সত্য বাক্যটি এরূপও হতে পারে ঃ

b is sister of a।

এই কথা মনে রাখলে বলতে হয় যে, সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রে ঃ

$$aRb \neq bRa$$

R = is son of হলে $aRb \neq bRa$, কারণ ঃ

a is **son** of b

থেকে একথা বুঝা যায় না যে—

b is **son** of a

বরং এখানে সত্য ঘটনা হলো ঃ

b is father of a

ফলে aRb এর (a, b) এর ক্রমে উল্টে দিলে R কেও বিপ্রতীপ বা **inverse** ক'রে দিতে হবে, এবং একেক ক্ষেত্রে R এর একেক inverse থাকতে পারে ঃ

$$aRb \to bR^{-1}b$$

এখানে R এর inverse হলো R^{-1}। যেমন,

R = son হলে

R^{-1} = father

a is son (R) of b

$\to$ b is father (R^{-1}) of a।

নিচে বিভিন্ন প্রকারের গাণিতিক সম্পর্কের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দেয়া হলো।

বি:দ্র: $a \in A$, $b \in B$ হলে P(a, b) সম্পর্কটির mapping R এর অন্তর্ভুক্ত হবে, যেখানে R হলো $A \times B$ এর একটি উপসেট।

বিপ্রতীপ সম্পর্ক (Inverse relation) —

A থেকে B তে প্রতিটি সম্পর্ক R এর জন্য B থেকে A তে বিপ্রতীপ সম্পর্ক R^{-1} রয়েছে যেখানে

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

উদাহরণ ঃ $A = \{2, 3, 5\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ হলে

$$R = \{(2, a), (3, b), (5, c)\}$$

হলো A থেকে B তে চিত্রিত একটি সম্পর্ক যার inverse হলো ঃ

$$R^{-1} = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5)\}$$

আত্মমুখী সম্পর্ক (Reflexive relation)

একটি সেট A এর কোনো উপাদানের সাথে ঐ উপাদানের সম্পর্ক, R, যদি $A \times A$ এর একটি উপসেট হয়, তাহলে R কে বলে আত্মমুখী সম্পর্ক। অর্থাৎ

$a \in A$ হলে

$(a, a) \in R$

অন্য কথায়, A এর প্রত্যেকটি উপাদান যদি তার নিজের সাথে সম্পৃক্ত হয়, তাহলে R কে আত্মমুখী বলা হয়।

উদাহরণ ঃ

1. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ হলে

$R = \{(1, 1), (3, 3), (5, 7), (7, 7), (7, 1)\}$

reflexive নয়। কারণ R-এ আর যা-ই থাক, (a, a) থাকতেই হবে। কিন্তু এখানে (3, 3) এবং (7, 7) থাকলেও (5, 5) জোড়টি R-এ নেই।

2. 'x is less than y' (বা $x<y$) মুক্তবাক্যটি দ্বারা R সম্পর্কটি বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে সংজ্ঞায়িত। R কি আত্মমুখী?

না। কারণ $1<2$, $5<7$ ইত্যাদি ক্রমজোড় দেখানো গেলেও R-এ $1<1$, $5<5$ দেখানো সম্ভব নয়, যেহেতু বাস্তব সংখ্যা a এর ক্ষেত্রে $a \nless a$।

3. A একাধিক সেটের একটি সেট হলে, এবং তাতে R 'x হলো y এর একটি উপসেট' সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করলে, R হলো আত্মমুখী, কারণ প্রতিটি সেটই নিজের উপসেট।

4. R দ্বারা 'x হলো y এর শিক্ষক' সম্পর্কটি বুঝালে, প্রতিটি মানুষের ক্ষেত্রে R হলো আত্মমুখী, কারণ এক দৃষ্টিকোণ থেকে প্রত্যেকেই নিজের শিক্ষক।

প্রতিসম সম্পর্ক (Symmetric relation)

নির্দিষ্ট সম্পর্কে অবস্থানকারী ক্রমজোড় (ordered pair) (a, b) R এর অন্তর্ভুক্ত হলে, এবং তাদের বিপরীত ক্রম, (b, a) ও R এর অন্তর্ভুক্ত হলে, R কে বলে প্রতিসম সম্পর্ক।

উদাহরণ ঃ

1. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$ এবং

$R = \{(1, a), (2, c), (3, b), (a, 1), (b, 3)\}$

হলে R প্রতিসম নয়, কারণ (2, c) এর বিপরীতে (c, 2) R এর অন্তর্ভুক্ত নয়।

2. R = 'বন্ধু' সম্পর্কটি প্রতিসম, কারণ a, b-এর বন্ধু হলে bও a-এর বন্ধু (যদি ব্যাকরণ অনুসারে 'বন্ধু' আর 'বান্ধবীর' মধ্যে পার্থক্য সৃষ্টি করা না হয়, এবং এক্ষেত্রে ইংরেজি ব্যাকরণ অনুসারে বন্ধুকে উভলিঙ্গবাচক শব্দ হিসাবে বিবেচনা করা হয়।)

3. R দ্বারা 'x দ্বারা y বিভাজ্য' সম্পর্কটি বুঝালে R প্রতিসম নয়, কারণ x দ্বারা y বিভাজ্য হলেও (যেমন 3 দ্বারা 6 বিভাজ্য) y দ্বারা x বিভাজ্য নয়। (6 দ্বারা 3 বিভাজ্য নয়)।

4. কোনো সম্পর্ক, R, এর বিপ্রতীপ সম্পর্ক, R^{-1}, যদি তার সমার্থক হয়, তাহলে R প্রতিসম।

5. 'সোনার হাতে সোনার কাঁকন / কে কার অলংকার?' বাক্যে 'অলংকার' শব্দটি দ্বারা একটি প্রতিসম সম্পর্ক (R) বুঝানো হচ্ছে। সৌন্দর্যতাত্ত্বিক বা কবির ভাষায়, সোনা যেমন হাতের অলংকার হতে পারে, তেমনি হাতও সোনার অলংকার হতে পারে। কবির কল্পনায় দুইয়ে মিলে মিশে একাকার হয়ে গেছে।

6. 'x, y এর শত্রু' কথাটি দ্বারা কি সব ক্ষেত্রে y, x এর শত্রু বুঝায়?

অপ্রতিসম সম্পর্ক (Anti-symmetric relation)

অপ্রতিসম সম্পর্কটি প্রতিসমের বিপরীত। প্রতিসমে যেখানে (a, b) ∈ R হলে (b, a) ∈ R হয়, এবং তবুও a = b হওয়ার প্রয়োজন হয় না, সেখানে অপ্রতিসম সম্পর্কে (a, b) ∈ R এবং (b, a) ∈ R হলে বুঝতে হবে যে a = b, এবং অন্য কোনো অবস্থায় (a, b) এবং (b, a) উভয়ে R এর অন্তর্ভুক্ত হতে পারে না। অর্থাৎ অপ্রতিসম সম্পর্কে (a, b) ∈ R এবং (b, a) ∈ R হলে বুঝতে হবে যে a = b।

উদাহরণ ঃ

1. স্বাভাবিক সংখ্যার ক্ষেত্রে 'x দ্বারা y বিভাজ্য' সম্পর্কটির দ্বারা যদি একথাও বুঝায় যে, 'y দ্বারা x বিভাজ্য', তাহলে বুঝতে হবে যে x = y। অন্য কোনো অবস্থাতে এরূপ দ্বিমুখী সম্পর্ক সম্ভব নয়। সুতরাং এরূপ সম্পর্ক অপ্রতিসম বা একমুখী।

2. A = {2, 3, 5, 9} এবং

R = {(2, 2), (2, 3), (5, 9), (3, 2), (9, 5)}

হলে R একমুখী বা অপ্রতিসম সম্পর্ক নয়, কারণ (2, 3) ∈ R এবং (3, 2) ∈ R; (5, 9) ∈ R এবং (9, 5) ∈ R।

3. A কিছু সেটের সেট হলে এর R দ্বারা 'x, y এর উপসেট' সম্পর্কটি বুঝালে, R হলো অপ্রতিসম সম্পর্ক, কারণ x, y এর উপসেট ($x \subset y$) এবং y, x এর উপসেট ($y \subset x$) এই উভয় শর্তের মিলনে এটি সত্য হয়ে ওঠে যে $x = y$।

অর্থাৎ

$$A \subset B$$

$$B \subset A$$

হলে $$A = B$$

4. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে a, b, c দ্বারা চিহ্নিত ক'রে R দ্বারা 'a, b এর সংলগ্ন বাহু' বুঝালে R অপ্রতিসম নয়, কারণ, ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, a, b এর সংলগ্ন হলে b-ও a-এর সংলগ্ন। (অবশ্য চতুর্ভুজ বা অন্যান্য বহুভুজের ক্ষেত্রে সম্পর্কটি অপ্রতিসম।)

সঞ্চালক সম্পর্ক (Transitive relation)

সেট A তে কোনো সম্পর্ক R কে সঞ্চালক সম্পর্ক বলা হয়, যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ হলে একথাও সত্য হয় যে $(a, c) \in R$। অর্থাৎ aRb এবং bRc হলে, aRc.

উদাহরণ ঃ 1. R দ্বারা 'সহোদর' (ভাই/বোন) বুঝালে ঃ

aRb এবং bRc হলে aRc

কারণ a এর সহোদর b হলে, এবং b এর সহোদর c হলে, a এর সহোদর c। এখানে R হলো সঞ্চালক।

2. উপরের উদাহরণে R = 'x হলো y এর বন্ধু' বুঝালে R সঞ্চালক নয়, কারণ a এর বন্ধু b এবং b এর বন্ধু c হতে পারে, তবে তার দ্বারা এটি বুঝায় না যে c কে a এর বন্ধু হতে হবে।

3. $R = 'x<y'$ হলে R হলো সঞ্চালক, কারণ $a<b$, $b<c$ হলে, $a<c$।

4. $A = \{a, b, c\}$ এবং

$$R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, a), (c, a)\}$$

হলে R সঞ্চালক নয়, কারণ তাতে $(c, a) \in R$, $(a, b) \in R$ কিন্তু $(c, b) \in R$ নয়।

অবশ্য R আংশিকভাবে transitive :

$(a, b) \in R, (b, c) \in R, (a, c) \in R$।

এবং $(b, c) \in R, (c, a) \in R, (b, a) \in R$।

5. R = 'x হলো y এর উৎপাদক'

বুঝালে R হলো সঞ্চালক, কারণ ঃ

$(a, b) \in R$ (a, b-এর উৎপাদক)

$(b, c) \in R$ (b, c-এর উৎপাদক)

সুতরাং $(a, c) \in R$ (a, c-এরও উৎপাদক)

যেমন ঃ $(4, 12) \in R, (12, 24) \in R, (4, 24) \in R$।

6. সামাজিক অপরাধ প্রবণতার প্রভাব সঞ্চালক কিন্তু অপরাধের বিচার-ব্যবস্থা সঞ্চালক নয়, যেমন বাবার জন্য ছেলে শাস্তি পায় না।

7. A যদি কতকগুলি সেটের একটি সেট হয়, এবং R দ্বারা যদি 'x হলো y এর উপসেট' বুঝায়, তাহলে R হলো সঞ্চালক, কারণ

$A \subset B$ এবং $B \subset C$ হলে $A \subset C$।

সমতুল সম্পর্ক (Equivalence relation)

কোনো সেট A তে কোনো সম্পর্ক R কে **সমতুল** বলা হবে যদি

1) R হয় আত্মমুখী, অর্থাৎ $a \in A$ হলে $(a, a) \in R$,

2) R হয় প্রতিসম বা উভমুখী, অর্থাৎ $(a, b) \in R$ হলে $(b, a) \in R$, এবং

3) R হয় সঞ্চালক, অর্থাৎ $(a, b) \in R$এবং $(b, c) \in R$ হলে, $(a, c) \in R$।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক A হলো ইউক্লিডীয় তলে (Eucledean plane) এক সেট ত্রিভুজ। এই সেটের মধ্যে R দ্বারা 'x হলো y এর অনুরূপ (similar)' বুঝালে R হলো একটি সমতুল সম্পর্ক, কারণ R একই সাথে আত্মমুখী, দ্বিমুখী, এবং সঞ্চালক। (অর্থাৎ প্রতিটি ত্রিভুজ নিজের অনুরূপ, ত্রিভুজ a, b এর অনুরূপ হলে b-ও a-এর অনুরূপ, এবং a, b-এর অনুরূপ এবং b, c-এর অনুরূপ হলে a, c-এরও অনুরূপ।)

গণিতে সমতুল সম্পর্কের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ হলো '=' দ্বারা প্রকাশিত সম্পর্ক, কারণ $a = a$; $a = b$ হলে $b = a$; এবং $a = b, b = c$ হলে $a = c$। কোনো

সেটের উপাদানগুলির মধ্যে এই সম্পর্ক থাকলে উক্ত উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণের সমাধান থাকার সম্ভাবনা থাকে। অন্যথায় কোনো সমীকরণের সমাধানের জন্য কোনো সাধারণ সূত্রও থাকতে পারত না। সম্পর্কের এই জ্ঞান পরে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ কাজে লাগবে।

ফাংশান (Function)

একটি ফাংশান হলো দুটির সেটের উপাদানের মধ্যে একটি বিশেষ ধরনের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠার নিয়ম। সুতরাং ফাংশানের স্পষ্ট ধারণা ছাড়া গণিত শেখাই সম্ভব নয়।

একটি পরিচিত ধাঁচের উদাহরণ নেয়া যাক—ধারা। ধারার সাথে সবাই কম-বেশি পরিচিত। এমনকি বিভিন্ন পর্যায়ের মনস্তাত্ত্বিক-বুদ্ধিবৃত্তিক পরীক্ষাতেও ধারা-বিষয়ক প্রশ্ন থাকে। নিচের ধারাটি বিবেচনা করা যাক ঃ

1, 3, 5, 7, 9, . . . অসীম

এই ধারাটিও একটি ফাংশান। কারণ ধারার সেটটিকে পাওয়া গেছে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N থেকে বিশেষ নিয়মে উপাদান সংগ্রহ ক'রে।

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$

এখান থেকে '$x = x + 2$' নিয়মটি প্রয়োগ ক'রে তা অনুসারে সংখ্যা বেছে বেছে নেয়া হয়েছে ঃ

প্রথম $x = 1$ হলে

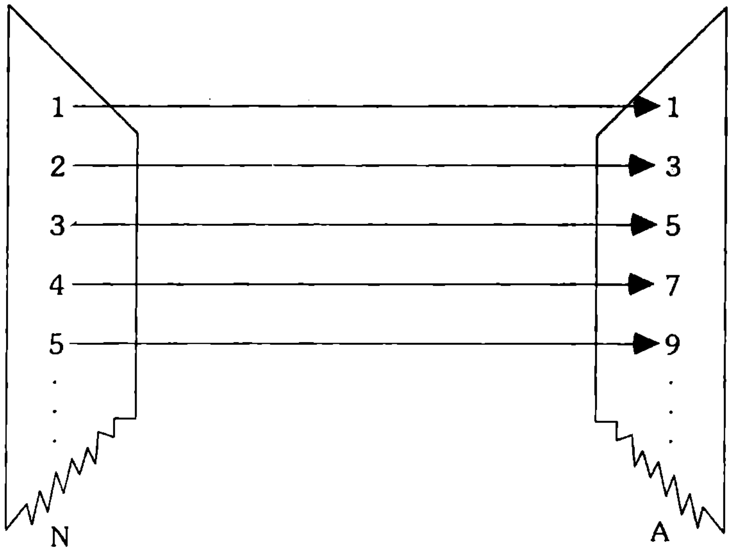
২য় $x = x + 2 = 3$

৩য় $x = x + 2 = 3 + 2 = 5$

৪র্থ $x = x + 2 = 5 + 2 = 7$

৫ম $x = x + 2 = 7 + 2 = 9$, ইত্যাদি।

বিপরীতক্রমে বিবেচনা ক'রে বলা যায় যে, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ এবং $A = 1, 3, 5, 7, \ldots$ হলে ফাংশান f হলো N থেকে A তে এমন একটি সম্পর্ক যার ফলে N এর প্রতিটি উপাদানের জন্য A-তে উক্ত সম্পর্ক অনুযায়ী একটি উপাদান রয়েছে ঃ



এই f কে এভাবে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$f : x = x + 2$$

বা $$f : A \to B$$

অর্থাৎ f A-কে B এর সাথে সম্পৃক্ত করে। সম্পৃক্ত করতে গিয়ে f N-এর প্রতিটি উপাদানের মানকে 2 ক'রে বাড়িয়ে দেয়।

কিন্তু একথা অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে, যেহেতু সেট $A \times B$ এর প্রতিটি উপসেট হলো একটি relation, সেহেতু সব relation ফাংশান নয়।

আগে যেমন বলা হয়েছে,

$$f : A \to B$$

হলো একটি ফাংশান যাকে পড়া হয় 'f is a function of A into B' বা 'f হলো একটি ফাংশান যা সেট A কে B এর সাথে সম্পৃত্ত করে'। এখানে সেট A কে বলে f এর ডোমেইন (domain) এবং B কে বলে কো-ডোমেইন (co-domain)। এখানে প্রতিটি $a \in A$ এর জন্য B তে একটি $b \in B$ থাকবে, যাকে f(a) বা 'f of a' হিসেবে পড়া হয়; অর্থাৎ

$$b = f(a) | b \in B, a \in A$$

এই b বা f(a) কে বলে a এর **ইমেজ** (image)।

উদাহরণ ঃ1. $f : A \rightarrow B$ তে f দ্বারা যদি গণিতের যাবতীয় উদ্ভাবকের সাথে সংশ্লিষ্ট তত্ত্ব এবং পদ্ধতিকে সংশ্লিষ্ট করা হয়, তাহলে সেট A তে থাকবে যাবতীয় উদ্ভাবকের নাম এবং সেট B তে থাকবে উদ্ভাবিত তত্ত্ব এবং পদ্ধতির নাম। এখানে co-domain এবং domain উভয়ের বিন্দুগুলির মধ্যে এক-বহু বা বহু-এক সম্পর্কও থাকবে, কারণ এমনও অনেক তত্ত্ব আছে যা একাধিক গণিতবিদ একে অপরের সাহায্য না নিয়েই উদ্ভাবন করেছেন, আবার একজন গণিতবিদও একাধিক তত্ত্ব এবং পদ্ধতি উদ্ভাবন / আবিষ্কার করেছেন।

2. $f(x) = x + 3$

এখানে f এর domain 0, 1, 2, 3, 4, . . . ইত্যাদি হলে co-domain হবে 3, 4, 5, 6, . . . ইত্যাদি। উদাহরণ স্বরূপ, $x = 5$ এর image হবে

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 + 3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

f এর domain এবং co-domain উভয়ই বাস্তব সংখ্যা বলে আমরা বলতে পারি যে ঃ

$$f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$$

যেখানে R দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ভূবনকে বুঝানো হচ্ছে।

3. $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{2, 7, 13, 19\}$

হলে, এবং $f : A \rightarrow B$ এর নিয়মটি এরূপ হলে—

$f(a) = 2$

$f(b) = 7$

$f(c) = 13$

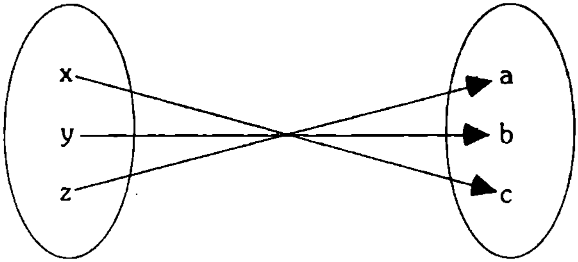
$f(d) = 19$

f একটি ফাংশান। এরূপ ফাংশানের domain এবং co-domain উভয়ই **ধ্রুব**, অর্থাৎ A এবং B এর উপাদানের বাইরের যে-কোনো উপাদান তার আওতার বাইরে।

4. $A = (x, y, z)$

$B = (a, b, c)$

এর ক্ষেত্রে $f : A \to B$ নিচের চিত্রের অনুসারে হলে ঃ



f একটি ফাংশান। ফাংশান চিত্রের মাধ্যমেও বর্ণিত হতে পারে।

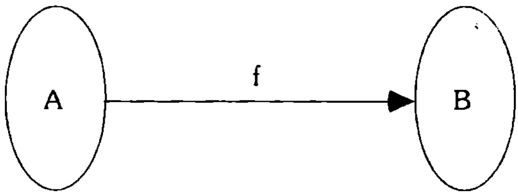
A এবং B সংখ্যার বা যে-কোনো জিনিসের সেট হলে, A থেকে B-তে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠাকারী ফাংশানকে বলে **অনু চিত্রন** বা **mapping,** এবং

$$f : A \to B$$

কে পড়া হয়, 'f A কে B-র মধ্যে চিত্রিত করে' বা 'f maps A into B'। প্রতীকটিকে এভাবেও লেখা যায় ঃ

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B$$

এবং চিত্রের সাহায্যে ঃ



এরূপ ক্ষেত্রে f কে A এর **কারক** (operator) বা **রূপান্তর** বলে (an operator or transformation on A)।

নিচে ফাংশান সম্পর্কিত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অনুভাবের (concept) পরিচয় দেয়া হলো।

সমরূপ ফাংশান (Equal function)

দুটি ফাংশান, f এবং g, যদি এমন হয় যে তাদের ডোমেইন একই হয় এবং সব $a \in D$ এর জন্য $f(a) = g(a)$ হয়, তাহলে বলা হয় যে f এবং g হলো সমরূপ বা সমান, অর্থাৎ—

$$f = g$$

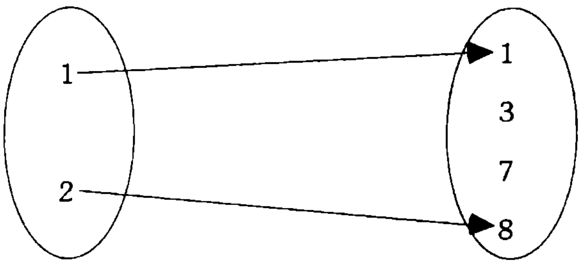
উদাহরণ ঃ

1. $f(x) = x^2$, যেখানে x একটি বাস্তব সংখ্যা, এবং

   $g(x) = x^2$, যেখানে x একটি জটিল সংখ্যা।

এক্ষেত্রে $f \neq g$, কারণ তাদের ডোমেইন ভিন্ন।

2. f দ্বারা নিচের চিত্রকে ঃ



এবং g দ্বারা $g(x) = x^3$ [যেখানে x = 1, 2) বুঝালে f = g, কারণ তাদের ডোমেন একই এবং f(x) এবং g(x) এর ইমেজ একই।

3. $f : R^{\#} \to R^{\#}$ এবং $g : R^{\#} \to R^{\#}$। $f(x) = x^2$ এবং $g(y) = y^2$ হলে f = g, কারণ এক্ষেত্রে মূলত x এর বদলেই y ব্যবহৃত হয়েছে।

ফাংশানের পাল্লা (Range of a function)

$f : A \to B$ এর ক্ষেত্রে A এর প্রতিটি উপাদানের জন্য B তে একটি উপাদান থাকলে উক্ত mapping দ্বারা B এর সব উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা না-ও যেতে পারে। f(x) এর দ্বারা B এর যতগুলি উপাদান নিঃশেষিত হয় কেবল সেগুলিকেই বলে f এর

পাল্লা বা range। $f : A \to B$ এর এরূপ পাল্লাকে $f(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। ফলে $f(A) \subset B$।

উদাহরণ ঃ

1. $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{b, c, d\}$

$f(a) = c$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = (d)$ হলে f এর পাল্লা হলো (c, d)।

2. $f : R^{\#} \to R^{\#}$

$f(x) = x^2$

হলে f এর ডোমেইন সম্ভাব্য সব বাস্তব সংখ্যা হলেও f এর পাল্লা হবে বাস্তব সংখ্যাভূবনের কেবল যোগবোধক সেটটি, কারণ x এর মান যা-ই হোক না কেন, f(x) একটি বর্গ সংখ্যা ব'লে তার মান হবে যোগবোধক। কিন্তু $f(x) = x^3$ হলে উক্ত পাল্লা বিয়োগবোধক দিকেও বিস্তৃত হতো।

3. $f : \text{Man} \longrightarrow \text{Woman}$

হলে, এবং f দ্বারা বিবাহ বুঝালে, এবং '18 বছরের নিচে কোনো মেয়ের বিয়ে হওয়া অবৈধ' কথাটি সত্য হলে, বৈধ f এর পাল্লা হবে সেই সব women যাদের বয়স 18 বছর বা তারও বেশি।

এক-এক ফাংশন (One-one function)

ফাংশানের এই ধারণাটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। $f : A \to B$ এর ক্ষেত্রে f যদি এমন হয় যে তা A এর একেকটি উপাদানকে B এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট করে, এবং A এর কোনো দুটি উপাদানের ইমেজ B তে একই উপাদান না হয়, তাহলে f কে এক-এক ফাংশান বলা হয়।

উদাহরণ :

1. Monogamy বা এক-বিবাহ ব্যবস্থায় f = বিবাহ বুঝাতে Man-Woman ফাংশান হলো একটি one-one function, কারণ তাতে কোনো দুই (বা ততোধিক) জন পুরুষের সাথে একই নারীর বিয়ে হয় না। কিন্তু মুসলিম বা অন্যান্য কিছু প্রথা অনুযায়ী Man-Woman সেটদ্বয়ের ফাংশান হলো one-many, যেখানে একজন পুরুষ একই সময়ে একাধিক স্ত্রীর স্বামী হতে পারে। আবার ভারতের আদি প্রথা এবং বর্তমানের কিছু উপজাতির প্রথা (এবং তিব্বতের প্রচলিত বিবাহপ্রথা) অনুসারে Man-Woman ফাংশান হলো many-one, অর্থাৎ সেখানে একটি মেয়ে একই সাথে একাধিক স্বামী রাখতে পারে (দ্রৌপদীর প্রাচীন উদাহরণ উল্লেখ্য)।

2. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ এবং

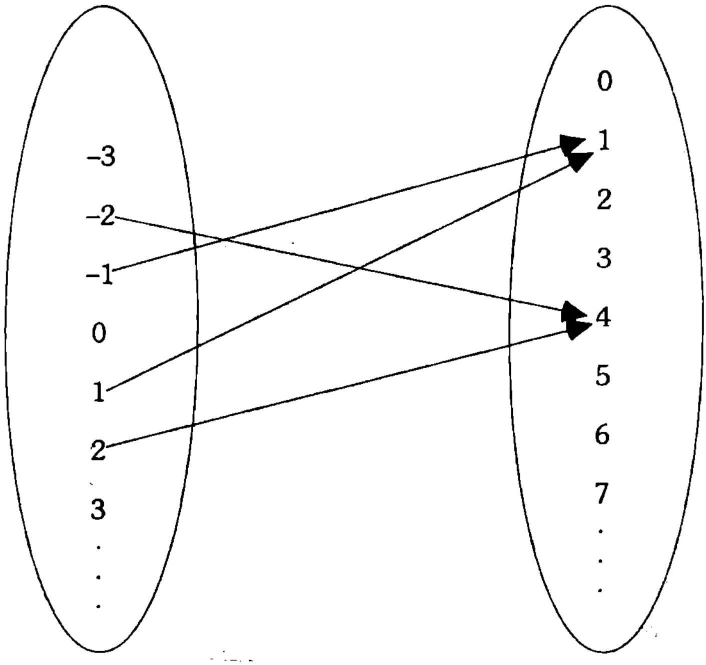
$f(x) = x^2$ হলে

f একটি এক-এক ফাংশান নয়, কারণ x এর প্রতি দুটি মানের জন্য f(x) এর একটি ক'রে মান পাওয়া যাবে, যেমন ঃ

$(f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(2) = (2)^2 = 4$

বিষয়টিকে নিচের মাধ্যমে দেখানো হলো ঃ



3. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$

$f(x) = x^3$

এক্ষেত্রে f একটি এক-এক ফাংশান। যেমন ঃ

$f(1) = 1^3 = 1$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$ ইত্যাদি।

4. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$

$f(x) = x^4$

এই ফাংশানটিও এক-এক ফাংশান নয়। প্রকৃতপক্ষে এরূপ ক্ষেত্রে x এর সূচক কোনো জোড় সংখ্যা হলে ফাংশানটি এক-এক হবে না।

ব্যাপ্ত ফাংশান (Onto function)

ফাংশানের এই ধারণাটিও খুব গুরুত্বপূর্ণ। এর সাথে অন্যান্য জাতীয় ফাংশানের পার্থক্য স্পষ্টভাবে বুঝতে না পারলে তালগোল পাকিয়ে ফেলার সম্ভাবনা রয়ে যাবে। $f : A \rightarrow B$ হলে, আমরা জানি, $f(A) \subset B$। এক্ষেত্রে $f(A) = B$ হলে f কে বলে একটি ব্যাপ্ত বা onto ফাংশান। অন্য কথায়, যদি B এর প্রতিটি উপাদানের সাথে A এর এক বা একাধিক উপাদান সংশ্লিষ্ট থাকে, অর্থাৎ যদি B এর ***প্রতিটি*** উপাদান A এর ***কমপক্ষে একটি*** উপাদানের ইমেজ হয়, তাহলে f B-কে পুরোপুরি ব্যাপ্ত ক'রে ফ্যালে। উদাহরণ ছাড়া ধারণাটি অনেক সময়ে স্পষ্টভাবে বুঝা যায় না।

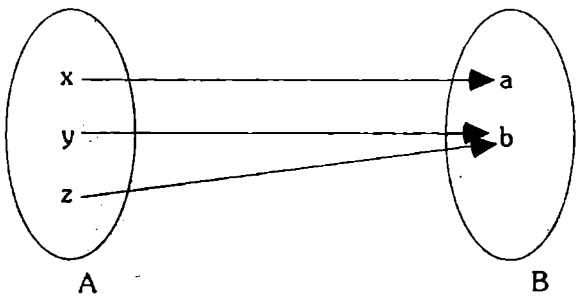
উদাহরণ ঃ

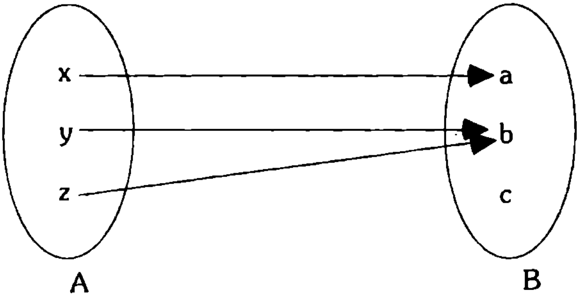
1. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$

$f(x) = x^2$

হলে, f একটি ব্যাপ্ত ফাংশান নয়, কারণ A এর ঋণাত্মক সংখ্যাগুলি B তে নেই।

2. নিচের চিত্র দুটির মাধ্যমে প্রদর্শিত ফাংশান দুটি বিবেচনা করুন।





প্রথম ফাংশানটি ব্যাপ্ত (কিন্তু এক-এক নয়), কারণ এখানে A এর প্রতিটি উপাদানের জন্য B তে উপাদান আছে এবং B এর কোনো উপাদান অসম্পৃক্ত নেই, তার প্রতিটি উপাদান A এর এক বা একাধিক উপাদানের ইমেজ। কিন্তু দ্বিতীয় ফাংশানটি ব্যাপ্ত নয়, কারণ তাতে B এর c উপাদানটি A এর কোনো উপাদানের ইমেজ নয়। এই ফাংশানটিও এক-এক নয়।

অভেদ ফাংশান (Identity function)

$f : A \to A$, অর্থাৎ $f(x) = x$ ফাংশানকে বলে অভেদ ফাংশান, কারণ এখানে A এর ওপর f আরোপ ক'রে আবারও A পাওয়া যাচ্ছে। এরূপ ফাংশানকে 1 বা 1_A বলে। যেমন ঃ

$f(x) = x$

$x = 1$ হলে $f(x) = 1$

$x = 2$ হলে $f(x) = 2$

$x = 3$ হলে $f(x) = 3$

ইত্যাদি।

ধ্রুব ফাংশান (Constant function)

$$f : A \to B$$

এর ক্ষেত্রে f দ্বারা যদি A এর সব উপাদানকে B এর একটিমাত্র উপাদানকে সম্পৃক্ত করা হয়, তাহলে f কে বলে ধ্রুব ফাংশান। অর্থাৎ এক্ষেত্রে f এর পাল্লা হলো একটিমাত্র উপাদান।

উদাহরণ ঃ

$$f(x) = 3$$

এই ফাংশানটি একটি ধ্রুব ফাংশান, কারণ ঃ

$x = 0$ হলে $f(x) = 3$

$x = 1$ হলে $f(x) = 3$

$x = 2$ হলে $f(x) = 3$

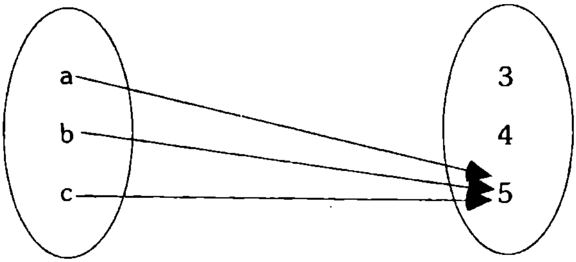
ইত্যাদি।

2. $A = \{a, b, c\}$

$A = \{3, 4, 5\}$

$f(A) = 5$

হলে, অর্থাৎ ফাংশানটি নিচের চিত্রের মতো হলে ঃ



f একটি ধ্রুব ফাংশান। এখানে ঃ

$f(a) = 5$

$f(b) = 5$

$f(c) = 5$

গুণক ফাংশান (Product function)

$f : A \rightarrow B$

$g : B \rightarrow C$

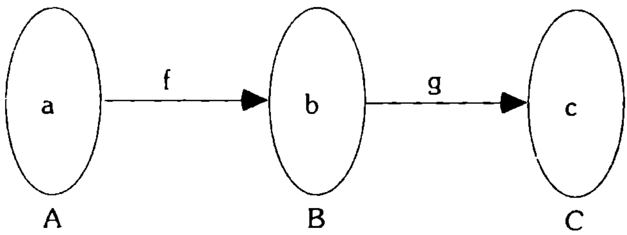
হলে, $a \in A$ উপাদানটির ইমেজ, $f(a)$ থাকবে B তে, যা হলো g এর ডোমেইন। অর্থাৎ f এর ইমেজ এখানে g এর ডোমেইন। ধরা যাক $f(a)$ দ্বারা B এর b কে বুঝানো হচ্ছে

(নিচের চিত্র দেখুন)। তাহলে g এর অধীনে b এর ইমেজ, অর্থাৎ g(b), থাকবে C তে, যার নাম, ধরা যাক, c। এর অর্থ হলো ঃ

$$g(b) = c$$

বা $$g(f(a)) = c$$

বা $$g(f(a)) \in C$$



এভাবে আমরা পেলাম A থেকে C তে একটি ফাংশান। ধরা যাক এই ফাংশান বা সম্পর্কটি h। তাহলে

$$h : A \to C$$

কিন্তু এখানে $h = g\ (f(a))$, কারণ—

$$g(f(a)) : A \to C$$

সুতরাং A থেকে C তে এই যে ফাংশানটি আমরা পেলাম (অর্থাৎ h) তা দুটি ফাংশানের গুণফল (g(f(a)))। একে বলে গুণক ফাংশান। দুটি (বা ততোধিক) ফাংশানের গুণফলকে এভাবে চিহ্নিত করা হয় ঃ

$$(g \circ f) \text{ বা } (gf)$$

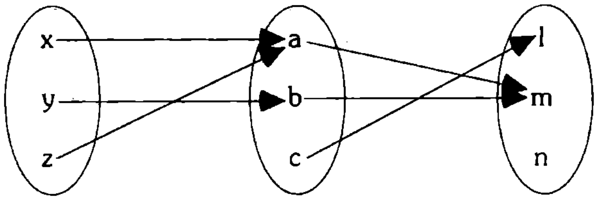
তাহলে এখন আমরা বলতে পারি যে :

$$f : A \to B$$

$$g : B \to C$$

হলে $$(g \circ f) : A \to C$$

অন্য কথায়, f যদি A কে B এর সাথে এবং g যদি B কে C এর সাথে সম্পৃক্ত করে, তাহলে $(g \circ f)$ ফাংশানটি A কে সরাসরি C এর সাথে সম্পৃক্ত করবে।



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

উপরের চিত্রে ঃ

$f(x) = a$; $g(a) = m$

ফলে $(g \circ f)(x) = m$

এবং $f(y) = b$; $g(b) = m$

ফলে $(g \circ f)(y) = m$

অর্থাৎ x এবং y উভয় বিন্দু থেকে m-এ পৌঁছানো যাচ্ছে।

এবং $f(z) = a$; $g(a) = m$

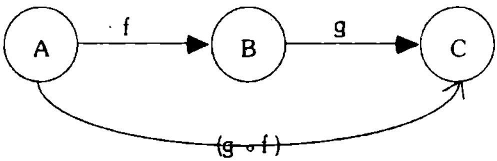
ফলে $(g \circ f)(z) = m$

অর্থাৎ g এবং f এর মিলিত ক্রিয়ার মাধ্যমে A থেকে C তে m ছাড়া অন্য কোনো বিন্দুতে পৌঁছানো সম্ভব নয়। এবং যদিও $g(c) = l$, তবুও এই l উপাদানটি f এর আওতার বাইরে।

তিনটি সুড়ঙ্গ পথের কথা ভাবুন, যারা দুইটি ভবন B এবং C এর সাথে যুক্ত, কিংবা তিনটি 'ব্যক্তিগত' টেলিফোন লাইনের কথা ভাবুন যেগুলি, উপরের চিত্রের মতো, A, B, C ভবনের বিভিন্ন ব্যক্তির সাথে যোগাযোগ করতে সাহায্য করে। আপনি A ভবন থেকে সরাসরি C ভবনে কেবল একজন ব্যক্তির সাথে যোগাযোগ করতে পারেন—m। B ভবনের a, b কে এ ব্যাপারে তিরস্কার ক'রেও কোনো লাভ নেই: তারা বলবে যে C ভবনের কেবল m এর সাথেই তাদের যোগাযোগ করার দরকার হয়। সুতরাং আপনি যদি C ভবনের l এর সাথে যোগাযোগ করতে চান, তাহলে আপনাকে কমপক্ষে B ভবন থেকে ফোন করতে হবে। আবার C এবং n এর সাথে যোগাযোগ করতে হলে আপনাকে যার যার নিজস্ব ভবনে পৌঁছে গিয়ে তাদের সাথে ব্যক্তিগতভাবে সাক্ষাত করতে

হবে। তবে C ভবন থেকে A ভবনের সবার সাথেই আপনি যোগাযোগ করতে পারবেন—m এর মাধ্যমে। এখানেই চলে আসে ফাংশানের বিপ্রতীপের (inverse) ধারণা, যা আমরা একটু পরে দেখব।

তাহলে উপরে বর্ণিত f এবং g এর সম্পর্ক জালটিকে নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায় ঃ



এবার, প্রসঙ্গক্রমে, আমরা গুণনের সেই commutative বিধিটির কথা মনে করতে পারি। আমরা জানি যে, $a \times b = b \times a$, যেমন, $5 \times 6 = 6 \times 5 = 30$। কিন্তু ফাংশানের ক্ষেত্রে (এবং নির্ণায়ক অধ্যায়ে বর্ণিত matrix এর ক্ষেত্রে) একথা সত্য নয়। এ কারণে ঃ

$$g \circ f \neq f \circ g$$

এর কারণ হলো এই যে ফাংশানের সাথে দিক বা direction এর ধারণা অঙ্গাঙ্গিভাবে জড়িত, যেমন জড়িত ভেক্টর গণিতের সাথে। ফাংশানের এই একমুখী চরিত্রের ব্যাপারটি নিচের উদাহরণটি দ্বারাও যাচাই করা যাবে।

$f(x) = x^2$

এবং $g(x) = x + 5$ হলে

$$\begin{aligned}(f \circ g)(3) &= f(g(3)) \\ &= f(3+5) \\ &= f(8) \\ &= 8^2 \\ &= 64\end{aligned}$$

আবার $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

$$= g(3^2)$$

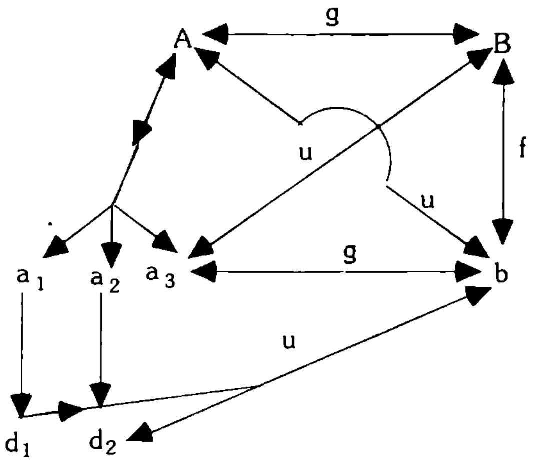
$= g\ (9)$

$= (9 + 5)$

$= 14$

দেখা যাচ্ছে যে ঃ $(f \circ g) \neq (g \circ f)$

একটি 'অগাণিতিক' উদাহরণ নেয়া যাক।



উপরের চিত্রে A এবং B দুই ভাই; a_1, a_2, a_3 হলো A এর তিন ছেলে; d_1 এবং d_2 যথাক্রমে a_1 এবং a_2 এর ছেলে; b হলো B এর ছেলে। f দ্বারা father of, g দ্বারা brother of (আপন ভাই না হলেও) এবং u দ্বারা uncle of বুঝানো হয়েছে। তাহলে ঃ

$f\ (a_1) = A$

$f\ (a_2) = A$

$f\ (a_3) = A$

এই ক্ষেত্রটুকুতে f হলো একটি ধ্রুব ফাংশান।

আবার $f(d_1) = a_1$

$f\ (d_2) = a_2$

কিন্তু father of father of $d_1 = A$

father of father of $d_2 = A$

অর্থাৎ $f(f(d_1)) = (f \circ f)(d_1) = A$

$f(f(d_2)) = (f \circ f)(d_2) = A$

আবার : $f(b) = B$

$g(A) = B$

$g(B) = A$ [কারণ g সম্পর্কটি প্রতিসম]

$u(a_1) = B$

$u(a_2) = B$

$u(a_3) = B$

$u(b) = A$

এখানে u = uncle of ।

এভাবে : $u(d_1) = b$

$u(d_2) = b$

একইভাবে :

$g(a_1) = b$

$g(a_2) = b$

$g(a_3) = b$ [g = brother of]

তাহলে পাওয়া যাচ্ছে :

father of brother of $a_1/a_2/a_3 = ?$

বা father of (brother of a_i) = ? [$i = 1, 2, 3$]

বা father of (b) = B

অর্থাৎ : $f(g(a_i)) = B$

বা $(f \circ g)(a_i) = B$

এভাবে বাকি সম্পর্কগুলি যাচাই ক'রে দেখুন এবং নিচের ফাংশানগুলিতে সংশ্লিষ্ট ইমেজ হিসাব ক'রে বের করুন :

$(f \circ u)(d_1/d_2) = ?$

$(u \circ u)(d_1) = ?$

$(f \circ f)(d_1) \stackrel{?}{=} (u \circ u)(d_1)$ [অর্থাৎ এই দুটি সমান কিনা]

$(g \circ u \circ u)\, d_2) = ?$

$(g \circ u \circ g)(a_3) = ?$

শেষোক্ত প্রশ্নটি প'ড়ে দেয়া হলো ঃ

$$\text{brother of (uncle of (brother of } a_3)) = ?$$

এতক্ষণে পাঠক হয়তো একটি জিনিস লক্ষ্য ক'রে থাকবেন। তা হলো, ফাংশানের গুণফল **associative** বা সহযোগী। সংখ্যার ক্ষেত্রে এই নিয়মটি এরূপ ঃ

$$(m \times n) \times p = m \times (n \times p)$$
$$= m \times n \times p$$

যা অধ্যায়—১-এ আমরা দেখেছিলাম। ফাংশানের ক্ষেত্রেও এই বিধি সত্য। ফলে ঃ

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

অর্থাৎ একাধিক ফাংশানের গুণফল বের করার জন্য প্রথমে যে-কোনো দুটিকে গুণন করলে চলে। ফলে সেক্ষেত্রে বন্ধনীর প্রয়োজন হয় না ঃ

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$
$$= f \circ g \circ h$$

কিন্তু একটু আগের কথাটি আবারও মনে রাখতে হবে ঃ

$$f \circ g \neq g \circ h$$

ফাংশানের বিপ্রতীপ (Inverse of a function)

ফাংশানের মাধ্যমে আমরা একটি সেট A থেকে B তে পৌঁছাই ঃ

$$f : A \to B$$

যেখানে $a \in A$ এর ইমেজ হলো $b \in B$। অন্য কথায়, $a \in A$ থেকে $b \in B$ কে পাবার প্রক্রিয়াকে বলে ফাংশান। ফাংশানের বিপ্রতীপ হলো ঠিক এর উল্টো প্রক্রিয়া, অর্থাৎ $b \in B$ থেকে উল্টোক্রমে $a \in A$ তে পৌঁছানোর প্রক্রিয়া। f এর এই বিপ্রতীপকে $\mathbf{f^{-1}}$ বা **f-inverse** হিসেবে পড়া হয়।

তাহলে আমরা পাচ্ছি যে ঃ

$f(a) = b$ হলে

$$f^{-1}(b) = a$$

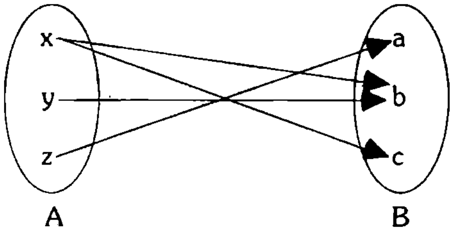
প্রতীকের মাধ্যমে ঃ

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

এরূপ ক্ষেত্রে $f^{-1}(b)$ হলো সর্বদা A এর একটি উপসেট।

উদাহরণ ঃ

1.



প্রদর্শিত চিত্রে ঃ $f : A \to B$

$(x, y, z) \in A$, $(a, b, c) \in B$

$f(x) = \{b, c\}$

$f^{-1}(b) = \{x, y\}$

$f(y) = \{b\}$

$f^{-1}(b) = \{x, y\}$ [আগেই দেখেছি]

$f(z) = \{a\}$

$f^{-1}(a) = \{z\}$

2. f = father of হলে f^{-1} = son of :

$f(a) = b$ হলে

$f^{-1}(b) = a$

g = brother of হলে $g^{-1} = g$ = brother of

$g(a) = b$ হলে

$g^{-1}(b) = a$

বা $g(b) = a$

u = uncle of হলে u^{-1} = nephew/niece of

$u(a) = b$ হলে

$u^{-1}(b) = a$

এভাবে বিবেচনা ক'রে পূর্ববর্ণিত বংশলতিকা সম্পর্কিত সমস্যাটিকে ফাংশানের মাধ্যমে বর্ণনা করার চেষ্টা করুন।

3. $f : R\# \rightarrow R\#$

$f(x) = x^2$

হলে $f^{-1}(x^2) = x$

যেমন ঃ $f(2) = 4$

$f(-2) = 4$

সুতরাং $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$

এভাবে $f^{-1}(9) = \{3, -3\}$

$f^{-1}(2) = \{1.414, -1.414\}$ [প্রায়]

আসলে এখানে f^{-1} দ্বারা '$\sqrt{\ }$' কে বুঝানো হচ্ছে। f এর $f : R\# \rightarrow R\#$ সংজ্ঞাকে মেনে নেয়া হলে :

$$f^{-1}(-2) = \phi$$

অন্য কথায় ঋণাত্মক কোনো সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব সংখ্যাভূবন $R^{\#}$-এ নেই। কিন্তু $f : C^{\#} \rightarrow C^{\#}$, বা f কে জটিল সংখ্যা ভূবনের মধ্যে সংজ্ঞায়িত করা হলে, এরূপ ঋণাত্মক সংখ্যার ক্ষেত্রেও সমাধান থাকত। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে :

$f(x) = x^2 : f : C^{\#} \rightarrow C^{\#}$

$f^{-1}(-2) = \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

অর্থাৎ, $r(-2) = \sqrt{2}i$ এবং $-\sqrt{2}i$।

বিপ্রতীপ ফাংশান (Inverse function)

$f : A \rightarrow B$ হলে,

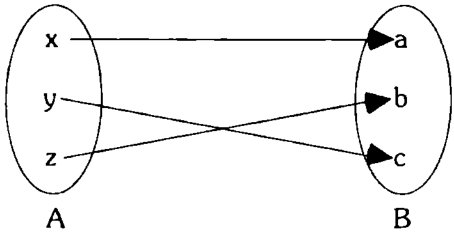
$a \in A$ এবং $b \in B$ এর জন্য

$f^{-1}(b) = a$

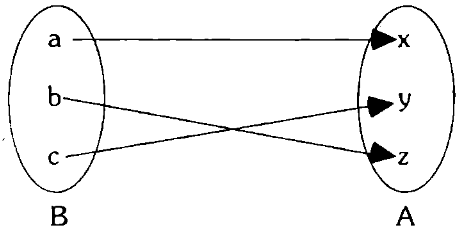
যা আমরা আগেই দেখেছি। কিন্তু আমরা বিভিন্ন উদাহরণে এও দেখেছি যে $b \in B$ এর বিপরীতে একাধিক $a \in A$ পাওয়া যেতে পারে, এবং বিপরীতক্রমেও। কিন্তু কোনো ফাংশান যদি **এক-এক এবং ব্যাপ্ত (one-one onto)** হয় (ধারণা দুটির পার্থক্য সম্বন্ধে আরেকবার নিশ্চিত হয়ে নিন), তাহলে প্রতিটি $a \in A$ এবং জন্য মাত্র একটি $b \in B$ (বা প্রতিটি $b \in B$ এর জন্য একটি $b \in A$) পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $f^{-1}(b) = a$ পাওয়া যাবে যেখানে a এর মান A তে এক এবং অনন্য। এরূপ ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি যে $f : A \rightarrow B$ এর জন্য $f^{-1} : B \rightarrow A$ স্পষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত। এক্ষেত্রে f^{-1} কে বলে f এর বিপ্রতীপ ফাংশান বা inverse ফাংশান। **ফাংশানের এই ধারণাটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।**

উদাহরণ :

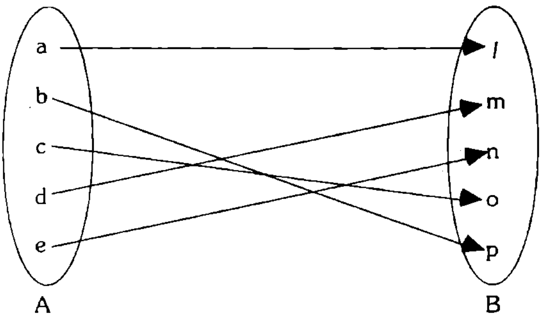
1. $f : A \to B$, যা নিচের চিত্রের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত।



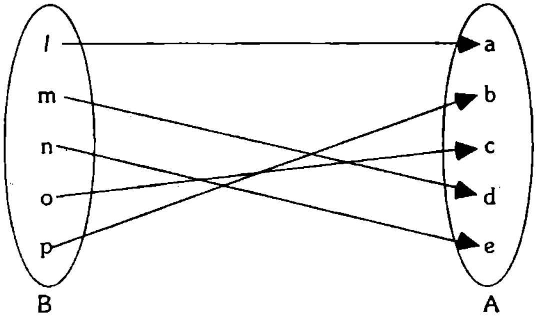
এখানে f হলো এক-এক এবং ব্যাপ্ত (one-one onto)। ফলে f^{-1} বা বিপ্রতীপ ফাংশান আছে। এক্ষেত্রে $f^{-1} : B \to A$ কে নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায় :



2. ঠিক একই ধরনের আরেকটি উদাহরণ নেয়া যাক। f এবং f^{-1} এর ক্ষেত্রে mapping এর কাঠামোর অনুরূপতা লক্ষ্য করার ক্ষেত্রে পাঠককে সাহায্য করার জন্য এটি দেখানো হলো। f এবং f^{-1} এর অনু চিত্রনে ব্যবহৃত তীরচিহ্নগুলির কাঠামো লক্ষ্য করুন।



$f : A \to B$



$f^{-1} : B \rightarrow A$

কোনো বস্তুর প্রতিচ্ছবি আয়নার মধ্যে কেমন হয়? f এবং f^{-1} এর মধ্যে কি এরূপ বস্তু-প্রতিচ্ছবির সম্পর্ক আছে?

3. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$

$f(x) = x^2$

এ ফাংশানটি one-one এবং onto নয়। ফলে f^{-1} এর কোনো অস্তিত্ব নেই। [বিশদভাবে ব্যাখ্যা করতে পারবেন?]

4. $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$

$f(x) = x^3$

এখানে f one-one onto। ফলে f^{-1} এর অস্তিত্ব আছে। যেমন :

$$f^{-1}(8) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$f^{-1}(8) = \sqrt[3]{-8} = -2$$

সাধারণভাবে :

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

বিপ্রতীপ ফাংশানের ক্ষেত্রে নিচের নিয়মগুলি সত্য :

$f : A \rightarrow B$

$f^{-1} : B \rightarrow A$

তাহলে $f(a) = b : a \in A, b \in B$

$f^{-1}(b) = a : b \in B, a \in A$

অর্থাৎ : $\boxed{f^{-1} \circ f : A \rightarrow A}$

একে বলে অভেদ ফাংশান বা **identity function**। এর উল্টোক্রমে পাওয়া যায়:

$$(f \circ f^{-1}) : B \rightarrow B$$

এটিকেও বলে অভেদ ফাংশান, যা আমরা আগেই জেনেছি। প্রথমটি A এর ওপর এবং দ্বিতীয়টি B এর ওপর অভেদ ফাংশান।

উদাহরণ ঃ

father : a

son : b

f = father of

g = son of $= f^{-1}$

$f(b) = a$

$g(a) = b$

এক্ষেত্রে $f^{-1} = g$

$g^{-1} = f$

ফলে : $(f^{-1} \circ f)(b)$

$= f^{-1}$ (father of b)

$= f^{-1}(a)$

$= g(a)$

= son of a

$= b$

অর্থাৎ $f^{-1} \circ f(b) = b$

কেউ যদি বলে 'আমার বাবার ছেলেকে আমি খুন করব', এবং তার বাবার যদি একটিই ছেলে থাকে, তাহলে বুঝতে হবে যে সে আত্মহত্যার কথা বলছে।

আবার :

$(g^{-1} \circ g)(a)$

$= g^{-1} \circ (g(a))$

$= g^{-1}$ (son of a)

$= g^{-1}(b)$

$= f(b)$ $[g^{-1} = f]$

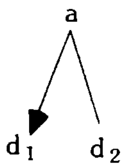
= father of b

$= a$

অর্থাৎ $(g^{-1} \circ g)(a) = a$

ছেলের কথার প্রতিবাদ করতে গিয়ে বাবা যদি ছেলেকে বলেন, 'আমার ছেলের বাবাকে আমি খুন করব' এবং তার ছেলের বাবা যদি থাকে মাত্র একজন (অর্থাৎ তিনি যদি তার স্ত্রীর একমাত্র স্বামী হন), তাহলে বুঝতে হবে যে তিনি আত্মহত্যার কথাই বলছেন।

এতক্ষণে বুঝা গেছে যে প্রথম ক্ষেত্রে ছেলে একাধিক হলে কিংবা দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বাবা একাধিক হলে বিপ্রতীপ ফাংশান থাকা সম্ভব নয়। যেমন, a এর দুই সন্তান, d_1 ও d_2 থাকলে :



$(f^{-1} \circ f)\ (d_1)$

$= f^{-1} \circ f\,(d_1)$

$= f^{-1}$ (father of d_1)

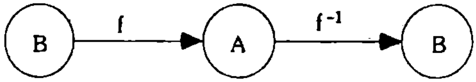
$= f^{-1}\ (a)$

$= g\ (a)\ [g = f^{-1} = \text{son of}]$

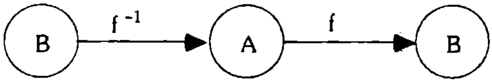
$=$ son of a

$= d_2$ [কিংবা d_1]

সেক্ষেত্রে d_1 যদি বলে 'আমি আমার বাবার ছেলেকে হত্যা করব', তাহলে এমনও বুঝাতে পারে যে সে তার ভাইকে হত্যা করার কথা বলছে। এরূপ দ্ব্যর্থবোধকতা (ambiguity) এড়ানোর জন্য **কোনো ফাংশান one-one onto না হলে ধ'রে নেয়া হয় যে তার কোনো inverse নেই।** নিচের চিত্রের মাধ্যমে কোনো ফাংশান এবং তার inverse এর মধ্যে সম্পর্ক দেখানো হলো।

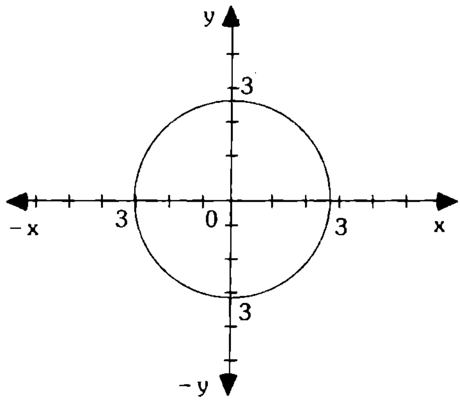


$(f^{-1} \circ f)$



$(f \circ f^{-1})$

এবার বিবেচনা করুন : কোনো বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = a$ (যেখানে a একটি ধ্রুব পদ, এবং যেখানে x, y যথাক্রমে নিচের চিত্রে x ও y অক্ষ বরাবর গৃহীত মান) একটি ফাংশান কি?



ফাংশান সম্পর্কে আমরা আরো জানব এই সিরিজের পরবর্তী কোনো খণ্ডে। অধিক অগ্রসর দিকগুলিকে নিয়ে আলোচনা করতে গেলে যে ভাষার প্রয়োজন, তা আমরা এখনও শিখে পারিনি। ব্যাপকতর আলোচনার সাথে সাথে ফাংশান সম্পর্কিত নিয়মাবলীর উচ্চতর প্রয়োগের ক্ষেত্রও উন্মুক্ত হয়ে পড়বে। তখন আমরা প্রকৃত গণিতের এবং বিজ্ঞানভিত্তিক চিন্তার বাস্তবতায় প্রবেশ করার যোগ্যতা অর্জন করব।

অধ্যায় : ৬

ধারা এবং অনুক্রম
(Series and Sequences)

ধারা গণিতে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ধারণা, কারণ তা মৌলিক। গণিতের সব শাখায় এর প্রয়োগ আছে। অসীম এবং সীমার ধারণাও ধারার ধারণার ওপর প্রতিষ্ঠিত। ইনটেগ্রাল ক্যালকুলাসের মূল ভিতটিই ধারার গাঁথুনি দিয়ে গড়া। কিন্তু ধারা একটি সহজ বিষয়। অবশ্য সূত্র ব্যবহার ক'রে ধারার যোগফল বের করা আর তাকে অনায়াসে বোধগম্যতার পর্যায়ে নিয়ে আসা এক কথা নয়। এই অধ্যায়ে আমরা ধারাকে 'অনুভব' করার চেষ্টা করব।

গণিতে Sequence এবং Series এর মধ্যে পার্থক্য করা হয়। আমরা প্রথমটিকে **অনুক্রম** এবং দ্বিতীয়টিকে **ধারা** নামে অভিহিত করব। প্রথমটি হলো দ্বিতীয়টির ভিত্তি। ফলে প্রথমটিকে ভালোভাবে বুঝতে পারলে দ্বিতীয়টিকেও ভালোভাবে বুঝা যাবে। পরবর্তী আলোচনা থেকে পাঠক বুঝতে পারবেন যে এদেশের বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় সচরাচর যাকে ঢালাওভাবে series ব'লে চালিয়ে দেয়া হয়, তা আসলে sequence।

আমরা যে সংখ্যায় লিখি এবং হিসাব করি, তা একেকটি sequence বা অনুক্রম এর ধারণার ওপর প্রতিষ্ঠিত। অথচ ক'জন তা মনে রাখি? একটি সংখ্যা নিয়েই দেখা যাক :

$$237510$$

সংখ্যাটিকে এভাবে লেখা যায় :

$$\begin{array}{r} 200000 \\ +\ 30000 \\ +\ 7000 \\ +\ 500 \\ +\ 10 \\ +\ 0 \\ \hline =237510 \end{array}$$

বুঝতে পারা যাচ্ছে যে সংখ্যাটির মান হলো তার প্রতিটি অংকের স্থানীয় মানের যোগফলের সমান। এই যোগফলকে আরেকটু সুবিধাজনক কায়দায় লেখা যায় :

$$\begin{array}{rl} & 2 \times 100000 \\ + & 3 \times 10000 \\ + & 7 \times 1000 \\ + & 5 \times 100 \\ + & 1 \times 10 \\ + & 0 \times 1 \\ \hline = & 237510 \end{array}$$

আরো সুবিধাজনকভাবে :

$$237510 = 2 \times (100000) + 3 \times (10000) + 7 \times (1000) + 5 \times (100) + 1 \times (10) + 0 \times (1)$$

আমরা আবারও সেই পুরনো কথাটি স্মরণ করতে পারি যে, যে-পদ্ধতিতে আমরা সংখ্যামানটিকে লিখেছি তা হলো দশমিক (decimal) পদ্ধতি, যার ভিত্তি হলো 10। সুতরাং যোগফলটিকে প্রতি ক্ষেত্রে 10 এর ঘাতে প্রকাশ করা যায় :

$$237510 = 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$$

এই যোগফলটির 10-ঘাতগুলিকে ধারার সমগোত্রীয় ব'লে মনে করা যায়। 1 এর চেয়ে কম মানের কোনো সংখ্যা নিলে বিষয়টিকে আরো স্পষ্টভাবে বুঝা যায় :

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{\cdot 237510} \\ = & \cdot 200000 \\ + & \cdot 030000 \\ + & \cdot 007000 \\ + & \cdot 000500 \\ + & \cdot 000010 \\ + & \cdot 000000 \end{array}$$

ভাবে :

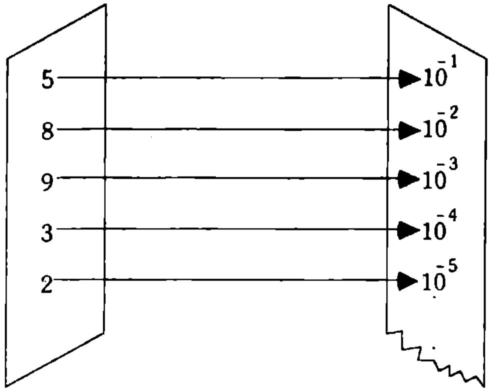
$$
\begin{aligned}
\cdot 237510 &= \cdot 2 + \cdot 03 + \cdot 007 + \cdot 0005 + \cdot 00001 + \cdot 000000 \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{1}{100000} \\
&= 2\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{100}\right) + 7\left(\frac{1}{1000}\right) + 5\left(\frac{1}{10000}\right) \\
&\quad + 1\left(\frac{1}{100000}\right) \\
&= 2 \times \mathbf{10^{-1}} + 3 \times \mathbf{10^{-2}} + 7 \times \mathbf{10^{-3}} + 5 \times \mathbf{10^{-4}} + 1 \times \mathbf{10^{-5}}
\end{aligned}
$$

এই যোগফল 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} এরূপ . . . একটি sequence গঠন করে, যার নাম বা শ্রেণীবিভাগ আমরা একটু পরে জানব। এই sequence এর প্রতিটি পদের (term) সাথে 2, 3, 7 ইত্যাদি গুণন হচ্ছে ব'লে মোটের ওপর তাকে আর sequence এর সাধারণ সূত্রাবলী প্রয়োগ ক'রে যোগ করা যাচ্ছে না বটে, তবুও এদের এক অংশ যে একটি sequence তা মনে রাখতে পারলে একটি প্রয়োজনীয় অন্তর্দৃষ্টি লাভ করা যায়। আমরা যদি ধ'রে নেই যে নিচের চিত্রের মতো একটি অসীম sequence আছে, যা অপরিবর্তনীয় :

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
10^{-1} \\
10^{-2} \\
10^{-3} \\
10^{-4} \\
10^{-5} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
10^{-n} \\
\hline
\end{array}
$$

তাহলে যে-কোনো সংখ্যাকে (যা 1 এর চেয়ে কম মানের, অর্থাৎ যার আগে একটি দশমিক চিহ্ন আছে) এই সেটটির প্রতিটি পদের সাহায্য নিয়ে অর্থপূর্ণ ভাবতে পারি।

যেমন ·58932 সংখ্যাটি হলো একটি সংখ্যা যার 5, 8, 9, 3, 2 অংকগুলির সাথে উপরোক্ত সেটটির প্রথম 5টি পদের সম্পর্ক আছে :



প্রদত্ত sequence এর সেটটির সাথে সম্পৃক্ত থাকার কারণেই সংখ্যাটিকে ·58932 আকারে লেখা সম্ভব হয়েছে। এর অর্থ হলো, সংখ্যাটির 5 এর স্থানীয় মান 10^{-1}, 8 এর 10^{-2}, 9 এর 10^{-3}, . . ., ইত্যাদি। অন্য কথায়, 5 এর $\frac{1}{10}$ ভাগ, 8 এর $\frac{1}{100}$ ভাগ, 9 এর $\frac{1}{1000}$ ভাগ, . . ., ইত্যাদি পরিমাণগুলির সমষ্টি হলো ·58932 :

$$5 \times 10^{-1} = 5 \times \frac{1}{10} = \cdot 5$$

$$8 \times 10^{-2} = 8 \times \frac{1}{100} = \cdot 08$$

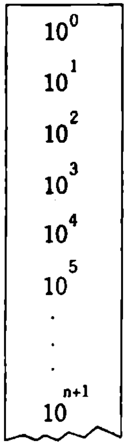
$$9 \times 10^{-3} = 9 \times \frac{1}{1000} = \cdot 009$$

$$3 \times 10^{-4} = 3 \times \frac{1}{10000} = \cdot 0003$$

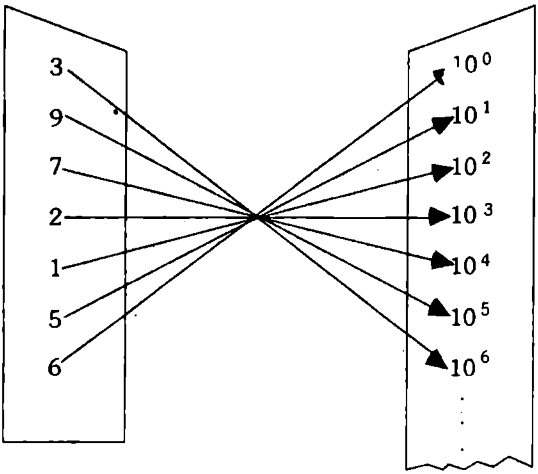
$$2 \times 10^{-5} = 3 \times \frac{1}{100000} = \cdot 00002$$

$$= \cdot 58932$$

1 এর চেয়ে বড় যে-কোনো সংখ্যাকেও এই দৃষ্টিকোণ থেকে দেখা যায়। সেক্ষেত্রে নিচের sequence এর সেটটির সাপেক্ষে প্রতিটি অংক-প্রতীকের মান নির্ধারণ করতে হবে :



উদাহরণস্বরূপ, 3972156 সংখ্যাটিকে এভাবে উক্ত সেটটির সাথে সম্পৃক্ত করা যায় :



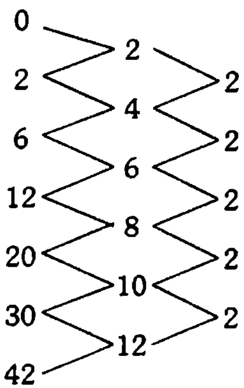
এর অর্থ হলো, 3 এর 10^6 গুণ, 9 এর 10^5 গুণ, 7 এর 10^4 গুণ, 2 এর 10^3 গুণ, . . ., একত্রে যোগ করলে যে পরিমাণ / সংখ্যা পাওয়া যায়, তাকে 3972156 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহলে আমাদের সংখ্যা পদ্ধতির মূলেই রয়েছে একটি sequence এর ইতিহাস। সুতরাং sequence নিয়ে অধ্যায়ন করলে সে জ্ঞান কি বৃথা যেতে পারে?*

বি. সি. এস. সহ বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় এরূপ প্রশ্ন একাধিক এসে থাকে :

0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ——, ——? অর্থাৎ শূন্যস্থানে কী কী বসবে?

প্রশ্নটি দ্বারা কী বুঝায়? বুঝায় যে প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে একটি নির্দিষ্ট *ক্রম* (order) অনুসারে সাজানো হয়েছে। উক্ত ক্রমকে বজায় রাখতে হলে 0 এর পর 2, 2 এর পর 6, 6 এর পর 12, . . ., না বসিয়ে উপায় নেই। সুতরাং শূন্যস্থান দুটিতে বসবে কেবল নির্দিষ্ট দুটি সংখ্যা। ক্রমটির চরিত্রটিকে ধরতে পারলে নির্ণেয় সংখ্যা দুটিকে বের করা সম্ভব, তা কষ্টসাপেক্ষ হলেও। এরূপ কোনো ক্রমের ধারণা অনুসারে এক সেট সংখ্যাকে সাজালে তাকে বলে একটি অনুক্রম বা sequence। আমরা প্রদত্ত প্রশ্নটিকে সমাধান করব।



[ক্রমে ক্রমে পার্থক্য নির্ণয় ক'রে]

দেখা যাচ্ছে যে sequenceটির মূলে রয়েছে একটি *ধ্রুব* রাশি, যাকে উপরের বিয়োগের প্রক্রিয়ার *দ্বিতীয়* ধাপে পাওয়া গেছে। সুতরাং sequenceটিকে কোনো একটি

* ধারার ওপর নির্ভর ক'রে সংখ্যার উপস্থাপন পদ্ধতি বদলে ফেলে সংখ্যাকে যন্ত্রে সমর্পণ করার উপযুক্ত ক'রে নেয়া হয়, যার ফলে কম্পিউটারে লজিককে ব্যবহার করা যায়। এ সম্পর্কিত পদ্ধতিমালার জন্য দেখুন এই লেখকের *একটি আইডিয়ার জন্য : কম্পিউটার।*

সাধারণ ফর্মুলায় ফেলতে হলে ফর্মুলাটিতে কমপক্ষে একটি দ্বিঘাত চলক, n^2, থাকতে হবে।[†] প্রথম এবং দ্বিতীয় ধাপ দেখলে সহজেই বুঝা যায় যে সেই ফর্মুলাটি হলো :

$n^2 + n$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ নিয়ে যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$n = 0$ হলে, $f(n) = n^2 + n = 0$

$n = 1$ হলে, $f(n) = 2$

$n = 2$ হলে, $f(n) = 16$

ইত্যাদি। এভাবেই sequenceটিকে গঠন করা হয়েছিল।

তাহলে এতক্ষণে একটি চমৎকার তথ্য বের হয়ে এল : প্রদত্ত sequence এর প্রতিটি পদকে 0, 1, 2, 3, . . ., স্বাভাবিক যোগবোধক সংখ্যার সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে সম্পৃক্ত করা যায়। সুতরাং sequenceটি একটি **one-one ফাংশান**। এটি **onto**-ও বটে। (অধ্যায় ৭-এ দেখুন।) অর্থাৎ সাধারণভাবে, একটি sequence হলো একটি ফাংশান যার ডোমেইন হলো যোগবোধক সংখ্যার সেট :

$$\begin{array}{ccccc} f(1), & f(2), & f(3), & f(4), & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_n & \end{array}$$

এখানে f (1), f (2) ইত্যাদি দ্বারা ফাংশানের প্রথম পদ, দ্বিতীয় পদ ইত্যাদি বুঝানো হয়েছে। এবং এখানে অসীম সেট $\{a_n\}$ কে বলে একটি infinite sequence বা শুধু sequence। $\{a_n\}$ এর একেকটি উপাদানকে বলে পদ বা **term**।

অধিক তত্ত্বীয় আলোচনার আগে আমরা কিছু চিন্তার ব্যায়াম ক'রে নিই।

- $\frac{1}{3}$ সংখ্যাটিকে একটি অসীম sequence এর যাবতীয় পদের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করুন।

তাহলে ক'রেই দেখা যাক। খুব সহজ। $\frac{1}{3}$ এর মান 1 এর চেয়ে কম। ভাগ প্রক্রিয়া থেকেও তা বুঝা যায় :

---

† *কেন? দেখুন এই লেখকের চিন্তার উপাদান।*

$$\begin{array}{l} 3)\ 10\ (\cdot 3333 \ldots \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

অর্থাৎ $\frac{1}{3} = \cdot 3333 \ldots$ অসীম)।

ফলে $\frac{1}{3} = \frac{1}{10} \times \left(\frac{10}{3}\right)$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{3} \times 10\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{100} \times \frac{1000}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} \times \left(\frac{1000}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{1000} \times \frac{10000}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{1000} \times \left(\frac{1}{10000} \times \frac{100000}{3}\right)$$

এভাবে অসংখ্য পদ তৈরি করা যায়। ফলে :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{10^1} \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{10^3} \times \frac{1}{10^4} \cdots \times \frac{1}{10^{n-1}} \times \mathbf{\frac{10^n}{3}}$$

এভাবে আমরা একটি sequence এর ধারণা পাচ্ছি, তবে নোতুন কিছু পাচ্ছি না—sequenceটিকে তার প্রান্তে উন্মুক্তভাবে ছেড়ে দিতে পারছি না, সেই জত(1,3) রয়েই যাচ্ছে $\left(\frac{10^n}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}} \times 10^n\right)$। তাছাড়া sequenceটির প্রতি দুটি term এর মধ্যে

যোগচিহ্ন বসাতে পারলে আমাদের উদ্দেশ্য সফল হতো। একাজ অবশ্য আমরা অধ্যায়—১-এ বর্ণিত দশমিক ভগ্নাংশের মান বের করা সম্পর্কিত কৌশলটি অবলম্বন ক'রে করতে পারি এবং তা অনুসারে আমরা $\frac{1}{3}$ কে একটি অসীম ধারা বা sequence এর যোগফল হিসেবে লিখতে পারি :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots \\ &= 3\left\{\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right\}\end{aligned}$$

এই ধারাটিকে ব্যবহার ক'রে এখন আমরা $\frac{1}{3}$ এর যে-কোনো দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করতে পারি। যেমন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় করতে হলে আমরা ধারাটির চারটি পদকে যোগ করতাম :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &\approx 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}\right) \\ &\approx 3\,(\cdot 1 + \cdot 01 + \cdot 001 + \cdot 0001) \\ &= 3\,(\cdot 1111) \\ &= \cdot 3333\end{aligned}$$

এবার প্রসঙ্গক্রমে একটি মন্তব্য করা যায় : ধরুন আপনি এমন একটি কম্পিউটার বা ক্যালকুলেটর বানাতে চান যা $\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}$ এর মান বের করতে পারবে। আপনার যন্ত্র সরাসরি মানবীয় ভাগ-প্রক্রিয়া ব্যবহার করতে পারে না। তাহলে কাজটি আপনি যন্ত্রটিকে দিয়ে কী সম্ভাব্য উপায়ে করাতে পারবেন? জবাব আমরা ইতোমধ্যেই পেয়ে গেছি। যন্ত্রটিতে ·1, ·11, ·111, ·1111, . . ., এই ধারাটি আগে থেকে ঢুকানো থাকলে তা উপরোক্ত প্রক্রিয়ায় $\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশের মান যে-কোনো দশমিক স্থান পর্যন্ত হিসাব করতে পারবে। কম্পিউটারকে দিয়ে হিসাব করাতে হলে আমাদেরকেই আগে যান্ত্রিক উপায়ে হিসাব করতে শিখতে হয় এবং সেসব ক্ষেত্রে ধারা একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।* এখানে sequenceটির মান ক্রমে ক্রমে ক'মে যাচ্ছে। ফলে সবগুলি পদের

---

* দেখুন *একটি আইডিয়ার জন্ম : কম্পিউটার।*

যোগফল একটু একটু ক'রে বৃদ্ধি পাচ্ছে, কিন্তু পদের সংখ্যা যতই বাড়ুক না কেন, যোগফল একটি সীমাতে $\left(\frac{1}{3}\right)$ কখনও পৌঁছাতে পারছে না। এই **সীমার (limit)** ধারণা গণিতে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। মূলত ক্যালকুলাসের ভিত দাঁড়িয়ে আছে 'মহাক্ষুদ্র' (infinitesimal), অসীম (infinity), এবং সীমার ধারণার ওপর, যাদের সবগুলিই sequence-এর সাথে অঙ্গাঙ্গিভাবে জড়িত। কিন্তু সে আলোচনায় এখন যাওয়া সম্ভব নয়।

এতক্ষণের আলোচনা থেকে sequence এর প্রাথমিক ধারণা পাওয়া গেল। কিন্তু ধারা বা series কাকে বলে তা আমরা স্পষ্ট ক'রে এখনও বলিনি। **ধারা হলো একটি sequence এর সবগুলি পদের যোগফল**। এদের পার্থক্যটি মনে রাখলে পরবর্তী প্রাথমিক আলোচনা আর বুঝতে ঝামেলা হবে না।

sequence কে প্রধানত দুই ভাগে ভাগ করা হয় :

যোগাত্মক বা গাণিতিক বা সমান্তর অনুক্রম (arithmatic sequence) এবং

গুণোত্তর বা জ্যামিতিক অনুক্রম (geometric sequence)।

যোগাত্মক অনুক্রমের প্রতি দুটি নিকটতম পদের বিয়োগফলের মান সর্বক্ষেত্রে একই। যেমন :

1, 8, 15, 22, 29, 36, . . .

এই অনুক্রমটি হলো যোগাত্মক। এর যে-কোনো নিকটতম দুটি পদের বিয়োগফল 7 :

$$8 - 1 = 7$$

$$29 - 22 = 7$$

$$22 - 15 = 7$$

$$36 - 29 = 7$$

যেহেতু ধারাটি যোগাত্মক, সেহেতু এই **সাধারণ অন্তর (common difference)** 7-এর মাধ্যমে এর যেকোনো পদের মান বের করার সাধারণ সূত্র (general formula) নির্ণয় করা যায় :

$a_n = a_1 + (n-1)d$

যেখানে a_n = অনুক্রমটির nতম পদ

a_1 = অনুক্রমটির প্রথম পদ

d = সাধারণ অন্তর

সুতরাং পূর্বোক্ত অনুক্রমটির সাধারণ সূত্র হবে নিম্নরূপ :

$a_n = 1 + (n-1).7$

যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$a_1 = 1 + (1-1).7 = 1 + 0.7 = 1$

$a_2 = 1 + (2-1).7 = 1 + 1.7 = 8$

$a_3 = 1 + (3-1).7 = 1 + 2.7 = 15$

ইত্যাদি।

যদি বলা হয় অনুক্রমটির 12তম পদটি কী? তাহলে উত্তর হবে :

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= 1 + (12-1).7 \\
&= 1 + 11.7 \\
&= 1 + 77 \\
&= 78
\end{aligned}
$$

কোনো যোগাত্মক অনুক্রমের প্রথম n পদের যোগফল বের করার সূত্রও বের করা সম্ভব এবং তা আমাদের অনেক সময়ে দরকারও হয়। সহজ একটি অনুক্রম নিয়ে এরূপ একটি সূত্রের সন্ধান করা যাক।

1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .

একে উল্টো ক্রম অনুসারে আবার লেখা যাক :

. . . 11, 9, 7, 5, 3, 1

ধরা যাক আমরা প্রথম 6টি পদের যোগফল নির্ণয় করতে চাই। তাহলে দুইটি অনুক্রমকে পাশাপাশি লিখে যোগ করা যাক :

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\
+ & 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\
\hline
\end{array}
$$

যোগফল = $(12+12+12+12+12+12)\div 2$ [কারণ, একই জিনিসকে দুই বার নেয়া হয়েছে।

$$= (12 \times 6).\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 12$$
$$= \frac{6}{2} \times (1 + 11)$$

এখানে 6 দ্বারা বুঝানো হচ্ছে যে আমরা প্রথম থেকে 6টি পদ নিয়ে যোগ করেছি। nটি পদের ক্ষেত্রে লেখা যায় n। 1 হলো প্রথম পদ, a_1। 11 হলো ষষ্ঠ পদ, a_6 : সাধারণ অর্থে a_n।

এভাবে একটি সহজ সাধারণ সূত্র হবে :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

কিন্তু যেহেতু $a_n = a_1 + (n - 1)d$, সেহেতু :

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n - 1)d]$$

বা, $$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]} \quad \ldots\ldots\ldots (ii)$$

যোগাত্মক অনুক্রমের nতম পদ পর্যন্ত সকল পদের সমষ্টি নির্ণয় করার জন্য উভয় সূত্রই ব্যবহার করা যায়। সূত্র (i) এর গাণিতিক প্রমাণ নিচে দেয়া হলো :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

এখানে :

$$a_2 = a_1 + (2 - 1)d = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + (3 - 1)d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d = a_1 + 3d$$

ইত্যাদি।

ফলে $$S_n = [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + [a_1 + 3d] + \ldots + [a_1 + (n - 1)d]$$

অনুক্রমটিকে nতম পদ থেকে শুরু ক'রে ক্রমে ক্রমে যথানিয়মে d বাদ দিতে দিতে প্রথম দিকেও এগুনো যায় :

$$S_n = a_n + [a_n - d] + [a_n - 2d] + [a_n - 3d] + \ldots + [a_n - (n - 1)d]$$

S_n এর এই উভয় রূপকে যোগ করলে পাওয়া যায় :

$$2 \times S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots \text{ n-সংখ্যক পদ}$$
$$= n \times (a_1 + a_n) \text{ [কারণ n সংখ্যক } (a_1 + a_n) \text{ পাওয়া যাচ্ছে।]}$$

অর্থাৎ $2S_n = n(a_1 + a_n)$

বা $S_n = \frac{1}{2} \cdot n(a_1 + a_n)$

বা $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

এটি হলো প্রথম সূত্র। এ থেকে পূর্বে প্রদর্শিত উপায়ে দ্বিতীয় সূত্রটি পাওয়া যায়।

FOOD FOR THOUGHT

1. একটি গাছ (খুব সম্ভবত দেবদারু গাছ) বর্তমানে 1 ফুট লম্বা। প্রতি বছর 3 ফুট ক'রে লম্বা হবে ব'লে ঠিক করেছে। সে মোট 8 বছর ধ'রে এভাবে লম্বা হতে থাকবে।

a) গাছটির লম্বা হওয়ার সাধারণ ফর্মুলা কী?

b) সে 8 বছরে মোট কতটুকু লম্বা হবে?

সমাধান : গাছটির লম্বা হওয়ার সাধারণ ফর্মুলাটি হলো—

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= 1 + (n-1).3$$
$$= 1 + 3(n-1)$$

সে অষ্টম বছরে গিয়ে মোট লম্বা হবে :

$$a_8 = a_1 + (8-1).3$$
$$= 1 + 7.3$$
$$= 22 \text{ ফুট}$$

বিঃ দ্রঃ b) এর উত্তর 22 ফুট। এখানে S_n এর ফর্মুলা প্রযোজ্য নয়, কারণ a_8 দ্বারা অষ্টম বছরে সে *মোট* কতটুকু লম্বা হলো তা বুঝায়। S_n ফর্মুলা প্রয়োগ করলে ফল কী হয় তা দেখেই ভাবতে শুরু করুন কেন ফর্মুলাটি এখানে প্রযোজ্য নয় :

$$S_8 = \frac{8}{2} + (1 + 22)$$
$$= 4 . 23$$
$$= 92 \text{ ফুট}$$

92 ফুট মানে 60 হাতেরও বেশি!

আসলে তার লম্বা হবার ঘটনাটিকে এভাবে ভাবা যায় :

প্রথম বছর : 1 ফুট

দ্বিতীয় বছর : 4 ফুট (মোট)

তৃতীয় বছর : 7 ফুট (মোট)

চতুর্থ বছর : 10 ফুট (মোট)

পঞ্চম বছর : 13 ফুট (মোট)

ষষ্ঠ বছর : 16 ফুট (মোট)

সপ্তম বছর : 19 ফুট (মোট)

অষ্টম বছর : 22 ফুট (মোট)

এই সংখ্যাগুলিকে আবার কেন যোগ করব? হিসাবটি তো করা হচ্ছে তার বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হবার পরেই।

অনুক্রমের ধারণা বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে কেউ কেউ এই ভুলে আটকে যায়! লক্ষ্য করুন : প্রশ্নে বলা হয়নি যে 'গাছটি প্রতি বছর 3 ফুট ক'রে *বেশি* লম্বা হবে'। উদাহরণ 5(a) এবং 5(b) এর মধ্যে তুলনা করলে ব্যাপারটি স্পষ্ট হয়ে যাবে।

2. প্রমাণ করুন যে :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots n^{th} \text{ term} = n^2$$

প্রমাণ :

এখানে n^{th} পদ, $a_n = a_1 + (n-1).d$

$$= 1 + (n-1).2$$
$$= 1 + 2n - 2$$
$$= 2n - 1$$

ফলে : $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$

$$= \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$

$$= \frac{n}{2}[2n]$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2n$$

$= n^2$ প্রমাণিত।

3. $a_n = 3 + \frac{n}{3}$ এর প্রথম 21টি পদের যোগফল নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$\{a_n\}$ অনুক্রমটির $a_1 = 3$, $a_{21} = 3 + \frac{21}{3}$

$= 3 + 7 = 10$।

সুতরাং :

$$S_{21} = \frac{21}{2}(3 + 10)$$

$$= \frac{21}{2} \times 13$$

$$= \frac{273}{2}$$

4. 5, 16, 27, 38, 49, . . . অনুক্রমটির প্রথম 150টি পদের যোগফল কত?

সমাধান :

এখানে : $a_1 = 5$

$$d = (16 - 5) = 11 \; [= (49 - 38) = 11]$$

$$a_{150} = a_1 + (150 - 1).11$$

$$= 5 + 149.11$$

$$= 5 + 1639$$

$$= 1644$$

সুতরাং $S_n = \frac{150}{2}(5 + 1644)$

$$= 75 \times 1649$$

$$= 1,23,675$$

সরাসরি দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে :

$$S_{150} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)\, d]$$

$$= \frac{150}{2}[2.5 + (150 - 1).11]$$

$$= 1,23,675$$

5. a) সিনহার দোকানে প্রতি বছর গড়ে লাভ হয় 50,000 টাকা। লাভের টাকা সে জমা ক'রে রাখে। সে 10 বছর পর শুধু লাভের টাকা দিয়ে এমন একটি গাড়ি কিনতে চায় যার দাম 5 লাখ টাকা। নির্দিষ্ট সময়ে তাকে কত টাকা ধার করতে হবে?

b) সিনহার দোকানো প্রথম বছর লাভ হয়েছে 10,000 টাকা। সে নিশ্চিত যে প্রতি বছর পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5,000 টাকা বেশি লাভ করতে পারবে। 10 বছর পর সে 5 লাখ টাকার গাড়িটি কিনতে পারবে কি?

সমাধান :

a) 10 বছরে স্থির হারে মোট লাভ হবে :

$$50{,}000 \times 10 \text{ টাকা}$$
$$= 5{,}00{,}000 \text{ টাকা।}$$

সুতরাং তাকে গাড়িটি কিনতে গিয়ে কোনো টাকা ধার করতে হবে না।

b) $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2.10{,}000 + (10-1).5{,}000]$$
$$= 5[20{,}000 + 45{,}000]$$
$$= 5(65{,}000)$$
$$= 3{,}25{,}000 \text{ টাকা।}$$

তাকে (5,00,000 – 3,25,000) টাকা, অর্থাৎ 1,75,000 টাকা ধার করতে হবে।

গাণিতিক গড় (Arithmetic mean)

কোনো গাণিতিক/যোগাত্মক অনুক্রমের মধ্যকার এক বা একাধিক পদ উহ্য থাকলে সেগুলিকে পার্শ্ববর্তী অন্যান্য পদগুলির সাহায্য নিয়ে হিসেব ক'রে বের করা যায়। যেমন :

$$4, m_1, m_2, m_3, 15$$

পদগুলি মিলে একটি গাণিতিক অনুক্রম গঠন করলে m_1, m_2, m_3-র মান বের করুন। অন্য কথায়, আপনি পাঁচটি গরুর মালিক, যেগুলির বয়সের মানগুলি একটি যোগাত্মক ধারায় পড়ে। আপনার কেবল প্রথম এবং শেষ গরুটির বয়স মনে আছে : 4 বছর এবং 15 বছর। বাকি গরুগুলির বয়স কত?

সমাধান :

$$a_1 = 4$$
$$n = 5$$
$$a_5 = 15$$

সূত্র অনুসারে : $a_5 = a_1 + (n-1)d$

$$= 4 + (5-1)d$$
$$= 4 + 4d$$

অতএব : $4 + 4d = 15$ [$a_5 = 15$]

$$d = \frac{11}{4}$$

$$m_1 = a_1 + d = 4 + \frac{11}{4} = \frac{27}{4}$$
$$m_2 = m_1 + d = \frac{27}{4} + \frac{11}{4} = \frac{38}{4}$$
$$m_3 = m_2 + d = \frac{38}{4} + \frac{11}{4} = \frac{49}{4}$$

গুণোত্তর অনুক্রম এবং ধারা

(Geometric sequences and series)

যোগাত্তক অনুক্রমে আমরা দেখেছি যে তাতে যে-কোনো পার্শ্ববর্তী দুটি পদের **বিয়োগফলের** (চিহ্নবিহীন) মান সর্বদা একই। গুণোত্তর অনুক্রমের ক্ষেত্রে পার্শ্ববর্তী যে-কোনো দুটি পদের **অনুপাত বা ভাগফল** (বৃহত্তর পদ ÷ ক্ষুদ্রতর পদ) সর্বদা একই। এই অনুপাতকে বলে **সাধারণ অনুপাত** (common ratio) এবং একে প্রথা অনুসারে **r** দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। নিচের অনুক্রমগুলি গুণোত্তর :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \left[r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8}\right]$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots [r = -1]$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} [r = 2]$$

কিন্তু :

$$1, 2, 4, 12, 24, 72, \ldots$$

এই অনুক্রমটি গুণোত্তর নয়, কারণ—

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{12}{4} \neq \frac{24}{12} \neq \frac{72}{24}$$

এবং এজন্য কোনো ধ্রুব r এতে নেই।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে একটি গুণোত্তর অনুক্রমের প্রতিটি পদ তার পূর্ববর্তী পদের r গুণ। অর্থাৎ প্রথম পদ a_1 হলে দ্বিতীয় পদ $a_1.r$, তৃতীয় পদ $a_1.r.r$, চতুর্থ পদ $a_1.r.r.r$। অর্থাৎ অনুক্রমটি হবে এরূপ :

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{n-1}, a_n \\ &= (a_1), (a_1.r), (a_1.r.r.), (a_1.r.r.r.), \ldots \\ &\qquad (a_1.r.r.r.((n-1) \text{ সংখ্যক})), (a_1 r_n) \\ &= a_1.1., a_1 r^1, a_1 r^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}, ar^n \\ &= ar^{1-1}, ar^{2-1}, ar^{3-1}, ar^{4-1}, \ldots ar^{n-1} \end{aligned}$$

ফলে $\boxed{a_n = ar^{n-1}}$

এই সূত্র অনুসারে, উদাহরণস্বরূপ, কোনো অনুক্রমের প্রথম পদ $a_1 = 2$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = -3$ হলে তা নির্ণয় করা খুব সহজ :

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= 2, 2(-3), 2(-3)^2, 2(-3)^3, 2(-3)^4, \ldots \\ &= 2, -6, 18, -54, 142, \ldots \end{aligned}$$

এক্ষেত্রে *প্রতি দ্বিতীয়* পদটির মান হবে ঋণাত্মক।

উদাহরণ :

$$3, -15, 75, -375, \ldots$$

ধারাটির অষ্টম পদের মান কী হবে?

সমাধান :

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ r &= \frac{-15}{3} = \frac{-375}{75} = -5 \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_8 &= 3.(-5)^{8-1} \\ &= 3.(-5)^7 \\ &= -2,34,375 \end{aligned}$$

গুণোত্তর ধারার যোগফলের সূত্রটিকে অনেকের কাছে কিছুটা ভয়ংকর মনে হলেও তা গঠন করা অত্যন্ত সহজ। পদ্ধতিটি নিচে দেখানো হলো।

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

r দ্বারা গুণন ক'রে :

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

প্রথম সমীকরণটি থেকে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ ক'রে $(n-1)$ ঘাতের পদকে অপনয়ন ক'রে n ঘাতের পদকে রাখা যাবে :

$$S_n - rS_n = a_1 + a_1 r - a_1 r + a_1 r^2 - a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1} - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

$$S_n - rSn = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n (1-r) = a_1 (1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1 (1-r^n)}{1-r}$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{(1-r^n)}{(1-r)}}$$

উদাহরণ : একটি দেশের লোকসংখ্যা বর্তমানে 1 কোটি। গবেষণা ক'রে দেখা গেছে যে সেখানে লোকসংখ্যা জ্যামিতিক হারে বৃদ্ধি পায়। এই হার হলো বছরে মোট জনসংখ্যার $\frac{1}{20}$ ভাগ। দেশটিতে মোট সম্পদ 1,00,000 কোটি টাকার। বিজ্ঞানীগণ গবেষণা ক'রে দেখেছেন যে কোনো দেশের মোট মাথাপিছু সম্পদের পরিমাণ 6,000 কোটি টাকার নিচে নেমে গেলে দুর্ভিক্ষ মহামারীতে জনসংখ্যা পরবর্তী 20 বছরে 30 ভাগ শেষ হয়ে যাবে। এই তত্ত্ব অনুসারে আগামী 20 বছরে দেশটির জনসংখ্যা কত হতে পারে? [তথ্য এবং তত্ত্ব কাল্পনিক]

সমাধান ঃ

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{1}{20}$$

$$S_{20} = ?$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$= 1. \frac{1 - (\cdot 05)^{20}}{1 - \cdot 05}$$

$$= \frac{1 - 0}{\cdot 05}$$

$$= \frac{1}{\cdot 05}$$

$$= 20$$

20 বছর পর দেশটির লোকসংখ্যা হবে 20 কোটি। তখন মাথাপিছু সম্পদের পরিমাণ হবে (যদি সম্পদ না বাড়ে) $\frac{1,00,000}{20}$ টাকার = 5,000 কোটি টাকার। সুতরাং 20 বছর পর আসলে লোকসংখ্যা 20 কোটি হবে না, আগেই মহামারী লাগবে। হিসাব ক'রে বলুন তো কখন লাগবে মহামারী?

উদাহরণ : গুণোত্তর ধারার মাধ্যমে $\cdot\dot{1}$, $\cdot\dot{2}\dot{2}$, $2\cdot\dot{1}21\dot{5}$ এর মান ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান : আমরা এর আগেও বলেছি যে কোনো সংখ্যার সাথে একটি স্থির অনুক্রম জড়িত। এখন বুঝা যাচ্ছে যে অনুক্রমটি জ্যামিতিক। কিন্তু বর্তমান প্রশ্নগুলির উত্তর খোঁজার জন্য সেরূপ স্থির ধারার সাহায্য নেয়া লাগবে না।

$$S_n = \cdot\dot{1}$$

$$= \cdot 1111 \ldots \text{অসীম}$$

$$= \cdot 1 + \cdot 01 + \cdot 001 + \cdot 0001 + \ldots \text{অসীম}$$

$$= \cdot 1 + (\cdot 1)^2 + (\cdot 1)^3 + (\cdot 1)^4 + \ldots \propto$$

$$= a_1 \cdot \frac{1 - (\cdot 1)^{\propto}}{(1 - \cdot 1)}$$

এখানে $a_1 = \cdot 1$, $n = \propto$ (অসীম)। $\cdot 1$ এর সূচক অসীমের দিকে যেতে থাকলে $(\cdot 1)^n$ এর মান শূন্যের দিকে যেতে থাকে। ফলে $(\cdot 1)^{\propto} = 0$ ধরা যায় :

$$\therefore S_n = \cdot 1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - \cdot 1}$$

$$= \cdot 1 \times \frac{1}{\cdot 9}$$

$$= \frac{\cdot 1}{\cdot 9}$$

$$= \frac{\cdot 1 \times 10}{\cdot 9 \times 10}$$ [লব ও হরকে 10 দ্বারা গুণন ক'রে]

$$= \frac{1}{9}$$

অর্থাৎ $\frac{1}{9} \approx \cdot\dot{1}$ বা $\cdot 1111\ldots$

$$
\begin{aligned}
Sn &= \cdot 2\dot{2}\\
&= \cdot 222 \ldots \infty\\
&= \cdot 2 + \cdot 02 + \cdot 002 + \ldots \infty\\
&= \cdot 2 + \cdot 2(\cdot 1) + \cdot 2(\cdot 1)^2 + \cdot 2(\cdot 1)^3 + \ldots \infty\\
&= \cdot 2 \times \frac{1-(\cdot 1)^n}{1-\cdot 1} \text{ যেখানে } n = \infty\\
&= \cdot 2 \times \frac{1-0}{1-\cdot 1}\\
&= \cdot 2 \times \frac{1}{\cdot 9}\\
&= \frac{\cdot 2}{\cdot 9}\\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

$2\cdot 1\dot{2}1\dot{5}$ এর ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারায় ফেলা যায় কেবল $\cdot 0\dot{2}1\dot{5}$ অংশটিকে এবং $2\cdot 1\dot{2}1\dot{5} = 2\cdot 1 + \cdot 0\dot{2}1\dot{5}$ ব'লে এই দ্বিতীয় অংশটির মান আগে বের করা যাক।

$$
\begin{aligned}
\cdot 0\overline{215} &= \cdot 0215 + \cdot 0000215 + \cdot 0000000215 + \ldots\\
&= \cdot 0215 + \cdot 0215(\cdot 001)^2 + \cdot 0215(\cdot 001)^3 + \ldots\\
&= a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \text{ [কিন্তু } r < 1 \text{ হওয়ায় } r^n = r^\infty = 0]\\
&= \frac{a_1}{1-r}\\
&= \frac{\cdot 0215}{1-\cdot 001}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\cdot 0215}{\cdot 999}$$

$$= \frac{\cdot 0215}{\cdot 9990}$$

$$= \frac{215}{9990}$$

সুতরাং $2\cdot1\overline{215} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{215}{9990}$

$$= \frac{21}{10} + \frac{215}{9990}$$

$$= \frac{20979 + 215}{9990}$$

$$= \frac{21194}{9990}$$

এতক্ষণে একটি জিনিস সম্ভবত লক্ষ্য করেছেন : r এর মান 1 এর চেয়ে ছোট হলে এবং $n \to \infty$ হলে S_n এর সূত্রটি সহজে নিম্নরূপ হয়ে যায় :

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$

এবং এক্ষেত্রে S_n লেখার আর কোনো দরকার হয় না। কারণ n এখানে অসীম।

চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে গুণোত্তর প্রগমনের ব্যবহার

একটি ছোট উদাহরণ নেয়া যাক। ধরুন আপনি 500 টাকা ব্যাংকে রাখলেন। ব্যাংক আপনাকে 10% হারে সুদ দিবে। তবে ব্যাংক আপনাকে চক্রবৃত্তি সুদের (compound interest) সুবিধা দিচ্ছে। ফলে আপনার মোট সুদ প্রতি ছয় মাস পর পর হিসাব হচ্ছে এবং পরবর্তী ছয় মাসের জন্য ঐ সুদই আবার আসলের (balance / principal) সাথে যুক্ত হয়ে আসলে পরিণত হচ্ছে এবং আপনি তার ওপরও সুদ পাচ্ছেন। অর্থাৎ সুদের উপর সুদ, তার ওপর সুদ, তার ওপর . . ., যতটি সময়কাল (এখানে ছয় মাসের) ধ'রে টাকা ব্যাংকে থাকবে। তাহলে স্বাভাবিক বছরের 5 বছর পর মোট আপনার একাউন্টে কত টাকা জমা হবে? (আপনি ব্যাংক থেকে কোনো টাকা তুলবেন না।)

সূত্র ব্যবহার ক'রে এরূপ সমস্যার সমাধান করা খুব সহজ। কিন্তু একটু বেশি কথা ব'লে (বা শুনে) সমস্যার মৌলিক চরিত্র বুঝতে পারলে সবচেয়ে ভালো হয়। বলা বাহুল্য,

বেশি কথা শোনার ভয়ে অনেকেই গণিত শিখতে পারে না এবং অল্প কথা বলার দম্ভে অনেক গণিত লেখকই পাঠকের কোনো কাজে আসতে পারেন না। যাহোক, মূল 500 টাকার গতিবিধিটি নিচের sequence এর মাধ্যমে দেখানো যেতে পারে :

১ম বছর শুরুতে (এখানে বছর = 6 মাস) : 500 টাকা

২য় বছরের শুরুতে : $500 + (500 \times 10\%) = 550$ টাকা

২য় বছরের শেষে সুদ-আসল : $550 + (550 \times 10\%) = 605$ টাকা

৩য় বছরের শুরুতে আসল : 605 টাকা

৩য় বছরের শেষে সুদ-আসল : $605 + (605 \times 10\%) = 665.50$ টাকা

এভাবে পাওয়া যাচ্ছে একটি sequence :

(1)	(2)	(3)	(4)	
500,	550,	605,	665.50,	. . . 10টি পদ

দেখা যাচ্ছে যে sequenceটি সমান্তর বা arithmatic নয়। আবার এটি গুণোত্তরও নয়। আসলে এর এক অংশ গুণোত্তর।

এর মধ্যে যে গুণোত্তর sequenceটি আছে আমরা তা বের করব। এটি কোনো অ্যাকাউন্টিং, ফিন্যান্স, বা ইকোনোমিক্স্-এর বই নয় ব'লে যে হিসাবটি করা যাবে না, তা নয়—হিসাবটি পুরোপুরি গাণিতিক। সুতরাং তা মৌলিকভাবে গণিতের আওতায় পড়ে।

সুদাসল (A) = আসল (p) + মোট সুদ (i)

অর্থাৎ $A = p + i$

কিন্তু i = আসল $\times$ সুদের হার

$= p \times r$

$= pr$

১ম বছরের শেষে $A_1 = p + i$

$= p + pr$

২য় বছরের শেষে $A_2 = A_1 + i$

কিন্তু এখানে i = আসল $\times r$

$= A_1 \times r$

ফলে $A_2 = A_1 + A_1 r$

$$= p + pr + (p + pr)r$$
$$= p + pr + pr + pr^2$$
$$= p + 2pr + pr^2$$
$$= p(1 + 2r + r^2)$$
$$= p\{1^2 + 2.1.r + r^2\}$$
$$= p\{1 + r\}^2$$
$$= p(1 + r)^2$$

৩য় বছরের শেষে $A_3 = A_2 + i$

$$= p(1 + r)^2 + p(1 + r)^2.r$$
$$= p(1 + r)^2 + p(1 + 2p + r^2).r$$
$$= p[(1 + r)^2 + r + 2r^2 + r^3]$$
$$= p[1 + 2r + r^2 + r + 2p^2 + r^3]$$
$$= p[1 + 3r + 3r^2 + r^3]$$
$$= p[1^3 + 3.1^2.r + 3.1.r^2 + r^3]$$
$$= p(1 + r)^3$$

$[\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3]$

এভাবে একটি ধারা পাওয়া যাবে :

$$A_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots$$

বা $A_n = p\,(1 + r)^n$

যেখানে p = প্রথম মূলধন

r = সুদের হার

n = বছরের (বা প্রতি একক সময়সীমার) সংখ্যা

এই সূত্র ব্যবহার ক'রে পূর্বোক্ত প্রশ্নটির সমাধান করা খুব সহজ কাজ :

$$A_{10} = 500\,(1 + \cdot 1)^{10}$$
$$= 500\,(1\cdot 1)^{10}$$
$$= 500\,(2.5937)$$

$= 1296.85$ টাকা।

এখানে একটি বিষয় লক্ষ্যণীয় : সুদের হার বাৎসরিক হলে, কিন্তু চক্রবৃদ্ধির সময়কাল (compounding period) তার কম হলে, বছরে n সংখ্যক চক্রবৃদ্ধির জন্য সূত্রটি হবে নিম্নরূপ :

$$\boxed{A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{tn}}$$

যেখানে t হলো বছরের সংখ্যা। আমরা পূর্ববর্তী উদাহরণে ধ'রে নিয়েছি যে সুদের হার প্রতি 6 মাসে 10%।

আপাতত আমরা আমাদের আলোচনা এখানেই শেষ করব। তবে একটি জিনিস মনে রাখতে হবে, ধারার বা অনুক্রমের একই ধারণার সাথে আমরা আরো উচ্চতর বিভিন্ন ক্ষেত্রে সাক্ষাৎ করব। তখন এই সাধারণ বিষয়গুলি ভুলে গেলে চলবে না।

একটি বিশেষ অনুক্রম

যে-কোনো সংখ্যা n থেকে 1 পর্যন্ত যাবতীয় ধারাবাহিক সংখ্যার গুণফল একটি বিশেষ অনুক্রম। একে n! বা $\underline{|n}$ (n ফ্যাক্টোরিয়াল) বলে :

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\times 1}$$

যেমন : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

এই অনুক্রমটি উচ্চতর গাণিতের সকল শাখাতেই ব্যবহৃত হয়। পরবর্তী অধ্যায়েই এটি চ'লে আসবে।

অধ্যায় : ৭

গণনার বিধি, বিন্যাস এবং সমাবেশ (Counting Principles, Permutations and Combinations)

একাধিক ঘটনার (event) সম্ভাবনার মধ্য থেকে কোনো একটি নির্দিষ্ট ঘটনা কত উপায়ে ঘটতে পারে তা গাণিতিকভাবে না জানলে গাণিতিক গণনার তত্ত্ব সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা অর্জন করা যায় না। আবার অসংখ্য ঘটনাকে নির্দিষ্ট বিধি অনুসারে সংক্ষিপ্ত অথচ সহজবোধ্য উপায়ে গণনা করতে না পারলে গণিতের উচ্চতর অনেক শাখার বিভিন্ন সূত্রের উৎসই স্পষ্টভাবে বুঝতে পারা যায় না। আমরা এই অধ্যায়ে গণনার মূলনীতিটি জানব এবং সেই সাথে বিন্যাস এবং সমাবেশ নামক দুটি গণনা-নির্ভর গাণিতিক ধারণার সাথে পরিচিত হব। এই দুটি ধারণা গণিতের উচ্চতর সব শাখাতেই ব্যবহৃত হয়। ধারণা দুটি অন্যান্য সূত্রের প্রতিপাদনের ক্ষেত্রে দুটি যান্ত্রিক উপায় হিসাবে ব্যবহৃত হয়, যা অত্যন্ত প্রাথমিক এবং মৌলিক পর্যায়ের একটি ব্যাপার। সুতরাং এগুলিকে ভালোভাবে না বুঝতে পারলে সেসব ক্ষেত্রে সামান্যের জন্য বিরাট দুর্বলতা রয়ে যায়। তাছাড়া গণনার বিধির সাথে সম্ভাবনাতত্ত্বের (probability theory) মৌলিক পর্যায়ে যোগসূত্র রয়েছে। এই অধ্যায়ে সংক্ষেপে আমরা তাও বিচার করব।

সহজ উদাহরণ দিয়েই শুরু করা যাক। উদাহরণগুলিকে অত্যন্ত মনোযোগের সাথে অধ্যয়ন করতে হবে, এবং সবচেয়ে বড় ব্যাপার হলো, একটি উদাহরণের সাথে অপরটির পার্থক্য সূক্ষ্মভাবে বুঝার চেষ্টা করতে হবে।

1. a) একটি কোম্পানি একটি নির্দিষ্ট ব্রান্ডের রেডিও সেট তৈরি করে। তারা তাদের নিয়ন্ত্রণ এবং বাজারজাতকরণের সুবিধার জন্য প্রতিটি সেটে একটি এক অক্ষরের নম্বর ব্যবহার করার সিদ্ধান্ত নিল। নিয়ম হলো, একই অক্ষর দুটি রেডিওতে ব্যবহার করা যাবে না। কিংবা ধরা যাক কৌশলগত এবং গোপনীয়তার কারণে তারা অক্ষর বাদ দিয়ে 0 থেকে 9 পর্যন্ত একটি অংক ব্যবহার করার সিদ্ধান্ত নিল। এ কাজ করতে গিয়ে কোম্পানির ব্যবস্থাপক কী অভিজ্ঞতা লাভ করবেন?

অংক মাত্র দশটি : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9। ব্যবস্থাপককে একটি রেডিওর জন্য মাত্র একটি অংক ব্যবহার করতে হবে। এভাবে তিনি মোট 10টি প্রতীক পাবেন। এক অংকের অন্য কোনো প্রতীক পাওয়া সম্ভব নয়। সুতরাং সিদ্ধান্তটি কাজে প্রয়োগ করতে গিয়ে তিনি দেখবেন যে তাকে হয় সর্বোচ্চ 10টি রেডিও প্রস্তুত করতে হবে, নইলে তাঁকে উক্ত পরিকল্পনা পাল্টাতে হবে।

b) ব্যবস্থাপক এখন যদি দুটি অংকের একটি প্রতীক একটি রেডিওতে ব্যবহার করতে চান, তাহলে তিনি মোট কতটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতীক পাবেন?

এবার জবাবটি অত সোজা নয়। তাকে প্রতীক বেছে নিতে হবে

$$0, 1, 2, \ldots, 9$$

অংকগুলি থেকে। কোনো প্রতীকের প্রথমে 0 বসাতে তাঁর কোনো আপত্তি নেই। প্রতিটি প্রতীকের দুটি উপাদান আছে :

$$\boxed{১ম}\quad\boxed{২য়}$$

প্রথম উপাদানটি 0—9 এর মধ্য থেকে মোট 10 ভাবে নির্বাচন করা যেতে পারে। দ্বিতীয় উপাদানটির ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য, কারণ কোনো প্রতীকের উভয় উপাদান একই অংক হলে (যেমন 00, 11, 22, 33, . . .) কোনো আপত্তি নেই। এভাবে মোট :

$$10.10$$
$$= 100 \text{ টি}$$

প্রতীক পাওয়া যাবে।

c) ব্যবস্থাপক যদি সিদ্ধান্ত নেন যে তিনি প্রতিটি রেডিওতে তিনটি অংকের একটি প্রতীক ব্যবহার করবেন, তাহলে তিনি সর্বোচ্চ কতটি প্রতীক পেতে পারেন?

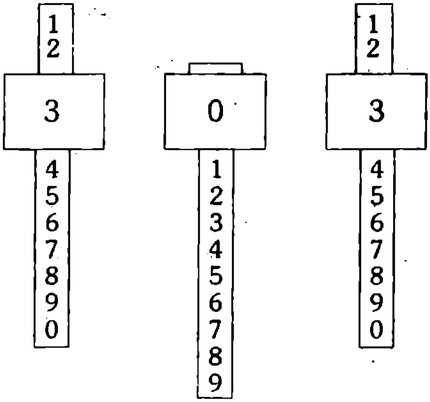
পূর্ববর্তী আলোচনা থেকে একথা স্পষ্ট যে এক্ষেত্রে উত্তর হবে :

$$\underset{\boxed{১ম}}{10} \;.\; \underset{\boxed{২য়}}{10} \;.\; \underset{\boxed{৩য়}}{10} \text{ টি} = 1000 \text{ টি}$$

এভাবে প্রতীকের উপাদান সংখ্যা যদি হয় 10, তাহলে মোট প্রতীক পাওয়া যাবে:

$$10.10.10.10.10 \ldots 10 \text{ বার}$$
$$= 10^{10} \text{ টি বা একশ কোটি।}$$

মনশ্চক্ষে দেখার সুবিধার জন্য তিন-উপাদানের প্রতীকের ব্যাপারটি নিচে ভিন্নভাবে দেখানো হলো :



উপরে আমরা 303 প্রতীকটি দেখতে পাচ্ছি। দেখা যাচ্ছে যে প্রথম উপাদানটি সংশ্লিষ্ট 0—9 সেটটি থেকে 10 ভাবে বেছে নেয়া যেতে পারে। বাকি উপাদানগুলির ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য এবং যেহেতু প্রতিটি 0—9 সেটে 10টি অংক আছে, সেহেতু উক্ত তিন-উপাদানের প্রতীকটিকে গঠন করা যাবে মোট

$$10 . 10 . 10 = 1000$$

উপায়ে। কিন্তু প্রশ্ন হলো, এখানে তিনটি উপায়-সংখ্যা *গুণাত্মক* কেন? এবং

$$10 + 10 + 10 = 30$$

দ্বারা সঠিক সমাধানটি পাওয়া যাচ্ছে না কেন? ভাবুন! এই মুহূর্তে এটি একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন।

এবার একটি ভিন্ন জাতের উদাহরণ।

2. 0 থেকে 9 পর্যন্ত অংকগুলি দশটি কার্ডে লিখে কার্ডগুলিকে একত্রে রেখে দেয়া হলো। তা থেকে তিনটি কার্ড টেনে সেগুলিকে পাশাপাশি সাজিয়ে তিন অংকের একটি প্রতীক তৈরি করতে হবে। এভাবে সর্বমোট কতটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতীক পাওয়া যাবে?
এবার চিন্তার মধ্যে একটি মৌলিক পরিবর্তন আনতে হবে। কারণ প্রশ্নটি উপরোক্ত 1(c) থেকে মৌলিকভাবে আলাদা। এখানেও তিনটি উপাদানের এককটি প্রতীক গঠন করতে হবে :

১ম ২য় ৩য়

প্রথম উপাদানের জন্য কার্ড টানা যাবে মোট 10 উপায়ে। আপনি 0 না টেনে 1, বা 1 না টেনে 2, বা 2 না টেনে 3, . . ., ইত্যাদি উপায় অবলম্বন করতে পারেন। ফলে প্রথম কার্ড টানার উপায় মোট 10টি। এই কার্ডটি টানার পর তাকে আলাদা জায়গায় রাখতে হবে, বাকিগুলির সাথে মিলানো চলবে না। তাহলে ২য় উপাদানটির জন্য মোট উপায় থাকবে 9টি। এটিকে টানার পর বাকি থাকবে 8টি কার্ড এবং ফলে ৩য় কার্ডটিকে টানা যাবে মোট 8 উপায়ে। তাহলে মোট উপায় কতটি?

আবারও লক্ষ্য করুন : মোট উপায়

$$10 + 9 + 8$$
$$= 27\text{টি}$$

নয়। অর্থাৎ এখানে গণনার নীতি *যোগবোধক নয়।* সঠিক উপায় হবে :

$$10 \,.\, 9 \,.\, 8 = 720\text{টি}।$$

কারণ কী?

এবার আমরা গণনার মৌলিক বিধিটিকে সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

গণনার মৌলিক বিধি
(Fundamental Counting Principle)

$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ যদি এমন কিছু ঘটনার একটি অনুক্রম হয় যে E_1 ঘটতে পারে m_1 উপায়ে, E_2 m_2 উপায়ে, . . ., E_n ঘটতে পারে m_n উপায়ে, তাহলে সম্পূর্ণ অনুক্রমটি (sequence) [অর্থাৎ $E_1E_2E_3 \ldots E_n$] ঘটতে পারে মোট

$$m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_n$$

উপায়ে।

পূর্ববর্তী উদাহরণগুলির ক্ষেত্রে এই বিধিটিকে নিজে নিজে আরেকবার প্রয়োগ করুন। এই প্রতীকগুলিকে ব্যবহার ক'রে পূর্ববর্তী উদাহরণগুলিকে আরেকবার হিসাব করা যাক।

1. b) এর সমাধান :

$$E_1 = 10 = m_1$$
$$E_2 = 10 = m_2$$
$$E_1E_2 = m_1 . m_2$$
$$= 10.10$$
$$= 100$$

1. c) এর সমাধান :

$$
\begin{aligned}
E_1 &= 10 = m_1\\
E_2 &= 10 = m_2\\
E_3 &= 10 = m_3\\
E_1E_2E_3 &= m_1.m_2.m_3\\
&= 10.10.10\\
&= 1000
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= 10 = m_1\\
E_2 &= 9 = m_2\\
E_3 &= 8 = m_3\\
E_1E_2E_3 &= m_1.m_2.m_3\\
&= 10.9.8\\
&= 720
\end{aligned}
$$

কিন্তু আবারও সেই প্রশ্নটি করা যাক :

$$E_1E_2E_3 \ldots E_n \neq m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$$

কেন? বারবার একই প্রশ্ন কেন করছি তা পরবর্তী কিছু উদাহরণকে সমাধান করার সময়ে হাড়ে হাড়ে বুঝা যাবে। সূত্রে মান বসিয়ে কোনো সমস্যার সমাধান করা আর তাকে স্পষ্টভাবে বুঝা এক কথা না-ও হতে পারে। গুণন এবং যোগের মধ্যে মৌলিক এবং গুণগত পার্থক্য আছে, কেবল পরিমাণগত নয়। যেমন :

$$5 + 5 + 5 = 15$$

আবার $3 \times 5 = 15$

কিন্তু, পাঠককে চমকে দিয়ে একথা বলতে হচ্ছে যে, বাস্তবতার বিচারে $5 + 5 + 5$ আর 3×5 এক না-ও হতে পারে! ফল এক হলেও প্রক্রিয়া ভিন্ন—একটি যোগ, অন্যটি গুণন। প্রক্রিয়ার এই ভিন্নতা সংখ্যার ধারণার সাথে *গুণগত* পরিবর্তন এনে দেয়। এমনকি এই সামান্য দুটি ঘটনাকে সূক্ষ্মভাবে বুঝতে পারলে কোনোরূপ বিজ্ঞানের পরিভাষা বা জটিল গণিতের সাহায্য না নিয়েও এই শতাব্দীর শ্রেষ্ঠতম তত্ত্ব, আইনিস্টাইনের আপেক্ষিকতাবাদের (Theory of Relativity—Specific এবং General) মূল চরিত্রকে নিজের উপায়ে ব্যাখ্যা করা যায় এবং মূল তত্ত্বের দিকে না তাকিয়েও কেবল তার

মাধ্যমে তাদের রহস্যজনক প্রতিপাদ্যগুলিকে উদ্ঘাটন করা যায়। সহজ আলোচনার মাধ্যমে এই প্রক্রিয়াকে *উদ্ভাবনী চিন্তার কাঠামো: বহির্জগৎকে আমরা যেভাবে জানি* বইটিতে দেখাবার চেষ্টা করেছি। অবশ্য বর্তমান প্রসঙ্গে গুণন এবং যোগের যে পার্থক্যের প্রসঙ্গে আমরা কথা বলছি, তার চরিত্র সেরূপ নয়, তবে তা বুঝার জন্য উক্ত ***দৃষ্টিভঙ্গির*** প্রয়োজন আছে বৈকি। আমরা বিন্যাস নিয়ে আলোচনা করার সময়ে বিষয়টিকে সহজে বিশ্লেষণ করব।

বিন্যাস : n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের একটি ক্রম-যুক্ত বা ক্রমিক (ordered) সজ্জাকে বিন্যাস বলে, যেখানে একটি উপাদান প্রথম, অন্যটি দ্বিতীয়, অন্য একটি তৃতীয়, . . ., ইত্যাদি অবস্থানে থাকে :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

উদাহরণ : S = {a, b, c} সেটটির উপাদানগুলিকে উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে বিভিন্ন কায়দায় সাজিয়ে আমরা কয়টি বিন্যাস বা permutation পাব?

দেখা যাক।

S_1 = a, b, c
S_2 = a, c, b
S_3 = b, a, c
S_4 = b, c, a
S_5 = c, a, b
S_6 = c, b, a

মোট 6টি বিন্যাস পাওয়া গেল। প্রদর্শিত উপায়গুলির বাইরে অন্য কোনো উপায়ে a, b, c উপাদান তিনটিকে সাজানো যেত না। ফলে S এর সম্ভাব্য সব ধরনের বিন্যাসের সংখ্যা হলো 6।

উপরের উদাহরণে S এর উপাদান যদি আর 7টি বাড়িয়ে দেয়া হয়, যার ফলে :

S = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}

তাহলে উপাদানগুলির বিন্যাস সংখ্যা কত হবে?

এই প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে পাঠক যদি উপাদানগুলিকে a–b–c উদাহরণের কায়দায় সাজাতে শুরু করেন, তাহলে বোকামি হবে। এখন বিন্যাস সংখ্যা হবে 36,28,800! অর্থাৎ ছত্রিশ লক্ষ আটাশ হাজার আট শ'!

তাহলে নিশ্চয়ই এরূপ হিসাব করার একটি সাধারণ সূত্র আছে। সূত্রটি আমরা এখন বের করব। আসলে অধ্যায়—৬ এর একেবারে শেষে একটি বিশেষ sequence হিসেবে আমরা সূত্রটিকে পেয়েছিলাম।

বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়

সবগুলি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন হলে n সংখ্যক জিনিসকে নিজেদের মধ্যে মোট কতবার সাজানো যায় তা নির্ণয় করা মানেই n সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা। একটু আগের S = {a, b, c} উদাহরণেও আমরা তা দেখেছি। কার্ডের উদাহরণে আমরা ***বেছে নেয়ার*** (choosing, making different choices) ধারণার সাথেও পরিচিত হয়েছিলাম। এর সাথে গণনার মৌলিক গুণনবিধি প্রয়োগ ক'রে আমরা n সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা সহজে নির্ণয় করতে পারি।

মোট বস্তুসংখ্যা [এখানে 'বস্তু' বলতে গাণিতিক বস্তু বা mathematical object-কে বুঝানো হচ্ছে, যা কোনো ভৌত বস্তুও হতে পারে] n হলে সেগুলি থেকে :

১ম বস্তুটি বেছে নেয়া যায় n উপায়ে; $\longrightarrow$ $(n - 1 + 1)$ উপায়ে

২য় বস্তুটি বেছে নেয়া যায় $(n-1)$ উপায়ে; $\longrightarrow$ $(n - 2 + 1)$ উপায়ে

৩য় বস্তুটি বেছে নেয়া যায় $(n-2)$ উপায়ে; $\longrightarrow$ $(n - 3 + 1)$ উপায়ে

৪র্থ বস্তুটি বেছে নেয়া যায় $(n-3)$ উপায়ে; $\longrightarrow$ $(n - 4 + 1)$ উপায়ে

. . . .

rতম বস্তুটি বেছে নেয়া যায় $(n - r + 1)$ উপায়ে

শেষতম বস্তুটি বেছে নেয়া যায় 1টি উপায়ে।

এভাবে আমরা পাচ্ছি একটি **sequence** যা n থেকে . . . 3, 2, 1 পর্যন্ত গিয়ে থেমে যাচ্ছে, এবং গণনার মৌলিক গুণনবিধি অনুসারে :

মোট বিন্যাস সংখ্যা = $n.(n-1) . (n-2) . (n-3) \dots (n-r+1) \dots 1$

এই গুণফলকে n! বা $\underline{|n}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, এবং পড়া হয় factorial of n :

$$\boxed{\mathbf{n! = n . (n-1) . (n-2) . (n-3) \dots 3.2.1}}$$

উদাহরণ : a, b, c, d, *e* অক্ষরগুলিকে মোট কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান : সরাসরি সাজিয়ে দেখা যাক :

a-কে প্রথমে রেখে—

(a, b, c, d)

(a, b, d, c)

(a, c, b, d)

(a, c, d, b)

(a, d, b, c)

(a, d, c, b)

b-কে প্রথমে রেখে—

(b, a, c, d)

(b, a, d, c)

(b, c, a, d)

(b, c, d, a)

(b, d, a, c)

(b, d, c, a)

c-কে প্রথমে রেখে—

(c, a, b, d)

(c, d, b, d)

(c, b, a, d)

(c, b, d, a)

(c, d, a, b)

(c, d, b, a)

d-কে প্রথমে রেখে—

(d, a, b, c)

(d, a, c, b)

(d, b, a, c)

(d, b, c, a)

(d, c, a, b)

(d, c, b, a)

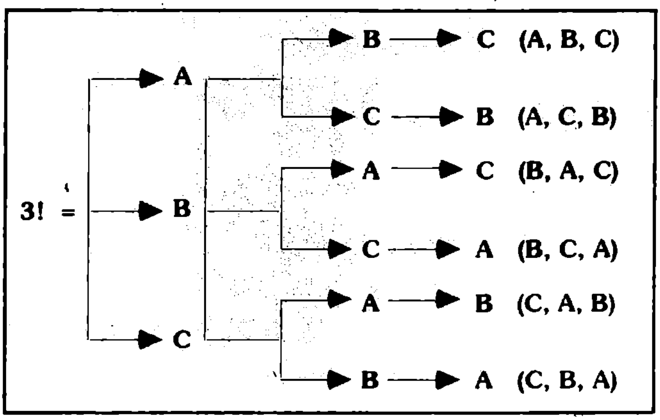
মোট 24টি উপায়। সূত্র প্রয়োগ ক'রেও একই ফল পাওয়া যায় :

$$
\begin{aligned}
& n! \\
&= 4! \\
&= 4.3.2.1 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

এবার সেই আগের ছোট প্রশ্নটি আবারও বিবেচনা করা যাক : A, B, C অক্ষর তিনটিকে মোট কতভাবে সাজানো যায়? সূত্রের মাধ্যমে :

$$
\begin{aligned}
& n! \\
&= 3! \\
&= 3.2.1 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

কিন্তু এবার আমরা tree-diagram এর মাধ্যমে বিন্যাসগুলিকে দেখব :



যে-কোনো tree-diagram এর বৈশিষ্ট্য হলো এই যে, তার যাবতীয় ডালপালার বিস্তার ঘটে ***একটিমাত্র*** বিন্দু থেকে, ঠিক যেন মূল থেকে উঠে আসা পুরা একটি গাছ, শাখা-প্রশাখা সহ। এরূপ একটি উৎসবিন্দু থেকে যদি ***প্রতি ক্ষেত্রে সমান-সংখ্যক*** শাখা উঠে আসে এবং ***প্রতিটি শাখা থেকে আবার সমান-সংখ্যক*** *উপশাখা বের হয়ে*

আসে, . . ., তাহলে উক্ত শাখার সংখ্যা প্রথম থেকে শেষ পর্যন্ত পরস্পরের সাথে **গুণাত্মক** সম্পর্ক বজায় রাখে। উপরোক্ত tree-diagram থেকেও এই বিষয়টি বুঝা যাচ্ছে। এখানে মূল বিন্দু 3টি : A, B, C। দ্বিতীয় ধাপে প্রতিটি বিন্দু থেকে 2টি ক'রে শাখা বের হয়েছে। এভাবে মোট 3টি বিন্দু থেকে শাখা বের হয়েছে

3.2
= 6টি।

৩য় ধাপে প্রতিটি শাখা থেকে একটি ক'রে উপশাখা বের হয়েছে। এভাবে মোট **সমাপনী** উপশাখার সংখ্যা

6.1
= 6টি।

এটিই হলো নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা। **এই tree-diagram-এর ধারাবাহিক শাখায়নের ধারণা দিয়ে বুঝা গেল কেন বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের কিংবা গণনার মৌলিক নীতির ক্ষেত্রে গুণনের প্রক্রিয়াটি প্রযোজ্য।**

সবগুলি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন নয় এমন n সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা

(Number of permutations of things not all different from one another)

এখন আমরা একটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র নির্মাণ করব। এতক্ষণ আমরা যে n সংখ্যক জিনিসের কথা বলেছিলাম, ধ'রে নিয়েছিলাম যে তাদের প্রতিটি অপরটি থেকে ভিন্ন। কিন্তু এমনও তো হতে পারে যে ঐ n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে n_1 সংখ্যক জিনিস আছে যেগুলি আসলে একই জিনিস। [যেমন a, b, b, b, c—এই 5টি উপাদানের মধ্যে 3টি উপাদান হলো একই জিনিস। ফলে এই b তিনটিকে নিজেদের মধ্যে যতভাবেই সাজানো হোক না কেন (!3 = 3.2.1 = 6 ভাবে), তা দ্বারা এরূপ ক্ষেত্রের মোট বিন্যাস সংখ্যা প্রভাবিত হবে না। সুতরাং 5টি জিনিসকে 5! উপায়ে সাজানো যায় বললে ভুল হবে।] সেক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যাকে $n!$ ব'লে ধ'রে নিলে একথাও খেয়াল রাখতে হবে যে তাদের মধ্যে $n_1!$ সংখ্যক বিন্যাস রয়েছে যাদের $(n_1! - 1)$ সংখ্যকই কোনো অর্থপূর্ণ ভিন্ন বিন্যাস নয়। [যেমন a, a, a—অক্ষর তিনটিকে পূর্বোক্ত a, b, c—উদাহরণটির অনুসরণে নিম্নলিখিত ছয়টি উপায়ে সাজানোর কোনো মানে হয় না :

a a a

a a a

a a a

a a a

a a a

a a a

আসলে এদের মধ্যে কেবল একটি বিন্যাসই অর্থপূর্ণ। বাকিগুলি তারই পুনরুক্তি।] তাহলে মোট বিন্যাস সংখ্যা, n!, থেকে প্রকৃত বিন্যাস-সংখ্যা, p, কে বের ক'রে নিতে হলে নিচের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হবে।

ধরি মোট বিন্যাস সংখ্যা = n!

পুনরুক্তিমুক্ত প্রকৃত বিন্যাস সংখ্যা = p

একই জিনিসের সংখ্যা = n_1

তাহলে, গণনার বিধি এবং বিন্যাস সংখ্যার সংজ্ঞা অনুসারে :

$$p = \frac{n!}{n_1!}$$

এভাবে n_2, n_3, n_4 . . . ইত্যাদি সংখ্যক জিনিস একেক রকমের হলে ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস-সংখ্যা (number of distinguishable permutations) হবে :

$$\boxed{p = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_k!}}$$

উদাহরণ : NINE শব্দটির অক্ষরগুলিকে মোট কতভাবে সাজানো যায়, প্রতিটি সজ্জা অর্থপূর্ণ হোক বা না হোক?

সমাধান : অক্ষর সংখ্যা মোট 4টি। সবগুলি অক্ষর ভিন্ন ভিন্ন হলে এদেরকে মোট 4! উপায়ে সাজানো যেত। কিন্তু এদের মধ্যে N আছে 2টি। ফলে প্রকৃত বিন্যাস সংখ্যা হবে নিম্নরূপ :

$$P = \frac{4!}{2!}$$

$$= \frac{4.3.2!}{2!}$$

$$= 12$$

ABCDE এর বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের উদাহরণটি অনুসরণ ক'রে পাঠক উপরের উদাহরণটিকে নিজেই যাচাই ক'রে দেখতে পারেন।

n সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস (The number of permutations of n elements taken r at a time)

আমরা এতক্ষণ দেখেছি n সংখ্যক জিনিস থেকে n সংখ্যক জিনিস নিয়ে কতভাবে বিন্যাস গঠন করা যায়, অর্থাৎ n সংখ্যক জিনিসকে তাদের নিজেদের মধ্যে কতভাবে সাজানো যায়। কিন্তু n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা কী হবে তা জানাও অত্যন্ত জরুরি।

প্রথম জিনিসটিকে n সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে n উপায়ে নির্বাচন করা যায়। এটিকে নেয়ার পর বাকি থাকে (n–1)টি জিনিস। এগুলি থেকে দ্বিতীয় জিনিসটিকে (n–1) উপায়ে নির্বাচন করা যায়, কারণ তাদের মধ্য থেকে একটিকে না নিয়ে অন্য যে-কোনোটিকে নেয়া যেত। তৃতীয় বস্তুটিকে বাকি (n–2) সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে (n–2) সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়। এভাবে একটি **sequence** (অধ্যায়—৬ দ্রঃ) পাওয়া যায় :

কত তম উপাদান	কত ভাবে নেয়া যায়
1	n
2	(n – 1)
3	(n – 2)
r	(n – r + 1)

অর্থাৎ rতম উপাদানকে n সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে (n – r + 1) সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়। ফলে, $r \le n$ হলে, n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে যতভাবে বিন্যাস গঠন করা যায় তা হলো :

$$nPr^{*} = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, (n-3) \,.\,.\,.\, (n-r+1)$$

* nPr এর বদলে ^nP_r এবং P(n, r) প্রতীক দুটিও ব্যবহৃত হয়।

কিন্তু n! বা nPn

$$= n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\,.\,.\,(n-r+1)\,.\,3.2.1$$

অর্থাৎ n! এর একটি অংশ হলো nPr, যা তা থেকে তুলে নিলে n!-এ বাকি থাকে (n–r) সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস বা nP(n–r)। ফলে :

$$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\,.\,.\,(n-p+1)\,.\,(n-r)\,.\,.\,.\,3.2.1$$

$$n! = [n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\,.\,.\,(n-r+1)]\,.\,[(n-r)\,.\,(n-r-1)\,.\,(n-r-2)\,.\,(n-r-3)\,.\,.\,.\,3.2.1]$$

$$n! = nPr\,.\,nPn-r$$

$$nPr = \frac{n!}{nPn-r}$$

বা, $\boxed{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}}$

NOTE : n = r হলে—

$$nPn = n! = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$n! = \frac{n!}{0!}$$

তাহলে কি 0! = 0 হবে? না। কারণ এখানে 0! এর মান 0 হলে n! এর মান সংজ্ঞায়িত হয় না—যেহেতু কোনো ভগ্নাংশের হরের শূন্য মানের জন্য ভগ্নাংশটি সংজ্ঞায়িত নয়। ফলে 0! = 1।

এবং 1! = 1।

উদাহরণ : 6 জন বালক দৌড় প্রতিযোগিতায় অংশ নিয়েছে। তারা ১ম, ২য়, ৩য় পুরস্কার তিনটি কতভাবে জিততে পারে?

সমাধান :

১ম পুরস্কার নিতে পারে 6 জনের যে-কোনো একজন।

২য় পুরস্কার নিতে পারে বাকি 5 জনের যে-কোনো একজন।

৩য় পুরস্কার নিতে পারে বাকি 4 জনের যে-কোনো একজন।

অর্থাৎ $_6P_3 = 6.5.4$

$= 120$ উপায়ে।

সূত্রের মাধ্যমে : $_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!}$

$= \frac{6!}{3!}$

$= \frac{6.5.4.3!}{3!}$

$= 120$ উপায়ে।

সমাবেশ (Combination)

সমাবেশও বিন্যাসের মতো একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ধারণা। এর ভিত্তিমূলে রয়েছে বিন্যাসের ধারণা। তবে, অভিজ্ঞতা থেকে দেখা গেছে, অনেক শিক্ষার্থী বিন্যাসের ধারণার সাথে এই ধারণাটিকে তালগোল পাকিয়ে ফ্যালে, এবং বিশেষত কোনো প্রশ্নের সমাধান করতে গিয়ে বিন্যাসের নাকি সমাবেশের সূত্র প্রয়োগ করতে হবে তা ঠিক ক'রে উঠতে পারে না। আমরা এই দ্বিধাদ্বন্দ্বের সম্ভাবনাকে স্পষ্টভাবে তাড়িয়ে দিতে চেষ্টা করব।

সমাবেশ হলো n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রতি বারে m সংখ্যক ক'রে জিনিস নিয়ে দল গঠন করার মোট উপায়সমূহ। যেমন, ABCDE—এই পাঁচটি অক্ষর থেকে প্রতি বারে তিনটি ক'রে অক্ষর নিয়ে মোট কতটি 3 সদস্যের দল গঠন করা যাবে? উদাহরণটি বুঝতে আরো সুবিধা হবে যদি আমরা অক্ষর পাঁচটি দ্বারা পাঁচ জন ব্যক্তিকে বুঝাই এবং তাদের মধ্য থেকে তিন জন ক'রে নিয়ে একেকটি ভিন্ন কমিটি গঠন করার কথা ভাবি।

প্রথমে আন্দাজে যে-কোনো একটি দল নেয়া যাক : ABC। এই দলের বা বিন্যাসের ব্যক্তি তিনজনকে আবার 3! = 6 উপায়ে সাজানো যায়, যেমন ABC, BAC, CAB . . .। এগুলি A, B, C এর ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস, কিন্তু এগুলির প্রতিটি দ্বারা একই দলকে বুঝানো হচ্ছে : বাবু-নিতি-শম্পাকে নিয়ে যে কমিটি, শম্পা-বাবু-নিতিকে নিয়েও সেই কমিটি, বাবু-শম্পা-নিতিকে নিয়েও সেই একই কমিটি। সমাবেশ কেবল এই সার্বিক অর্থে দল বা কমিটিকে নির্দেশ করে, যে কারণে এতে কোনো দলের (বা উপসেটের) সদস্যগুলির উপাদানগুলির ক্রমকে গণনা করা হয় না।

এদিকে আমরা আগেই দেখেছি যে n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা, nPr, এর মান হলো :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

অন্য কথায় সেট nPr এর মধ্যে $\frac{n!}{(n-r)!}$ সংখ্যক উপসেট আছে, যাদের প্রতিটি (উপসেটের) উপাদান সংখ্যা হলো r। এই r সংখ্যক উপাদানকে আবার নিজেদের মধ্যে r! সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় (যেমন : r=3 হলে, abc → acb → bca...)। এই সংখ্যাগুলি $\frac{n!}{(n-r)!}$ এর মধ্যে গুণন করা আছে, কারণ nPr বিন্যাস এবং বিন্যাসে উপাদানগুলির ক্রমকেও গণনা করা হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে nPr এর মানকে আবার r! দ্বারা ভাগ করতে হবে। ফলে :

$$\boxed{nCr^{*} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

উদাহরণ : একটি কমিটিতে 9 জন সদস্য আছে। তা থেকে 5 জনের একটি উপ-কমিটি গঠন করার জন্য উক্ত 9 জন থেকে কত উপায়ে সদস্য বেছে নেয়া যাবে?

সমাধান : 5 জনের একটি কমিটি গঠন করা যাবে nCr উপায়ে।

$$nCr = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$_9C_5 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!}$$

$$= \frac{9!}{5!\,4!}$$

$$= \frac{9.8.7.6.5!}{5!.4.3.2.1}$$

$$= \frac{9.8.7.6}{4.6.1}$$

$$= 126$$

* এক্ষেত্রেও nCr, C(n, r), বা $\binom{n}{r}$ প্রতীকও ব্যবহৃত হয়।

বিন্যাস এবং সমাবেশ বনাম ফাংশান

(Permutations and Combinations versus Functions)

এতক্ষণ আমরা সহজ ভাষায় বিন্যাস এবং সমাবেশের ধারণা ব্যাখ্যা করেছি। এই ধারণা দুটি সম্বন্ধে আমাদের ধারণা আরো স্পষ্ট হবে যদি অধ্যায়—৫-এর আলোচনার ধারাবাহিকতায় ফেলে আমরা একথা বুঝতে পারি যে এগুলি হলো দুই ধরনের ফাংশান। আবার সেই a–b–c উদাহরণ দ্বারা শুরু করা যাক। a, b, c এর বিন্যাস হলো এমন একটি ফাংশন, f (a, b, c), যা সেট 5 = {a, b, c} এর একটি উপাদানকে ঐ সেটেরই একটি উপাদানের সাথে সম্পৃক্ত করে। যেমন :

$$s = (a, b, c) \text{ এর একটি বিন্যাস :}$$

$$s_1 = (a, c, b)$$

যাকে f এর দ্বারা এভাবে বুঝা যায় :

$$f : s \rightarrow s_1$$

$$f(a) = a$$

$$f(b) = c$$

$$f(c) = b$$

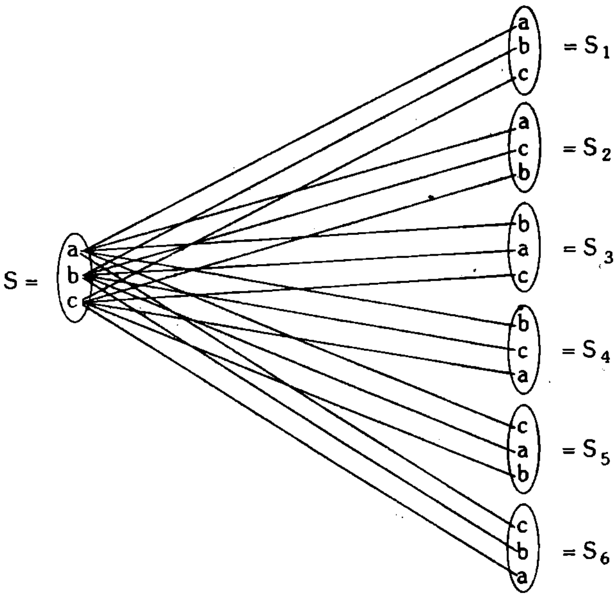
ফাংশানটি one-one এবং onto ব'লে এবং $a, b, c \in s$ হলে $f(a), f(b), f(c) \in s_1$ ব'লে $f : s \rightarrow s_1$ হলো একটি বিন্যাস।

$$\begin{array}{ccccc} s & & a, & b, & c \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ s_1 & : & a, & c, & b \end{array}$$

অন্যান্য বিন্যাসগুলিকেও এক সাথে নিচের চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায়।

চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে $s_1, s_1, s_3 \ldots$ ইত্যাদি বিন্যাস সেটে একটি উপাদান একের অধিক বার নেই। আবার $s = s_1 = s_2 = s_3 \ldots = s_6$। শুধু উপাদানগুলির ক্রম (order) আলাদা ব'লে সেটগুলি ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস হিসেবে পরিগণিত হয়েছে। এখানে a, b, c এর রূপান্তরগুলি (transformations) আবদ্ধ (closed), যা নিচের চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

চিত্র থেকে একটি মজার জিনিস দেখা যেতে পারে। তা হলো, s এর সাথে $s_1, s_2 \ldots$ ইত্যাদি কোনো একটি সেটের কমপক্ষে দুটি উপাদানের মধ্যে বৃত্তীয় (cyclic)



সম্পর্ক আছে। যেমন, নিচের বিন্যাসটিতে, s এর a এর সাথে s_2 এর a এর সম্পর্ক রয়েছে, s এর b এর সাথে s_2 এর c এর সাথে সম্পর্ক রয়েছে, এবং s এর c এর

$$
\begin{array}{ccc}
(a, & b, & c) = s \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
(a, & c, & b) = s_2
\end{array}
$$

সাথে সম্পর্ক রয়েছে s_2 এর b এর। ফলে f এর ক্রিয়া b থেকে শুরু করলে আমরা b, c উপাদান দুটির বাইরে বের হতে পারব না :

$$f(b) = c$$
$$f(c) = b$$
$$f(b) = c$$
$$\dots \quad \dots$$

Composite function এর মাধ্যমে :

$$f(b) = c$$
$$f(c) = b$$
$$\therefore \ f(f(c)) = c$$

$$\text{বা} \quad f \bullet f\,(c) = c$$

$$\text{কিংবা} \quad f \bullet f \bullet f\,(c) = b$$

$$\text{কিংবা} \quad f \bullet f \bullet f \bullet f\,(c) = c$$

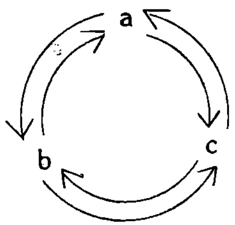
বাইরে যাবার উপায় নেই। আরো কয়েকটি বিন্যাসকে s এর সাথে সম্পৃক্ত ক'রে দেখা যেতে পারে :

$$\left.\begin{array}{l} (a, \quad b, \quad c) = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (a, \quad b, \quad c) = S_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f\,(a) = a \\ f\,(b) = b \\ f\,(c) = c \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a, \text{—} b, \text{—} c) = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (b, \text{—} a, \text{—} c) = S_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f\,(a) = b \\ f\,(b) = a \\ f\,(c) = c \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a, \text{—} b, \text{—} c) = S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (b, \text{—} c, \text{—} a) = S_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f\,(a) = b \\ f\,(b) = c \\ f\,(c) = a \end{array}$$

শেষোক্ত ফাংশানটি পুরোপুরি বৃত্তীয়। নিচের চিত্র দেখুন।



এর যে-কোনো অক্ষর থেকে শুরু ক'রে যে-কোনো তীর চিহ্ন বরাবর মোট তিনটি ধাপ গেলে যে-সব বিন্যাস পাওয়া যায় সেগুলি হলো S = {a, b, c} এর যাবতীয় সমাবেশ, আমাদের এতক্ষণের আলোচনার বিষয়বস্তু।

এবার প্রসঙ্গক্রমে আমরা কয়েকটি ধারণার সাথে পরিচিত হতে পারি। $U = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ হলে পূর্বোক্ত উদাহরণে, $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \subseteq U$। এবং S_1 এবং S_2 বা S_2 এবং S_3 বা S_3 এবং S_4 . . . এর একটির যে-কোনো উপাদানকে অন্যটির যে-কোনো উপাদানের সাথে যুক্ত করা হোক না কেন, উক্ত সম্পর্ক U তে আছে।

nPr এর সেটকে NPR

nPn এর সেটকে NPN

nCr এর সেটকে NCR

দ্বারা নির্দেশ করা হলে :

$$\text{NPR} \subset \text{NPN}$$

$r < n$ হলে—

$$\text{NPR} \subseteq \text{NPN}$$

$$\text{NCR} \subseteq \text{NPN}$$

$$\text{NCR} \subseteq \text{NPR}$$

FOOD FOR THOUGHT

গাণিতিকভাবে এবং যুক্তির মাধ্যমে (দুই উপায়ে) প্রমাণ করুন যে $nCn = 1$।

উদাহরণমালা :

1. একটি সারিতে 4টি লাল এবং 3টি সাদা পিংপং বলকে কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান : বলের মোট সংখ্যা = 4 + 3 = 7। উক্ত কায়দায় 7টি বলকে সাজানো যায় 7! উপায়ে। কিন্তু 4টি লাল বলকে এবং 3টি সাদা বলকে নিজেদের মধ্যে নোতুন ক'রে সাজিয়ে কোনো নোতুন বিন্যাস পাওয়া যাবে না। ফলে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা :

$$P(7;\,4,\,3) = \frac{7!}{4!\,3!}$$

$$= \frac{7.6.5.4!}{4!.3.2.1}$$

$$= \frac{7.6.5}{6.1}$$

$$= 35$$

2. CHANDRAGHONA শব্দটির অক্ষরগুলিকে আলাদা আলাদা কয়টি উপায়ে সাজানো যায়?

সমাধান :

এখানে H আছে 2 বার

A আছে 3 বার

N আছে 2 বার

মোট অক্ষর 12টি

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা, $P_{(12;\ 2,\ 3,\ 2)}$ এর মান হবে নিম্নরূপ।

$$P_{(12;\ 2,\ 3,\ 2)} = \frac{12!}{2!\ 3!\ 2!}$$

$$= \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.2.3!}$$

$$= \frac{19958400.4}{4}$$

$$= 1,99,58,400$$

উত্তর : 1,99,58,400 উপায়ে।

গণিতে প্রমাণের পদ্ধতি হিসাবে গাণিতিক আরোহ (Mathematical Induction as a Method of Proof in Mathematics)

যে-কোনো তত্ত্বের, মতামতের, ধারণার বা সিদ্ধান্তের নির্ভরযোগ্যতার প্রথম ভিত্তি হলো **প্রমাণ**। প্রমাণ ছাড়া বিজ্ঞান চলে না—হোক সে প্রমাণ পুরোপুরি বিশুদ্ধ কিংবা যাচাই ধর্মী। প্রমাণ ছাড়া গণিতের কাছে কিছুই গ্রহণযোগ্য নয়। উদাহরণস্বরূপ ফার্মার (Pierre de Fermat, 1601—1665, ফরাসী গণিতবিদ) শেষ উপপাদ্যের কথা বলা যেতে পারে। সেই গ্রীক সভ্যতার যুগে পীথাগোরাস এবং তাঁর অনুসারীরা জানতেন যে কোনো দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফলকে তৃতীয় একটি সংখ্যার বর্গ হিসেবে প্রকাশ করা যায়। অন্যভাবে বলতে গেলে, কিছু বাস্তব বর্গসংখ্যার প্রত্যেকটিকে অন্য দুটি বাস্তব বর্গসংখ্যার যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। যেমন :

$$1^2 + 2^2 = 5^2$$

বিষয়টিকে এভাবেও বলা যায় যে :

$$a^n + b^n = c^n$$

সমীকরণে $n \leq 2$ হলে (অর্থাৎ $n = 0, 1, 2$ হলে) সমীকরণটির সমাধান আছে। তিনটি বর্গসংখ্যার মধ্যে এই সম্পর্ক পিথাগোরাস আবিষ্কার এবং প্রমাণ করেছিলেন জ্যামিতিক উপায়ে। ($n = 2$ হলে এ সম্পর্কে যে বীজগণিতীয় প্রমাণ দেয়া যায়, তা এখানে উপস্থাপন করা হলো না। শুধু এই মুহূর্তে এটুকু জানাই যথেষ্ট যে এর প্রমাণ আছে।) ফার্মার একটি বিশেষ স্বভাব ছিল এই যে, কোনো বই বড়তে পড়তে তার মাথায় সংশ্লিষ্ট বিষয়ে বা অন্য কোনো বিষয়ে কোনো চিন্তা এলে তা তিনি সংক্ষেপে বইয়ের মার্জিনে লিখে রাখতেন। একদিন একটি গণিতের পাঠ্যবই পড়ার সময়ে তার মার্জিনে তিনি লিখে রেখেছিলেন যে $a^n + b^n = c^n$ সমীকরণে n এর মান 3 বা বেশি হলে সমীকরণটির কোনো সমাধান নেই—অর্থাৎ কোনো একটি ঘন সংখ্যাকে অন্য দুটি ঘন সংখ্যার সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করা যায় না, যে কথা উচ্চতর ঘাতের ক্ষেত্রেও সত্য। তিনি আরো লিখেছিলেন যে

মার্জিনে পর্যাপ্ত জায়গা থাকলে তিনি প্রমাণটি লিখতে পারতেন। তারপর 300 বছর ধ'রে সারা বিশ্বের সবচেয়ে বড় বড় গাণিতিক মেধা উপপাদ্যটিকে প্রমাণ করার জন্য গলদঘর্ম সাধনা করেছেন। এ ব্যাপারে পুরস্কারও ঘোষণা করা হয়েছে বড় অঙ্কের। বিংশ শতাব্দীর একজন বিখ্যাত গণিতবিদ, বিশ্ববিখ্যাত গণিতবিদ David Hilbert (1862—1943) এর সাহায্যকারী, এবং জার্মানের গটিংজেন এবং আমেরিকার নিউইয়র্কে একটি এবং দুটি ক'রে মোট তিনটি স্বনামধন্য গণিতের প্রতিষ্ঠানের প্রতিষ্ঠাতা, রিচার্ড কুরান্ট (1888—1972), তাঁর সুখপাঠ্য বই *What is Mathematics?*-এ এ বিষয়ে সুন্দর মন্তব্য করেছেন :

"ফার্মার এই সাধারণ বিবৃতিটি (general statement) কখনও সত্য বা মিথ্যা ব'লে প্রমাণিত হয়নি, যদিও তাঁর সময়ের পর থেকে সবচেয়ে শক্তিধর গণিতবিদগণই এ ব্যাপারে অনেক সাধনা করেছেন। অবশ্য উপপাদ্যটি অনেক সংখ্যার ক্ষেত্রেই সত্য প্রমাণিত হয়েছে, বিশেষত $n < 619$ পর্যন্ত মানের ক্ষেত্রে, কিন্তু n এর সকল মানের ক্ষেত্রে তা প্রমাণিত হয়নি—অথচ এমন কোনো বিপরীত উদাহরণও দেখানো যায়নি যা ফার্মার উপপাদ্যটিকে অপ্রমাণ ক'রে দেবে। যদিও উপপাদ্যটি গাণিতিকভাবে খুব গুরুত্বপূর্ণ নয়, তবুও এটিকে প্রমাণ করতে গিয়ে সংখ্যাতত্ত্বের অনেক গুরুত্বপূর্ণ তথ্য বের হয়ে এসেছে। সমস্যাটি অগণিতবিদ মহলেও বেশ সাড়া জাগিয়েছে, কেননা গটিংজেনের Royal Academy-তে যে-ব্যক্তি প্রথমে সঠিক একটি প্রমাণ জমা দিতে পারবেন তার জন্য 100,000 মার্কের (Mark) একটি পুরস্কার ঘোষণা করা হয়েছিল। জার্মানের যুদ্ধোত্তর মুদ্রাস্ফীতি উক্ত অর্থের মূল্যকে পানির দরে সস্তা ক'রে দেয়ার আগ পর্যন্ত প্রতি বছর বহু সংখ্যক অশুদ্ধ 'সমাধান' প্রতিষ্ঠানে জমা পড়ত। এমনকি প্রকৃত গণিতবিদেরাও এমন সব প্রমাণ জমা দিয়েছেন যাদের ওপর প্রথমবার চোখ বুলালেই সেগুলির ফাক-ফোকর ধরা পড়ে যেত। মার্কের সেই অবমূল্যায়নের পর থেকে বিষয়টির প্রতি গণহারে আগ্রহ দেখানো ক'মে গেছে ব'লে মনে হয়, যদিও মাঝে-মধ্যে এমনটি শোনা যায় যে সমস্যাটিকে অপরিচিত নোতুন এক জিনিয়াস সমাধান ক'রে ফেলেছেন।"

কুরান্টের কথা থেকে বুঝা যায় ফার্মার উপপাদ্যটি নিয়ে কেমন তোড়জোড় হয়েছিল। অবশেষে ১৯৯৩ সালে আমেরিকার প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ের Andrew Wiles একটি প্রমাণ পেয়েছেন ব'লে ঘোষণা করলেন। তাঁর প্রথম প্রমাণটি ছিল অপরিণত, তবে তিনি আরো সাধনা ক'রে ১৯৯৪ সালে আরেকটি পরিমার্জিত প্রমাণ উপস্থাপন করেন, যা সঠিক

ব'লে গৃহীত হয়েছে। তাঁর প্রমাণটি অবশ্য অনেক গণিতের ছাত্রের কাছেও রীতিমতো দুর্বোধ্য। উপপাদ্যটিকে অন্যভাবেও প্রমাণ করা যায় কি না তা নিয়েও অনেকে মাথা ঘামাচ্ছেন ব'লে জানা যায়।*

আমরা উপরোক্ত গল্পের যে-বিষয়টির প্রতি নজর দিব তা হলো এই যে, প্রমাণ ছাড়া কোনো কিছুই গণিতের কাছে গ্রহণযোগ্য নয়। চোখ বুজে যে-কোনো সংখ্যা নিয়েও যদি দেখা যায় যে ফার্মার কথার কোনো বরখেলাপ হচ্ছে না, তবুও একথা বলা *গাণিতিকভাবে* বৈধ নয় যে ফার্মার উপপাদ্যটি সঠিক। কারণ, এমনও তো হতে পারে যে কয়েক বিলিয়ন সংখ্যার পরবর্তী কোনো তিনটি সংখ্যা $a^3 + b^3 = c^3$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

গণিতের আরেকটি অমীমাংসিত প্রতিপাদ্য হলো এই যে, যে-কোনো জোড় সংখ্যাকে (2 বাদে, কারণ 2 নিজেই মৌলিক) দুটি মৌলিক সংখ্যার (prime number) যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। প্রস্তাবনাটি Goldbach conjecture নামে পরিচিত (Goldbach, 1690—1764, যিনি গণিতে কেবল এই অবদানটিই রেখেছেন)। কিছু—কিংবা অনেক সংখ্যক—উদাহরণ নিয়ে প্রস্তাবনাটির সত্যতা যাচাই করা যেতে পারে, কিন্তু আজও পর্যন্ত এটি *গাণিতিকভাবে* সত্য বা মিথ্যা প্রমাণিত হয়নি। এটিকে—এবং যেকোনো গাণিতিক প্রস্তাবনাকে—মিথ্যা প্রমাণ করতে হলে তার বিপক্ষে একটিমাত্র দৃষ্টান্ত দেয়াই (আপাতত) যথেষ্ট। কিন্তু তাকে সত্য প্রমাণ করতে হলে তখন আর উদাহরণে কাজ হয়না। সে কাজে অবশ্য উদাহরণ থেকে তথ্য আহরণ করা যায়, কিন্তু প্রমাণের প্রসঙ্গ যেখানে আসবে, সেখানে একটি *সাধারণীকৃত* (generalized) যৌক্তিক-কাঠামোর আবশ্যিকতাও প্রাসঙ্গিক হয়ে পড়বে। গোল্ডবাখের প্রস্তাবনাকে কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে যাচাই করা যাক।

---

* Fermat's last theorem সম্বন্ধে প্রাথমিক পর্যায়ের সহজবোধ্য আলোচনা করা এখানে সম্ভব নয়। এই লেখকের মতে, উপপাদ্যটির ব্যাপারে অনুসন্ধান করা একটি সত্যিই গুরুত্বপূর্ণ ব্যাপার, যদিও কুরান্ট সেরূপ ভাবেননি। সমীকরণটির কেন সমাধান নেই তা নোতুন পদ্ধতির আলোকে জানতে পারলে তা থেকে গাণিতিক বাস্তবতার বিস্ময়কর কিছু তথ্য বের হয়ে আসবে। গণিতে বিশেষ ধরনের প্যাটার্নের উপস্থিতির কারণে তাতে কিছু সমস্যার সমাধান আছে এবং কিছু সমস্যার সমাধান নেই। ফলে মানবীয় যাবতীয় যৌক্তিক জ্ঞান এবং পরিমাপ উক্ত প্যাটার্নগুলির মধ্যে সীমিত থাকতে বাধ্য। আবার গণিতের নিজস্ব প্যাটার্নের সাথে বাস্তবতার বিভিন্ন বিষয়ের আন্তঃসম্পর্কের বিভিন্ন প্যাটার্নের মিল আছে কি না, থাকলে তা কতখানি এবং তা আবশ্যিক কিনা, তা জানতে পারলে শুধু চিন্তার মাধ্যমেই ব্রহ্মাণ্ড রহস্যের জটাজাল ছিন্ন করা যেতে পারে। দেখুন *চিন্তার উপাদান* এবং *গাণিতিক কাঠামো বনাম চিন্তার কাঠামো*।

জোড় সংখ্যা	=	মৌলিক	+	মৌলিক
4	=	2	+	2
6	=	3	+	3
8	=	5	+	3
10	=	5	+	5
18	=	11	+	7
100	=	47	+	53

সংখ্যাতত্ত্বে আরেকটি পর্যবেক্ষণ অত্যন্ত সম্ভাবনাময় : P একটি মৌলিক সংখ্যা হলে P এর অনেক মানের জন্য P + 2 পাওয়া যাবে যা আরেকটি মৌলিক সংখ্যা। অন্য কথায়, অনেক মৌলিক সংখ্যা আছে যাদের প্রত্যেকটির সাথে 2 যোগ করলে যোগফল হয় আরেকটি মৌলিক সংখ্যা। যেমন :

$3 + 2 = 5$

$5 + 2 = 7$

$7 + 2 = 9$ [মৌলিক নয়]

$9 + 2 = 11$

$11 + 2 = 13$

$13 + 2 = 15$ [মৌলিক নয়]

$15 + 2 = 17$

$17 + 2 = 19$

ইত্যাদি। এরূপ মৌলিক যুগল অসংখ্য আছে কিনা তা এখনও গাণিতিকভাবে প্রমাণিত হয়নি।

এই অধ্যায়ের মূল আলোচনায় যাবার আগে আমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রমাণের সাধারণ রূপটি একবার দেখে নেই।

$$a^2 + b^2 = c^2$$

পিথাগোরীয় সংখ্যাত্রয়ী হবে a, b, এবং c। আমরা আগে দেখেছি যে চেষ্টা-ভুলের পথ ধ'রে এমন ত্রয়ী-সংখ্যা পাওয়া যায় যা উপরোক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। যেমন :

$$(3, 4, 5)$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

কিন্তু এরূপ অসংখ্য ত্রয়ী (number tripple) বের করার সাধারণ সূত্র আছে :

$$a = v^2 - u^2$$
$$b = 2uv$$
$$c = u^2 + v^2$$

যেখানে $v > u$, u এবং v এর উভয়ে বিজোড় নয় এবং তাদের গ. সা. গু 1, এবং u এবং v হলো যোগবোধক সংখ্যা। এই শর্তের মধ্যে থেকে সংখ্যা নির্বাচন করলে (a, b, c) এর অসংখ্য সেট পাওয়া যাবে। একটু যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$v = 2$, $u = 1$ | u, v এর গ. সা. গু. 1

$$a = v^2 - u^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$
$$b = 2uv = 2.1.2 = 4$$
$$c = u^2 + v^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

এভাবে : $v = 3, u = 2 : (5, 12, 13)$; $v = 4, u = 3 : (7, 24, 25)$;
$v = 10, u = 7 : (51, 140, 149)$; ইত্যাদি।

a, b, c এর মান বের করার জন্য এরূপ u এবং v এর সাধারণ (general) আন্তঃসম্পর্কের (অর্থাৎ সমীকরণের) অস্তিত্ব একথা প্রমাণ করে যে (a, b, c) এর সেট অসংখ্য। কিন্তু $a^3 + b^3 = c^3$ সমীকরণের (a, b, c) এর মান বের করার জন্য এরূপ কোনো সাধারণ সূত্র নেই, যেহেতু এই শর্ত পূরণকারী (a, b, c) ত্রয়ীরই অস্তিত্ব নেই। কিন্তু *এমন কোনো সাধারণ সূত্র যে নেই* তা প্রমাণ করতে হবে কোন সূত্রের সাহায্যে? এরূপ একটি প্রমাণই হবে সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রে উদ্দিষ্ট গাণিতিক প্রমাণ। এরূপ একটি প্রমাণ খুঁজে পেতেই গোটা বিশ্বের 300 বছর কেটে গেছে।

কিন্তু সব গাণিতিক প্রস্তাবনার প্রমাণের পদ্ধতি যে একই রকম হবে এমন কোনো কথা নেই। একেক ধরনের সমস্যার ক্ষেত্রে প্রমাণ একেক ধরনের হতে পারে। আবার একটি প্রস্তাবনার জন্য একাধিক প্রমাণও থাকতে পারে। এ ধরনের যাবতীয় বা অনেকগুলি প্রমাণ নিয়ে আলোচনা করার স্থান এই বইতে নেই।* এখানে আমরা একটিমাত্র পদ্ধতি

* শুধু গণিত কেন, জ্ঞানের একেক শাখায় সংশ্লিষ্ট প্রস্তাবনারে প্রমাণ করার জন্য বিচিত্র ধরনের পদ্ধতি ব্যবহৃত হতে পারে। বিস্তারিত জানার জন্য দেখুন *চিন্তার উপাদান*।

নিয়ে আলোচনা করব যার নাম *গাণিতিক আরোহ* পদ্ধতি বা method of mathematical induction। যদিও লজিকে induction শব্দটি ব্যাপকতর অর্থে ব্যবহৃত হয়, তবুও আমরা এখানে শুধু mathematical induction ব'লে কী বুঝায় তা দেখব।

যে-কারণে কান টানলে মাথা আসে, সেই কারণে mathematical induction কার্যকর ব'লে স্বীকৃত হয়। কানের সাথে মাথা (এবং মাথার সাথে কান) লাগানো থাকে ব'লে কান টানলে মাথা আসে। কানের ওপর যে 'টান' প্রয়োগ করা হলো, তা মাথায়ও পৌঁছে গেল। গাছের গোড়া কাটলে আগা একা বেঁচে থাকতে পারে না। ছেলে বিপদে পড়েছে দেখলে বাবা ছুটে আসবে, আসবে দাদা, দাদার বাবা (অতদিন বেঁচে থাকার সম্ভাবনা কম) . . .। কোনো জাতির অর্থনীতি ধ্বংস করতে পারলে তার কালচারও ধ্বংস হয়ে যাবে—কারণ যে-ক'টি সামাজিক ক্রিয়াকাণ্ডের ধাপ এই দুয়ের মাঝে যোগসূত্র স্থাপন ক'রে থাকে, তাদের প্রতিটি একের পর এক ক্ষতিগ্রস্ত হবে। এক লোকের আয়ের একমাত্র উৎস হলো তার পুকুরটি, যাতে সে মাছ চাষ করে। যে-মাছগুলি থেকে সে পয়সা পায়, তারা কিছু ছোট মাছ খেয়ে বেঁচে থাকে। ছোট মাছগুলির বৃদ্ধিহার আশাব্যঞ্জক, তবে তারা আবার পুকুরটির শ্যাওলা খেয়ে বাঁচে। এই শ্যাওলার বংশবৃদ্ধি ঘটে একমাত্র সূর্যের আলোর সাহায্যে (ধরা যাক)। তাহলে লোকটিকে ভিক্ষুক বানাবার জন্য কিছু করতে হবে না, শুধু তার বসতবাড়িটিকে বা পুকুরটিকে সূর্যের আলো থেকে বঞ্চিত করতে হবে (যদিও কাজটি সহজ নয়!)। এক্ষেত্রে তার শ্যাওলার ওপর আনীত বিরূপ প্রভাব ধাপে ধাপে সঞ্চালিত হয়ে তার আয়ের ওপর গিয়ে পড়ছে।

কোনো একটি (অসীম) সেটের উপাদানগুলি যদি এমন হয় যে তাদের মধ্যে

1) একটি ক্রম (order) থাকে, এবং

2) তাদের যে-কোনো একটির ক্ষেত্রে কোনো কথা সত্য হলে তার **ঠিক পরবর্তী উপাদানটির ক্ষেত্রেও** তা সত্য হবে।

তাহলে উক্ত সেটের কোনো একটি বৈশিষ্ট্যকে প্রমাণ করার জন্য গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়। পদ্ধতিটির দায়িত্ব হবে শুধু এটুকু দেখানো যে বৈশিষ্ট্যটি সেটটির *যে-কোনো* উপাদানের জন্য সত্য হলে তার *ঠিক পরবর্তী* উপাদানের জন্যও সত্য হবে। কেননা, কোনো প্রস্তাবনা সেটটির nতম উপাদানের জন্য সত্য হলে তা তার (n + 1)তম

উপাদানের জন্যও সত্য হবে। একই যুক্তি অনুসারে প্রস্তাবনাটি তার (n + 1 + 1) তম উপাদানের ক্ষেত্রেও সত্য হবে। এভাবে প্রস্তাবনাটি সেটটির প্রতিটি (অর্থাৎ সবগুলি) উপাদানের ক্ষেত্রেই সত্য ব'লে প্রমাণিত হবে।

Mathematical induction স্বাভাবিক সংখ্যার বৈশিষ্ট্যের ওপর নির্ভরশীল। পদ্ধতিটিকে নিম্নরূপ ভাষায় বর্ণনা করা যায়।

গাণিতিক আরোহ : যদি এটি দেখানো যায় যে,

a) $n = n_1$ হলে প্রস্তাবনা $S(n_1)$ সত্য, এবং

b) $n \geq n_1$ এর জন্য S(n) সত্য হলে S(n + 1)-ও সত্য,

তাহলে প্রস্তাবনা S(n) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য সত্য।

সহজ একটি উদাহরণ নেয়া যাক। আমরা এই পদ্ধতিতে প্রমাণ করব যে—

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের n পর্যন্ত সংখ্যার যোগফলের সূত্র হবে—

$$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}।$$

প্রমাণ : গাণিতিক আরোহের সংজ্ঞা থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রমাণটি সম্পন্ন হবে দুটি ধাপে।

a) $$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

n = 1 হলে (কিংবা যেকোনো বিশেষ মান হলে) :

$$S(n) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1 = S(1)$$

এই ফলটি 1 + 2 + 3 . . . ধারার প্রথম পদের দিকে তাকালেই স্পষ্ট হয়ে ওঠে এখানে প্রথম পদের মান হলো 1। সুতরাং প্রথম একটি পদের 'যোগফলও' 1।

n = 2 বসালে S(n) সত্য কি না তা দেখা যাক :

$$S(n) = \frac{2(2+1)}{2} = 3 = S_{(2)}$$

অর্থাৎ $n = n + 1$ হলে [অর্থাৎ n এর স্থলে $n + 1$ বসালে] $S(n) = S(n + 1)$, অর্থাৎ S(n) এর সূত্রটি বদলে যাবে না, শুধু n এর নোতুন মান তাতে বসালেই উদ্দিষ্ট ফল পাওয়া যাবে।

$n = 3$ বসালে—

$$S(n) = \frac{3\,(3+1)}{2} = \frac{3.4}{2} = 6 = S_{(3)}$$

বা $1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3\,(3+1)}{2} = S_{(3)}$

এবারও আগের কথাটির সত্যতা যাচাই হলো।

b) এখন আমরা ধ'রে নেব যে প্রস্তাবনা S(n) সত্য, এবং এ দ্বারাই অনুমান করা যায় যে প্রস্তাবনা S(n+1) ও সত্য। তাহলে যে-কোনো সংখ্যা n পর্যন্ত ধারাটির যোগফল :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(\text{শেষপদ})\,(\text{শেষপদ} + 1)}{2}$$

উভয় পাশে ধারাটির পরবর্তী উপাদান, $(n + 1)$, যোগ ক'রে :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\,\{(n+1)+1\}}{2}$$

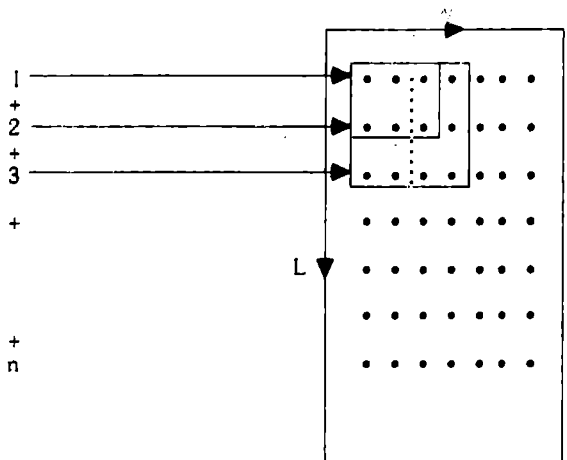
$$S\,(n+1) = \frac{(\text{শেষপদ})\,(\text{শেষপদ} + 1)}{2}$$

যা ধারাটির n পর্যন্ত যোগফলের সূত্রের সাথে কোনোভাবেই অভিন্ন নয়। এবং ধারাটিতে $(n + 1)$ পর্যন্ত পদ নিয়ে S(n) এর সূত্র প্রয়োগ করলেও এই সূত্র পাওয়া যেত :

$$1 + 2 + 3 + \ldots n + (n + 1)$$
$$= \frac{(n + 1)\{(n + 1) + 1\}}{2}$$

সুতরাং প্রমাণিত হলো যে $1 + 2 + 3 + \ldots$ ধারার যে-কোনো সংখ্যক পদের যোগফল বের করার জন্য একটিই সূত্র, S(n)।

সূত্রটি যে ধারাটির যে-কোনো সংখ্যা পর্যন্ত যোগফলের ক্ষেত্রে সত্য, তা থেকে কী বুঝা যাচ্ছে? বুঝা যাচ্ছে যে যোগফলের সাপেক্ষে এরূপ ধারার সার্বিক কাঠামো *নির্ধারিত। ধারাটিতে একটি একটি ক'রে পদসংখ্যা যেই বাড়ানো হচ্ছে, অমনি নোতুন পদটি উক্ত যোগফলের নির্ধারিত কাঠামোর মধ্যে ঢুকে পড়ছে, এবং কাঠামোকে বদলে না দিয়েই তার মাপে যোগফলের মানকে বাড়িয়ে দিচ্ছে।* এভাবে যোগফলের পরিমাণ যতই বাড়ুক বা কমুক না কেন, তার *চরিত্র* রয়ে যাচ্ছে অপরিবর্তিত। প্রক্রিয়াটিকে আমরা আমাদের mapping এর ধারণা দিয়ে ব্যাখ্যা করতে পারি (অধ্যায়—৫)। নিচের চিত্রে যোগফল নির্ণয়ের জন্য ডানে একটি তলে অসংখ্য বিন্দু আছে যেগুলি বর্গাকারে সাজানো।



চিত্রে বিন্দুগুলিকে গণনা করার জন্য দুটি দিক আছে—L এবং W। $1 + 2 + 3 + \ldots$ ধারার যে পদ পর্যন্ত মান বের করতে হবে, LW তলের বাম পাশের কোনার বিন্দুটি

থেকে L বরাবর সেই সংখ্যাকে গুনতে গুনতে এগিয়ে যেতে হবে। চিত্রে 3 পর্যন্ত গোনা হয়েছে। এই গণনা শেষ হবার সাথে সাথে উক্ত n-তম (এখানে ৩য়) বিন্দু থেকে W দিকে (ডান দিকে) n + 1 তম (এখানে ৪র্থ) বিন্দু পর্যন্ত যেতে হবে। এভাবে একটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাবে যার মধ্যে (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) = (n + 1) n সংখ্যক বিন্দু থাকবে। এই ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ বরাবর জোড় সংখ্যক বিন্দু পাওয়া যাবে। এই জোড় পার্শ্ব থেকে মধ্যবিন্দু নির্ণয় ক'রে আয়তটিকে দুই ভাগে ভাগ করতে হবে। এই অর্ধেক আয়তের মধ্যে যতগুলি বিন্দু থাকবে তাই হলো n পদ পর্যন্ত (এখানে 3 পর্যন্ত) ধারাটির যোগফল। অর্থাৎ যে-কোনো পদের ক্ষেত্রেই আয়তগঠনের একই কাঠামো প্রযোজ্য। অন্যান্য কিছু পদের জন্য নিজে চেষ্টা ক'রে দেখলেই প্রক্রিয়াটি বুঝা যাবে।

আরেকটি উদাহরণ। যে-কোনো সংখ্যা n পর্যন্ত স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যাগুলির যোগফল নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র কী হবে? এক্ষেত্রে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

ধারাটিকে লেখা যাক।

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = ?$$

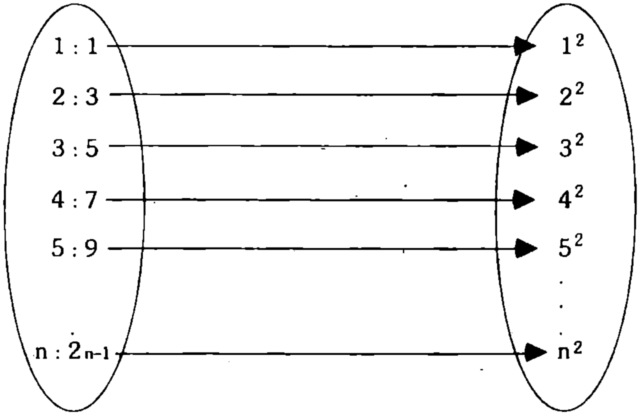
কয়েক ধাপ যাচাই ক'রে দেখা যাক :

$$\begin{aligned}
S_{(1)} &= 1 \\
S_{(2)} &= 1 + 3 = 4 \\
S_{(3)} &= 1 + 3 + 5 = 9 \\
S_{(4)} &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\
S_{(5)} &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
\end{aligned}$$

দেখা যাচ্ছে যে যোগফলগুলি একটি ধারায় পড়ছে :

$$\begin{aligned}
& 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \\
= \quad & 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots
\end{aligned}$$

সব ক্ষেত্রে যদি ধারাটির সাথে তার যোগফলের এই সম্পর্ক বজায় থাকে, তাহলে তার nতম পদ পর্যন্ত সকল সংখ্যার যোগফল হবে n^2। কারণ ১ম, ২য়, ৩য় . . . ইত্যাদি পদ পর্যন্ত যোগফলকে নিচের mapping এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায় :



কিন্তু সব ক্ষেত্রে যোগফলের সাথে ধারাটির প্রতিটি পদের এই সম্পর্ক যে বজায় থাকবে তার নিশ্চয়তা কী?

এরূপ ক্ষেত্রে সাবধান হতে হবে। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি দ্বারা যাচাই না ক'রে বলার উপায় নেই যে সূত্রটি সব পদের জন্য সত্য। ইতিহাস থেকে একটি গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ নেয়া যাক। সংখ্যাতত্ত্বে ফার্মার অবদান অসামান্য। এই গণিতবিদের মেধার ছিল অসাধারণ তীক্ষ্ণতা। তার সামান্য পরিচয় আমরা একটু আগেও পেয়েছি। তিনি কেবল মাথার মধ্যে চিন্তা ক'রে অনেক উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা ক'রে গেছেন যেগুলি পরে প্রমাণিত হয়েছে। কিন্তু তিনি একটি বড় ভুল করেছিলেন। এবং এই ভুলের কারণ ছিল এই যে তিনি গাণিতিক আরোহকে সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রটিতে গুরুত্ব দেননি। তিনি বলেছিলেন যে :

$$F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$$

এই sequence এর সব সংখ্যাই মৌলিক।

$n = 0, 1, 2, 3,$ এবং 4 এর ক্ষেত্রে তাঁর দাবি সত্য :

$$F_0 = 3$$

$$F_1 = 5$$

$$F_2 = 17$$

$$F_3 = 257$$

$$F_4 = 65,537$$

কিন্তু পরবর্তী ফার্মা-সংখ্যাটির মান এত বড় যে (F_5 = 4,29,49,67,297) সংখ্যাটি মৌলিক নাকি যৌগিক তা ফার্মার পক্ষে হিসেব ক'রে বের করা সম্ভব ছিল না। অবশ্য পরে বিখ্যাত গণিতবিদ লিওনার্ড অয়লার (Leonhard Euler, 1707—1783) সংখ্যাটিকে উৎপাদকে বিভাজিত করতে পেরেছিলেন :

$$F_5 = 4,29,49,67,297 = 641\ (67,00,417)$$

যা দ্বারা প্রমাণিত হলো যে ফার্মার অনুমানটি মিথ্যা। সুতরাং দুয়েকটি বা একাধিক নির্দিষ্ট সংখ্যক মানের জন্য কোনো কিছু সত্য হলে সব ক্ষেত্রে তা সত্য হবে এমন কোনো কথা নেই। অতএব আমরা n^2 এর সত্যতা যাচাই ক'রে দেখব।

a) ধারাটির ৪র্থ পদ পর্যন্ত যোগফল

$$= S_{(4)}$$
$$= 4^2$$
$$= 16$$

যাচাই : $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = S_{(4)}$

অর্থাৎ $S_{(n)} = n^2 : n = 4$

n এর স্থলে (n + 1) বসিয়ে :

$$\begin{aligned} S_{(n+1)} &= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) + [2\,(n + 1) + 1] \\ &= [1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 2 - 1) \\ &= S_{(n)} + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \quad [S(n) = n^2] \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

অর্থাৎ n এর যে-কোনো মানের জন্য সূত্রটির একই কাঠামো। সুতরাং সূত্রটি n এর সকল মানের জন্য সত্য।

উদাহরণ : গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অবলম্বন ক'রে নিচের সূত্রটি প্রমাণ করুন :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6}$$

সমাধান :

1) n = 1 হলে সূত্রটি বৈধ, কারণ

$$S_{(1)} = 1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

2) $S_{(k)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ধ'রে আমরা দেখাতে চেষ্টা করব যে—

$$S_{(k+1)} = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

তাহলে :

$$S_{(k+1)} = S_{(k)} + a_{k+1} \quad [a_{k+1} = (k+1)\text{তম পদ}]$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{2k^2 + 7k + 6\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

1) এবং 2) কে একত্রে বিবেচনা ক'রে আমরা বলতে পারি যে সূত্রটি n এর সকল মানের জন্য বৈধ।

FOOD FOR THOUGHT

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার ক'রে নিচের সূত্রগুলির বৈধতা যাচাই করুন।

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{5}$

2. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

3. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

কোনো Sequence এর nতম পদের জন্য সাধারণ সূত্র নির্ণয়

a) নিচের অনুক্রমটির nতম আংশিক যোগফল (nth partial sum) নির্ণয় করার জন্য একটি সাধারণ সূত্র গঠন করুন।

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \ldots,$$

সমাধান :

	১ম	পদের	হরের	প্রথম	সংখ্যা	= 1
	২য়	”	”	”	”	= 2
	৩য়	”	”	”	”	= 3
	৪র্থ	”	”	”	”	= 4
	. . .		. . .		. . .	
সুতরাং	nতম	”	”	”	”	= n

আবার,

	১ম	পদের	হরের	দ্বিতীয়	সংখ্যা	= 2 (= 1 + 1)
	২য়	”	”	”	”	= 3 (= 2 + 1)
	৩য়	”	”	”	”	= 4 (= 3 + 1)
	৪র্থ	”	”	”	”	= 5 (= 4 + 1)
	. . .		. . .		. . .	
সুতরাং	nতম	”	”	”	”	= n + 1

সুতরাং অনুক্রমটির যে-কোনো পদের মান বের করার সাধারণ সূত্র হতে পারে :

$$\frac{1}{n\,(n+1)}$$

b) অনুক্রমটির nতম পদ পর্যন্ত যোগফল বের করার সূত্র কী হবে?

সমাধান : এখানেও আগের মতো অনুমানের ওপর প্রাথমিকভাবে নির্ভর করতে হবে এবং সংশ্লিষ্ট অনুক্রমের সাথে সংশ্লিষ্ট যোগফলের সম্পর্কের একটি প্যাটার্ন ধরার চেষ্টা করতে হবে। এভাবে যাচাই-ভুলের পথ ধ'রে একটি সূত্র দাঁড় করাবার চেষ্টা করতে হবে, এবং অবশেষে গাণিতিক আরোহের সাহায্যে তার সত্যতা যাচাই করতে হবে।

$$S_{(1)} = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$S_{(2)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$S_{(3)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$$

$$\cdots$$

এখানে একটি চমৎকার প্যাটার্ন লক্ষ্য করা যাচ্ছে। প্রতি ক্ষেত্রে যোগফল হলো শেষ পদটির হরের প্রথম পদ ভাগ দ্বিতীয় পদ।

ফলে :

$$S_{(n)} = \frac{n}{n+1}$$

এখন গাণিতিক আরোহের মাধ্যমে দাবিটিকে প্রমাণ করতে হবে।

$$S_{(n+1)} = \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right] + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

সুতরাং সূত্রটি বৈধ।

উদাহরণ : গাণিতিক আরোহের মাধ্যমে প্রমাণ করুন যে n এর যোগবোধক বাস্তব মানের জন্য :

$$2^n > n$$

সমাধান : n = 1, 2, 3 নিয়ে অসমতাটিকে যাচাই ক'রে দেখা যাক।

$$2^1 > 1$$

$$2^2 > 2$$

$$2^3 > 3$$

এভাবে ধরা যাক $2^P > P$। তাহলে আমাদেরকে এখন দেখাতে হবে যে $2^{P+1} > P + 1$। $n = P + 1$ নিলে আমাদের অনুমান অনুসারে আমরা পাই :

$$2^{P+1}$$

$$= 2^P . 2^1$$

$$= 2.2^P$$

কিন্তু $2.2P > 1P$, এবং ফলে $2^{P+1} > 2P$

আবার যেহেতু $2P = P + P > P + 1$ [$P > 1$ হলে],

সুতরাং $2^{P+1} > 2P > P + 1$

বা = $2^{P+1} > P + 1$

সুতরাং $2^n > n$ সম্পর্কটি n এর জন্য সত্য হলে $(n + 1)$ এর জন্যও সত্য হবে। এ থেকে প্রমাণিত হয় যে $n \geq 1$ হলে $2^n > n$।

এতক্ষণে পাঠক নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে গাণিতিক আরোহ যে-পদ্ধতিতে কাজ করে তা আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সাথেও জড়িত। এর মূল প্রক্রিয়াটি এরূপ : P, Q, R, S, T পাঁচটি ঘটনা হলে এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্ক নিম্নরূপ হলে :

P থেকে Q

Q থেকে R

R থেকে S

S থেকে T

আমরা ব'লে থাকি যে P ঘটলে T ঘটবে। ছোট বেলায় নিশ্চয়ই অনেকে কোনো মসৃণ জায়গায় পাশাপাশি সরল রৈখিকভাবে কিছু ইট রেখে সারির প্রান্তের একটি ইটকে ঠেলা দিয়ে দেখেছেন কিভাবে একটিমাত্র ঠেলা এক-এক ক'রে সবগুলি ইটকে ফেলে দেয়। বেশ লম্বা সারি বানিয়ে খেলাটি খেলতে যে-কোনো বয়সের ব্যক্তিরই ভালো লাগার কথা—অন্তত কয়েকবারের জন্য হলেও। এখানে যা ঘটে তার সাথে গাণিতিক আরোহের তুলনা করা যায়। প্রথম ইটটি যেই দ্বিতীয় ইটটিকে ফেলে দেয়, অমনি দ্বিতীয় ইটটি

ফেলে দেয় তৃতীয়টিকে, তৃতীয়টি চতুর্থটিকে . . .। একে বলে **ডমিনো এফেক্ট**। সামাজিক-রাজনৈতিক বাস্তবতায়ও এই ক্রিয়া লক্ষ্য করা যায়। আমরা যখন একাধিক ঘটনাকে একটি কার্য-কারণ সূত্রে বেঁধে তাদের একটি ঘটলে অপরটি ঘটবে ব'লে ভবিষ্যদ্বাণী করি, তখন নিজের অজান্তেই সংশ্লিষ্ট বাস্তবতায় ডমিনো এফেক্টকে প্রযোজ্য ব'লে ধ'রে নেই। তাহলে কিছুক্ষণ ভেবে দেখুন :

এদেশ থেকে প্রকৃত গণিত শিক্ষা যদি একেবারে উঠে যায়, তাহলে কী কী ঘটতে পারে?

এই বইটির চেয়ে আরো ১ শত গুণ ভালো বই যদি এদেশে পঞ্চাশ বছর আগে থেকেই পাওয়া যেত, তাহলে বর্তমানে এদেশে অতিরিক্ত কী কী ঘটনা ঘটতে পারত?

আমরা দিন দিন ইংরেজি শেখার দম্ভে যদি বাংলাকে একেবারে ভুলে যাই, তাহলে কী ঘটবে—বাংলা ভাষার নয়, আমাদের?

প্রাগৈতিহাসিক যুগে গাছের গুহায় শুয়ে আমরা যেসব স্বপ্ন দেখতাম, তার দ্বারা কি আমরা এই বিজ্ঞানের যুগে এখনও প্রভাবিত হই?

বংশ-পরম্পরায় সব বাবা, তারপর ছেলে, তারপর তার ছেলে . . . এভাবে আমরা মেধা খাটাতে থাকি, এবং একথা যদি সত্য হয় যে আমাদের কষ্টার্জিত মানসিক বৈশিষ্ট্য আমাদের জেনেটিক দক্ষতায় সঞ্চিত হয়, তাহলে ৫০ বছর পর এদেশে যে-সব মানব-শিশু জন্ম নেবে তাদের মেধা বর্তমানের শিশুদের মেধা অপেক্ষা ভিন্নরূপ হবে কি?

অধ্যায় : ৯

দ্বিপদী উপপাদ্য
(Binomial Theorem)

প্রথমেই কয়েকটি সূত্র মনে করার চেষ্টা করা যাক ঃ

$$(a + b)^2 = ?$$

$$(a + b)^3 = ?$$

নিশ্চয়ই অধিকাংশ পাঠকেরই মনে আছে রাশি দুটি কিভাবে বিস্তৃত করতে হবে। সূত্র দুটি অত্যন্ত সহজ, এবং একথা সবারই মনে থাকার কথা যে এই সহজতম সূত্রদুটিও মাধ্যমিক গণিতের প্রায় সর্বত্র ব্যবহৃত হয়েছে। কারণ এদের গুরুত্ব অপরিসীম।

এই ধারায় আরেকটু এগিয়ে যদি প্রশ্ন করা হয় ঃ

$$(a + b)^4 = ?$$

$$(a + b)^5 = ?$$

তাহলে হয়ত অনেকের পক্ষে উত্তর মুখস্থ ব'লে দেয়া সম্ভব নয়। তবুও আগের ধারা অনুসরণ ক'রেই এগুলিকে বিস্তৃত করা যায়। কারণ ঃ

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 . (a + b)$$

এবং $(a + b)^5 = (a + b)^4 . (a + b)$

আমরা অধ্যায় —z এ দেখেছি যে কোনো sequence বা অনুক্রমের সাধারণ সূত্র উক্ত অনুক্রমকে পর্যবেক্ষণ করে গঠন করা যায়। এখানেও দেখা যাচ্ছে যে n এর বিভিন্ন ক্রমিক মানের জন্য $(a+b)^n$-এর বিস্তৃতিগুলি একটি অনুক্রম বা প্রগমন গঠন করে। এই প্রগমনের সাধারণ সূত্র পাওয়া গেলে $(a+b)^n$-এর যে-কোনো ঘাতের বিস্তৃতি উক্ত সূত্র অনুসারে নির্ণয় করা যাবে। তাহলে একেবারে মৌলিক পর্যায় থেকে এগুনো যাক।

$(a+b)^0 = 1$ [কারণ কোনো সংখ্যার শূন্য ঘাত সমান 1]

$(a+b)^1 = a+b$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\,(a+b) \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)^2\,(a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2)\,(a+b) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= (a+b)^3\,(a+b) \\
&= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\,(a+b) \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= (a+b)^4\,(a+b) \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

এই পর্যন্ত প্রাপ্ত বিস্তৃতিগুলিকে পাশাপাশি সাজিয়ে দেখা যাক তাদের মধ্যে কোনো প্যাটার্ন খুঁজে পাওয়া যায় কি না (যে পদ্ধতির কথা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে বলা হয়েছে।)

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

এদের মধ্যে কোনো প্যাটার্ন আছে কি না তা আরো স্পষ্টভাবে লক্ষ্য করার জন্য a, b এর শুধু সহগগুলিকে ত্রিভুজের আকারে সাজালে ভালো হবে ঃ

1

1 1

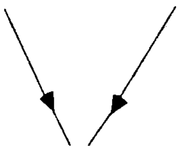
1 2 1

1 3 3 1

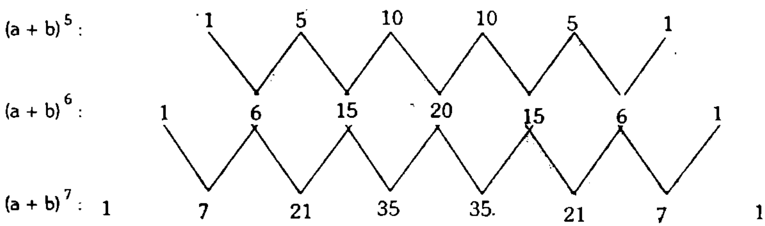
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

একে বলে প্যাসকালের ত্রিভুজ (Pascal's triangle— বিখ্যাত ফরাসী গণিতবিদ ব্লেইজি প্যাসকালের নাম অনুসারে)। লক্ষ্য করুন, প্রতি ধাপের প্রান্তীয় সহগ দুটি 1। উপর থেকে নিচের দিকে যেতে যেতে অন্যান্য সহগগুলিকে নিচের চিত্র অনুসারে যোগ করে ক্রমে ক্রমে পাওয়া যায় ঃ



যেমন, ৩য় ধাপের [অর্থাৎ $(a+b)^4$ এর] 4 কে পাওয়া যাচ্ছে পূর্ববর্তী ধাপের 4 এর উপর ডানে এবং বামে অবস্থিত 1 এবং 3 যোগ ক'রে,6 কে পাওয়া যাচ্ছে 3 এবং 3 কে যোগ ক'রে। এভাবে নিচের দিকে যে কোনো ঘাতে $(a + b)^n$ আকারের রাশির বিস্তৃতিতে a, b, ab, a^3b^2 ইত্যাদির সহগ কী কী হবে তা নির্ণয় করা যায়। এ থেকেই তাহলে $(a + b)^6$ এবং $(a + b)^7$ এর বিস্তৃতি হিসাব করা যাক ঃ



ফলে $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 5a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

এই বিস্তৃতিগুলি থেকে আরো দেখা যাচ্ছে যে a এর ঘাত ক্রমে ক্রমে n থেকে শুরু হয়ে শূন্যে নেমে যাচ্ছে ($a^0 = 1$; ফলে, উদাহরণস্বরূপ, $a^0.b^7 = b^7$) এবং b এর ঘাত শূন্য থেকে n পর্যন্ত বৃদ্ধি পাচ্ছে।

তাহলে $(a+b)^n$ আকারের এরূপ কোনো রাশির বিস্তৃতির মূল ঘটনা জানা গেল। কিন্তু এর জন্য একটিমাত্র সূত্রও ব্যবহার করা যায়, যা মহাবিজ্ঞানী আইজাক নিউটন (1642–1727) মাত্র 24 বছর বয়সে আবিষ্কার করেছিলেন! এই সূত্রকে বলে দ্বিপদী উপপাদ্য বা Binomial Theorem। আমরা এখন নিউটনের পদ্ধতিটির সাথে পরিচিত হব। শুধু তাই নয়, পূর্বোক্ত প্যাসকালের ত্রিভুজের সাথে উক্ত সূত্রের সম্পর্ক কী তা আমরা স্পষ্টভাবে দেখব।

এবার একটু পেছন ফিরে তাকাতে হবে। 'বিন্যাস এবং সমাবেশ' শীর্ষক অধ্যায়ে আমরা দেখেছি যে, উদাহরণস্বরূপ ঃ

$$
\begin{aligned}
2! &= 2\cdot1 = 2\\
3! &= 3\cdot2\cdot1 = 6\\
4! &= 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24\\
5! &= 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120\\
6! &= 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720\\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots\\
n! &= n, \cdot (n-1). (n-2) \ldots (n-r+1) \ldots 3\cdot2\cdot1
\end{aligned}
$$

আমরা আরো দেখেছিলাম যে—

$$0! = 1$$

এছাড়া আমরা উক্ত অধ্যায়ে নিম্নোক্ত প্রতীকের সাথেও পরিচিত হয়েছিলাম ঃ

$$nCr = \frac{n!}{r!\,(n-r)\,!}$$

আমাদের দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে এরূপ প্রতীক ব্যবহৃত হবে। কারণ সেক্ষেত্রে আমাদেরকে a, b, ... ইত্যাদির সহগ নির্ণয় করার জন্য যে হিসাবগুলি করতে হবে, তাতে উক্ত প্রতীকগুলির সাহায্য নেয়া যায়।

সরলতম উদাহরণ থেকে আবারও বিবেচনা শুরু করা যাক।

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$= 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$= {}_1C_0 a + {}_1C_1 b$$

$$\left[{}_1C_0 = \frac{1!}{1!\,(1-0)\,!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1\right.$$

$$\left.{}_1C_1 = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1 \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1\right]$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

$$= {}_1C_0 a^2 + {}_2C_1 ab + {}_2C_2 b^2$$

$$\left[{}_2C_1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2;\ {}_2C_2 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 1\right]$$

সহগগুলির মানের সাথে ${}_nC_m$ এর সজ্জা মিলে যাচ্ছে বলে ভেবে বসা যাবে না যে কাজটি আন্দাজে করা হয়েছে। 'বিন্যাস ও সমাবেশ' শীর্ষক অধ্যায়ে বর্ণিত কৌশলেও এক্ষেত্রে nCm কেন হবে তা নির্ধারণ করা যায়। যেমন ঃ

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$

গুণনের নিয়ম হলো প্রথমে ডান (বা বাম) পাশের রাশির a দ্বারা অপর রাশিটির a ও b কে গুণন করা এবং পরে ডান (বা বাম) পাশের রাশির b এর সাথে অপর রাশিটির a ও b কে গুণন করা। এভাবে (কিংবা প্যাসকালের ত্রিভুজের সাহায্য নিয়ে) ঃ

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

এরূপ ক্ষেত্রে লক্ষ্য করতে হবে যে ঃ

1. প্রতিটি বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে।

যেমন, $(a+b)^5$-এর বিস্তৃতিতে $5+1 = 6$ টি পদ রয়েছে।

2. প্রতিটি বিস্তৃতিতে প্রথম এবং দ্বিতীয় পদের (যেমন a ও b এর) ভূমিকা প্রতিসম (symmetrical)— অর্থাৎ a এর ঘাত 1 ক'রে হ্রাস পাচ্ছে এবং b এর ঘাত 1 করে বৃদ্ধি পাচ্ছে।

3. প্রতি পদের ঘাতদ্বয়ের যোগফল হলো n (যেমন ঃ $(a+b)^5$ এর যে-কোনো পদের বেলায় একথা সত্য—

$a^5.b^0 \rightarrow 5+0=5$

$5a^4b \rightarrow 4+1 = 5$

$10a^3b^2 \rightarrow 3+2 = 5$

$10a^2b^3 \rightarrow 2+3 = 5$ ইত্যাদি।)

4. প্রথম পদটি a^n এবং শেষ পদটি b^n। উভয় পদের সহগ 1।

এরূপ বিস্তৃতির সবচেয়ে কঠিন কাজটি হলো পদগুলির সহগ নির্ণয় করা। দ্বিপদী সহগ নির্ণয়ের পদ্ধতিকে বলে দ্বিপদী উপপাদ্য বা Binomial Theorem। এই পদ্ধতি অনুসারে $a^{n-m}\, b^m$ পদটির সহগ হবে ঃ

$$_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\dots\,(n-m+1).\,(n-m)!}{m!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\,(n-m+1)}{m!}$$

যেখানে m = 0, 1, 2, 3, ..., n

[illegible] (Binomial [illegible]

$(a+b)$ [illegible]

$_nC$ [illegible]

$_nC_m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,[illegible]}{m!}$

প্রমাণ ঃ

সূত্রটিকে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (mathematical induction) প্রয়োগ ক'রে খুব সহজেই প্রমাণ করা যায় (সংশ্লিষ্ট অধ্যায় দ্রঃ)।

1. n = 1 হলে,

$$(a + b)^1 = a^1 + b^1 = {}_1C_0a + {}_1C_1b$$

এবং এক্ষেত্রে সূত্রটি বৈধ।

2. ধরা যাক $n = K$ মানের জন্য সূত্রটি সত্য, তাহলে $a^{k-m}b^m$ হবে :

$$_kC_m = \frac{k!}{(k-m)!\ m!}$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{m!}$$

কিন্তু আমাদেরকে এখন দেখাতে হবে যে $n = k+1$ মানের জন্যও এই সূত্রটি বৈধ। এ কাজ করতে গিয়ে আমাদেরকে $(a+b)^{k+1}$ এর বিস্তৃতির $a^{k+1-m}b^m$ সহগ-যুক্ত পদটির প্রতি লক্ষ্য করতে হবে :

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)^1$$

$$= (a+b)^k\ (a+b)$$

অর্থাৎ পদটি হবে দুটি গুণফলের সমষ্টি :

$$({}_kC_m a^{k-m}b^m)\ (x) + ({}_kC_{m-1} a^{k+1-m}\ b^{m-1})\ (b)$$

$$= \left[\frac{k!}{(k-m)!\ m!} + \frac{k!}{(k-m+1)!\ (m-1)!}\right] a^{k+1-m}b^m$$

$$= \left[\frac{(k+1-m)!\ k!}{(k+1-m)!\ m!} + \frac{k!m}{(k+1-m)!\ m!}\right] a^{k+1-m}b^n$$

$$= \left[\frac{k!\ (k+1-m+m)}{(k+1-m)!\ m!}\right] a^{k+1-m}b^m$$

$$= \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-m)!\ m!}\right] a^{k+1-m}b^m$$

$$= {}_{k+1}C_m a^{k+1-m}b^m$$

এভাবে n -এর সকল মানের জন্য দ্বিপদী উপপাদ্যটি বৈধ।

FOOD FOR THOUGHT

1. মান বের করুন : ${}_7C_3$, ${}_{12}C_5$, ${}_{13}C_9$, ${}_6C_5$,

সমাধান : $${}_7C_3 = \frac{7!}{(7-3)!\ 3!} = \frac{7!}{4!\ 3!}$$

$$= \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}!}{\cancel{4}!\ 3!}$$

$$= \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{6}}$$

$$= 35$$

এভাবে বাকিগুলি করতে হবে।

2. বিস্তৃত করুন : $(a+2)^5$ ।

সমাধান :

$$(a+2)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^{5-1}.2^1 + {}_5C_2a^{5-2}.2^2$$
$$+ {}_5C_3a^{5-3}.2^3 + {}_5C_4a^{5-4}.2^4 + {}_5C_5a^{5-5}.2^5$$
$$= 1.a^5 + 5a^4.2 + 10a^3.4 + 10a^2.8 + 5a^1.16 + 1.a^0.32$$
$$= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32$$

3. বিস্তৃত করুন : $(x+y)^7$

সমাধান :

$$(x+y)^7 = {}_7C_0x^7y^0 + {}_7C_1x^{7-1}y^1 + {}_7C_2x^{7-2}y^2 + {}_7C_3x^{7-3}y^3$$
$$+ {}_7C_4x^{7-4}y^4 + {}_7C_5x^{7-5}y^5 + {}_7C_6x^{7-6}y^6$$
$$+ {}_7C_7x^{7-7}y^7$$

এই বিস্তৃতির মানগুলি নির্ণয় করতে হবে।

4. বিস্তৃত করুন : $(x-3)^6$ ।

সমাধান :

$$(x-3)^6$$
$$= \{x+(-3)\}^6$$
$$= {}_6C_0x^6.\ (-3)^0 + {}_6C_1x^5(-3)^1 + {}_6C_2x^4\ (-3)^2$$
$$+ {}_6C_3x^3\ (-3)^3 + {}_6C_4x^2\ (-3)^4 + {}_6C_5x^1\ (-3)^5$$
$$+ {}_6C_6x^0\ (-3)^6$$

এখন যথানিয়মে পদগুলির মান নির্ণয় করতে হবে।

অনেক সময়ে $(1+x)^n$ আকারের রাশিটিকে বিস্তৃত করার প্রয়োজন হয়। এক্ষেত্রে পূর্বোক্ত সূত্র প্রয়োগ করা যায়, আবার তার মাধ্যমে সহজতর একটি সূত্র নির্মাণ করে নেয়া যায় যা মুখস্থ রাখা অধিকতর সুবিধাজনক।

$$(1-x)^n = {}_nC_0 \,.\, 1^n \,.\, x^0 + {}_nC_1 \,.\, 1^{n-1} \,.\, x^1$$

$$+ {}_nC_2\, 1^{n-2} \,.\, x^2 + \ldots + {}_nC_m\, 1^{n-m+1} \,.\, x^m$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}x^m + \ldots + x^n$$

এভাবে

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 - \ldots$$

অধ্যায় : ১০

নির্ণায়ক
(Determinants)

নির্ণায়ক কী এবং তা কেন গুরুত্বপূর্ণ
(What Determinants Are, And Why They Are Important)

সচরাচর আমাদের দেশের উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ের শিক্ষার্থীরা নির্ণায়ক শেখে একেবারে যান্ত্রিক উপায়ে : নির্ণায়কের সংজ্ঞা, তার বিভিন্ন ধর্মাবলী, তার বিভিন্ন উপাদান এবং পরিবর্তন—ইত্যাদি তারা বেশ অনায়াসেই শেখে, তবে তার ব্যবহার জানার বা তার প্রকৃত স্বরূপ বুঝার সুযোগ পায় না। ফলে কিছুকাল পরে তা আবার ভুলেও যায়। এই অধ্যায়ে শিক্ষার্থীকে নির্ণায়কের প্রকৃত রূপ এবং গুরুত্ব সহজে বুঝতে সাহায্য করার জন্য চেষ্টা করা হবে। অবশ্য নির্ণায়কের আলোচনায় স্বাভাবিকভাবেই ম্যাট্রিক্সের (matrix, plural—matrices) প্রসঙ্গ চ'লে আসে। কিন্তু ম্যাট্রিক্সের আলোচনা এই বইয়ের বিষয়বস্তু থেকে বাদ দেয়া হয়েছে ব'লে তার আলোকে নির্ণায়ককে ব্যাপকভাবে বিবেচনা করা এখানে সম্ভব হবে না। তবে শিক্ষার্থীদের জ্ঞানের পরিসর বৃদ্ধির এবং আলোচনার কিছুটা পরিপূর্ণতার জন্য এখানে তাও কিছুটা আলোচনা করা হবে। গণিতের উচ্চতর শাখায় নির্ণায়কের যে-সব প্রয়োগ রয়েছে তার আলোচনা এখানে অপ্রাসঙ্গিক হলেও এর কিছু সুন্দর এবং সহজবোধ্য ব্যবহার নিয়ে এখানে আলোচনা করা হবে।

নিচের সহ-সমীকরণ দুটি লক্ষ্য করুন :

$$2x + 3y = 23 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(i)}$$

$$4x + 5y = 41 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(ii)}$$

সমীকরণ দুটিকে সমাধান করা খুবই সহজ। অপনয়ন পদ্ধতিই (অধ্যায়-৩ এর পর্ব-৩ দেখুন) প্রয়োগ করা যাক। প্রথমে y কে অপনয়ন করার জন্য (i) কে 5 এবং (ii) কে 3 দ্বারা গুণন ক'রে প্রাপ্ত (i) থেকে (ii) বাদ দেয়া যাক।

$$\begin{array}{rcl} 2.5x + 3.5y &=& 23.5 \\ 4.3x + 5.3y &=& 41.3 \\ (-) \quad (-) & & (-) \\ \hline 2.5x - 4.3x &=& 23.5 - 41.3 \\ x\,(2.5 - 4.3) &=& 23.5 - 41.3 \\ x &=& \dfrac{23.5 - 41.3}{2.5 - 4.3} \end{array}$$

গুণন-ভাগ আমরা এখনও করিনি। যদি x, y এর সহগ হিসেবে a, b ইত্যাদি থাকত, তাহলে কি আমরা সেগুলিকে রেখে দিতাম না? সুতরাং এখানেও আপাতত সংখ্যাগুলিকে রেখে দেয়া যাক। এবার x কে অপনয়ন করার জন্য প্রথম অবস্থা থেকে (i) কে 4 এবং (ii) কে 2 দ্বারা গুণন ক'রে প্রাপ্ত (i) থেকে (ii) বাদ দেয়া যাক।

$$\begin{array}{rcl} 2.5x + 3.5y &=& 23.4 \\ 4.2x + 5.3y &=& 41.2 \\ (-) \quad (-) & & (-) \\ \hline 3.4y - 5.2y &=& 23.4 - 41.2 \\ y\,(3.4 - 5.2) &=& 23.4 - 41.2 \\ y &=& \dfrac{23.4 - 41.2}{3.4 - 5.2} \\ &=& \dfrac{-(41.2 - 23.4)}{-(5.2 - 3.4)} \\ &=& \dfrac{41.2 - 23.4}{2.5 - 4.3} \end{array}$$

এখন একটি চমৎকার জিনিস লক্ষ্য করুন, যা সচরাচর এরূপ সমীকরণ যুগলকে সমাধান করার সময়ে অনেকে এড়িয়ে যায়। লক্ষ্য করুন, x এবং y এর মান প্রকাশক উভয় ভগ্নাংশের হর একই। সংখ্যার মাধ্যমে এরূপ সমীকরণের x, y এর মান বের করার সময়ে যোগ-বিয়োগ-গুণন-ভাগের মধ্যে উক্ত রাশিটির মূল রূপটি হারিয়ে যায় ব'লে তা সচরাচর চোখে পড়ে না।

এখন সমীকরণটির সহগগুলিকে সংখ্যায় না লিখে প্রতীকের মাধ্যমে লিখলে তা স্থায়ী এবং সাধারণ (general) রূপ পাবে।

এখন (i)-এ x এর সহগকে a_1, y এর সহগকে b_1; (ii)-তে x এর সহগকে a_2, y এর সহগকে b_2 দ্বারা চিহ্নিত করা যাক।

(i) এর 23 কে c_1 এবং (ii) এর 41 কে c_2 দ্বারা চিহ্নিত যাক। তাহলে পাওয়া গেল :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

তাহলে পূর্বোক্ত ফলাফল থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এরূপ যে কোনো সমীকরণ যুগলের (উভয় সমীকরণকে অবশ্য সরল বা এক-ঘাত হতে হবে) সমাধান পাওয়া যাবে নিচের সূত্রদ্বয়ের মাধ্যমে :

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

পূর্বোক্ত সংখ্যাগুলির স্থলে সংশ্লিষ্ট প্রতীকসমূহ বসালে ঠিক উপরোক্ত সূত্রদ্বয় পাওয়া যাবে। x_1 ও x_2 এর মান-নির্দেশক এই ভগ্নাংশদ্বয়ের মধ্যে মূল সমীকরণদ্বয়ের ডানপক্ষ (b_1 এবং b_2) নেই। এটিও একটি লক্ষ্য করার বিষয়। ফলে অভিন্ন সহগসম্পন্ন অন্য যে-কোনো সমীকরণগুচ্ছকে সমাধান করার জন্য উপরোক্ত সূত্রদ্বয়কে সহজেই ব্যবহার করা যায়। যেমন :

$$a_1x + b_1y = m_1$$
$$a_2x + b_2y = m_2$$

এই সমীকরণদ্বয়ের x এবং y এর মান নির্ণয় করতে পূর্বোক্ত হরকে আর নোতুন ক'রে নির্ণয় করতে হবে না, শুধু লবদ্বয়কে (numerators) উপরোক্ত কায়দায় হিসাব করলেই চলবে। তাহলে নির্দিষ্ট সহগসম্পন্ন একগুচ্ছ সরল সহ-সমীকরণকে তাদের ডানপক্ষকে পরিবর্তন ক'রে x ও y এর মান নিয়ে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করার প্রয়োজন হলে সেক্ষেত্রে উপরোক্ত হরকে বারবার ব্যবহার ক'রে লাভবান হওয়া যায়, কারণ তাতে, অন্ততপক্ষে, হিসাব সহজ হয়। অতএব এই রাশিটিকে বিশেষ গুরুত্বের সাথে বিবেচনা এবং পর্যবেক্ষণ করা যায়।

উক্ত রাশির আরেকটি চমৎকার বৈশিষ্ট্য হলো এই যে, তা যে শুধু কোনো এক গুচ্ছ সরল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করার জন্য ব্যবহৃত হতে পারে তা নয়, *কোনো সমীকরণের আদৌ কোনো সমাধান আছে কি না তা নির্ণয় করার জন্যও রাশিটি ব্যবহৃত হতে পারে।* এ কথা সবার জানা আছে যে, বাস্তব সংখ্যার ভুবনে কোনো সংখ্যাকে শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না, বা এরূপ ভাগ সংজ্ঞায়িত (defined) নয়। ফলে, আলোচ্য হরের মান যদি শূন্য হয়, তাহলে x ও y এর কোনো সাধারণ সমাধান নেই ব'লে ধ'রে নেয়া যাবে; তখন পুরা সিস্টেমটিকে আর সমাধান করার প্রয়োজন হবে না (কারণ, একটু পরেই আমরা জানব যে পূর্বোক্ত সূত্রদ্বয়ের সাহায্য না নিয়েও উক্ত রাশির মান বের করা যায়)। অর্থাৎ, সিস্টেমাটির সমাধান আছে যদি :

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

এর মান শূন্য *না হয়*। এই রাশিটিকে বলে *নির্ণায়ক* (determinant)। সরল সমীকরণের বিভিন্ন সিস্টেমের সমাধান করতে গিয়ে একটি বিশেষ প্যাটার্ন ধরা পড়ে এবং তা থেকেই ঐতিহাসিকভাবে নির্ণায়কের উদ্ভব হয়। তবে এমনটি নয় যে নির্ণায়ককে এখন শুধু সমীকরণের সিস্টেমের সাথেই সম্পৃক্ত ক'রে ভাবতে হবে। বরং সম্পূর্ণ স্বতন্ত্রভাবেই নির্ণায়কের সংজ্ঞা দেয়া যায় :

দ্বিতীয় পর্যায়ের [একটু পরে আলোচ্য] নির্ণায়ক হলো চারটি রাশি (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) এর মধ্যে একটি সম্পর্ক যা সর্বদা এরূপ : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}।

কিন্তু উক্ত রাশি চারটিকে সচরাচর নিচের মতো ক'রে বর্গাকারে সাজানো হয় :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

উপরোক্ত বর্গ-সজ্জায় ২টি সারি [বাম থেকে ডান দিকে] এবং ২টি কলাম [উপর থেকে নিচে]। একে বলে দ্বিতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক (determinant of the second order)। সারি এবং কলাম সংখ্যা 3টি ক'রে হলে তাকে বলে তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক। a_{11}, a_{12} ইত্যাদিকে বলে নির্ণায়কের **constituent** এবং $a_{21}a_{12}$, $a_{21}a_{12}$ ইত্যাদি গুণফলকে বলে নির্ণায়কের **element** বা উপাদান। তাহলে উপরোক্ত বর্গসজ্জা এবং পূর্বোক্ত সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক হলো :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

এখানে প্রতীকগুলিকে মুখস্থ রাখা আদৌ সমীচীন হবে না, তবে প্রতীকগুলির মধ্যকার ***সম্পর্ককে*** অবশ্যই মনে রাখতে হবে।

এতক্ষণে নিশ্চয়ই সচেতনভাবে লক্ষ্য করেছেন উক্ত বর্গাকৃতির দ্বিতীয় পর্যায়ের সজ্জা থেকে কিভাবে নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে হয়। ভালোভাবে লক্ষ্য করুন :

$$a_1x + b_1y = 0$$

$$a_2x + b_2y = 0$$

সমীকরণদ্বয়ের নির্ণায়ক হলো :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

নির্ণায়কের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যাবলী বিস্তারিত আলোচনা করার আগে আমরা ম্যাট্রিক্সের সাথে কিছুটা পরিচিত হব। তবে তার আগে নিচের উদাহরণটি দেখু এবং পরবর্তী অনুশীলনীটি করুন।

উদাহরণ—1 :

$$3x + 2y = 3,100$$

$$4x + 6y = 6,800$$

এই সমীকরণদ্বয়কে আপনি সমাধান করতে চান। কিন্তু যে-কোনো উদ্দেশ্যে হোক, প্রথম সমীকরণের 3,100-র স্থলে 9,000, 9,300, 7,790 এবং দ্বিতীয় সমীকরণের 6,800-র স্থলে যথাক্রমে 17,000, 19,400, এবং 7,620 বসিয়ে উক্ত সিস্টেমের সমাধান বের ক'রে x, y এর বিভিন্ন মান পর্যবেক্ষণ করতেও চান। তাহলে মোট 4টি সিস্টেম পাওয়া যাবে। এই চারটি সিস্টেমকে সমাধান করুন, এমনভাবে যেন প্রতিবার প্রথম থেকে সমাধান প্রক্রিয়া শুরু না করতে হয়।

সমাধান : এখানে নির্ণায়ক :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - 4.2 = 18 - 8 = 10$$

একে D দ্বারা চিহ্নিত করলে, D = 10।

প্রথম ক্ষেত্রে :

$$x = \frac{3,100(6) - 6,800(2)}{D}$$

$$= 500$$

$$y = \frac{6,800(3) - 3,100(4)}{D}$$

$$= 800$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :

$$x = \frac{9,000(6) - 17,000(2)}{D}$$

$$= 2,000$$

$$y = \frac{17,000(3) - 9,000(4)}{D}$$

$$= 1,500$$

তৃতীয় ক্ষেত্রে :

$$x = \frac{9,300(6) - 19,400(2)}{D}$$

$$= 1,700$$

$$y = \frac{19,400(3) - 9,300(4)}{D}$$

$$= 2,100$$

চতুর্থ ক্ষেত্রে :

$$x = \frac{7,790(6) - 7,620(2)}{D}$$

$$= 3,150$$

$$y = \frac{7,620(3) - 7,790(4)}{D}$$

$$= 830$$

FOOD FOR THOUGHT

নির্ণায়ক ব্যবহার ক'রে নিচের সহসমীকরণগুলোর কোনো সমাধান আছে কি না তা দেখান। [ব: দ্র: অসীম সংখ্যক সমাধান থাকলে নির্ণায়কের মান শূন্য আসবে। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে সিস্টেমটির কোনো নির্দিষ্ট সমাধান নেই।]

1. $2x + 3y = 0$
   $x + 4y = 3$
2. $2x + 3y = 5$
   $6x + 9y = 15$
3. $3x + 12y = 69$
   $x + 4y = 23$

ম্যাট্রিক্স হলো বর্গাকারে বা আয়তাকারে সজ্জিত রাশিসমষ্টি। (কিন্তু নির্ণায়ক অবশ্যই বর্গাকারের হবে।) একটি সহজ উদাহরণ নেয়া যাক। এক ব্যক্তির দুইটি দোকান আছে। প্রতি দোকানে সে মাত্র তিনটি দ্রব্য বিক্রি করে। প্রতি দ্রব্যের তিনটি ব্রান্ড। কোনো একটি বিশেষ দিনে তার দুই দোকানে দ্রব্য A_1, A_2, ও A_3 এর তিনটি ব্রান্ড B_1, B_2, B_3 এর বিক্রি ছিল নিম্নরূপ।

১ম দোকান

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 \\ 3 & 6 & 8 \\ 11 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

২য় দোকান

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

উপরের প্রতিটি বর্গাকৃতির উপস্থাপনকে বলে একটি *ম্যাট্রিক্স*। এখানে সংখ্যাগুলি দ্বারা দ্রব্যের সংখ্যা বুঝানো হয়েছে। এর প্রতিটি সংখ্যা একই সাথে একটি সারি (row) এবং একটি কলামের ছেদবিন্দু, যাকে বলে একটি এনট্রি **(entry)**। কয়েকটি এন্ট্রি হলো : $A_1B_1 = 5$, $A_2B_2 = 6$, $A_3B_3 = 0$ ইত্যাদি। এগুলি দ্বারা যা বুঝানো হচ্ছে তাকে উদাহরণ দিয়ে এভাবে দেখানো যায় ঃ প্রথম দোকানে দ্রব্য A_2 এর B_3 ব্রান্ড বিক্রি হয়েছে ৪টি, দ্বিতীয় দোকানে দ্রব্য A_1 এর B_2 ব্রান্ড বিক্রি হয়েছে 4টি, ইত্যাদি। এরূপ উপস্থাপন থেকে ব্যক্তিটি সহজেই হিসেব ক'রে বের করতে পারবে উক্ত দিনে উভয় দোকানে তার কোন দ্রব্যের কোন ব্রান্ড বিক্রি হয়েছে কতটি। এ কাজ করতে তাকে প্রথম ম্যাট্রিক্সের

কোনো এন্‌ট্রির সাথে অপর ম্যাট্রিক্সের *অনুরূপ* **(corresponding)** এন্‌ট্রি যোগ করতে হবে। যেমন :

দুই দোকানের ক্ষেত্রে :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & 5 & 13 & 18 \\ A_2 & 5 & 7 & 11 \\ A_3 & 18 & 5 & 2 \end{array}$$

যোগ করার পরও পাওয়া গেল একটি ম্যাট্রিক্স যাতে সারি এবং কলাম সংখ্যা পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্স দুটির মতো। এভাবে কোনো ম্যাটিক্সকে যোগ, বিয়োগ, গুণনের জন্য ব্যবহার করা যায়। শুধু তাই নয়, নির্দিষ্ট সংখ্যক সারি এবং কলাম সম্পন্ন সম্ভাব্য সকল ম্যাট্রিক্সকে একটি বিশেষ ধরনের সংখ্যার সিস্টেম বা গাণিতিক কাঠামো **(mathematical structure)** হিসেবেও বিবেচনা করা যায় যার নিজস্ব একক (যেমন স্বাভাবিক সংখ্যার একক হলো 1) এবং গুণাত্মক বিপরীত (inverse) আছে।

ম্যাট্রিক্সের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার হলো এই যে একাধিক সমীকরণের—বিশেষত সরল (linear) সমীকরণের—একটি সিস্টেমকে তা দ্বারা উপস্থাপন করা যায় এবং ম্যাট্রিক্সের নিজস্ব প্রক্রিয়ার (operation) মাধ্যমেই উক্ত সিস্টেমকে সমাধান করা যায়। এই পদ্ধতি পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে বিশ্লেষণযোগ্য এবং তা কম্পিউটারে ব্যবহারযোগ্য। একটি ছোট উদাহরণ নেয়া যাক।

নিচে একটি সহজ সহ-সমীকরণ আছে।

$$x - 2y + 3z = 9 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(i)}$$
$$y + 3z = 5 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(ii)}$$
$$2x - 5y + 5z = 17 \;.\;.\;.\;.\; \text{(iii)}$$

অপনয়নের (elimination) মাধ্যমে আমরা এর সমাধান করব। ধরা যাক (i) থেকে (ii) বাদ দেয়া হলো। সেক্ষেত্রে আমরা একটি নোতুন সমীকরণ পাব : $x - 2y + 3z - y - 3z = 9 - 5 \Rightarrow x - 3y = 4$। z উঠে গেছে দেখে সচরাচর অনেকে মনে করে চলক

z-ই নিশ্চিহ্ন হয়ে গেছে। কিন্তু আসলে z উঠে যায়নি, উঠে গেছে তার সহগ—অর্থাৎ z এর দুটি সহগকে পরস্পর থেকে বিয়োগ করার ফলে তা শূন্য হয়ে গেছে : . . . $3z - 3z \ldots \Rightarrow (3-3)\,z \Rightarrow 0.\,z \Rightarrow 0$। সুতরাং x, y, z কে বাদ দিয়ে শুধু সহগুলিকে নিয়েই আমরা সিস্টেমটির সমাধান বের করতে পারি। আবার উপরোক্ত বিয়োগ-প্রক্রিয়ার ফলে আমরা পেয়েছি $x - 3y = 4$, যাকে এভাবে লেখা যায় : $1.x - 3.y + 0.z = 4$। এবার নিচের ধাপগুলো লক্ষ্য করুন। ডানে ম্যাটিক্সের মাধ্যমে সমাধান দেখানো হলো।

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \ \ldots\ldots \text{(i)} \\ y + 3z &= 5 \ \ldots\ldots \text{(ii)} \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \ \ldots \text{(iii)} \end{aligned} \qquad (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 3 & : & 5 \\ 2 & -5 & 5 & : & 17 \end{bmatrix} \ (1)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \ \text{(iv)} \\ 0.x + y + 3z &= 5 \ \text{(v)} \\ 0.x - y - z &= -1 \ \text{(vi)} = \text{(iii)} - 2.\text{(i)} \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 3 & : & 5 \\ 0 & -1 & -1 & : & -1 \end{bmatrix} \ (2)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \ \text{(vii)} \\ 0.x + y + 3z &= 5 \ \text{(viii)} \\ 0.x + 0.y + 2z &= 4 \ \text{(ix)} = \text{(v)} + \text{(vi)} \end{aligned} \qquad (3) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 3 & : & 5 \\ 0 & 0 & 2 & : & 4 \end{bmatrix} \ (3)$$

$$\begin{aligned} x + 0.y + 9z &= 19 \ \text{(x)} = \text{(vii)} + 2.\text{(viii)} \\ 0.x + y + 3z &= 5 \ \text{(xi)} \\ 0.x + 0.y + 2z &= 4 \ \text{(xii)} \end{aligned} \qquad (4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & : & 19 \\ 0 & 1 & 3 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \ (4)$$

$$\begin{aligned} x + 0.y + 9z &= 19 \ \text{(xiii)} \\ 0.x + y + 3z &= 5 \ \text{(xiv)} \\ 0.x + 0.y + z &= 2 \ \text{(xv)} = \text{(xii)} \div 2 \end{aligned} \qquad (5) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & : & 19 \\ 0 & 1 & 3 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \ (5)$$

$$\begin{aligned} x + 0.y + 0.z &= 1 \text{(xvi)} = \text{(xiii)} + 9\text{(xv)} \\ 0.x + y + 0.z &= -1 \text{(xvii)} = \text{(xiv)} - 3\text{(xv)} \\ 0.x + 0.y + z &= 2 \end{aligned} \qquad (6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \ (6)$$

সুতরাং সিস্টেমটির সমাধান $x = 1, y = -1, z = 2$।

এই ম্যাট্রিক্সটির সমাধান সম্ভব কিনা তা প্রথমেই নির্ণয় করা যেত তার নির্ণায়কের মাধ্যমে। কিন্তু আমরা এখনও দেখিনি কিভাবে তৃতীয় পর্যায়ের (of the third order, অর্থাৎ তিনটি সারি ও তিনটি কলাম-বিশিষ্ট) নির্ণায়কের মান হিসাব করতে হয়। শুধু তাই নয়, নির্ণায়কের মাধ্যমেই সিস্টেমটির সমাধান করা যেত, যা আমরা পরে দেখব। একটি জিনিস লক্ষ্য করুন : ম্যাট্রিক্সকে যেখানে সচরাচর নির্দেশ করা হয় [ ] চিহ্নের মাধ্যমে, সেখানে নির্ণায়ককে নির্দেশ করা হয় | | চিহ্নের মাধ্যমে।

উদাহরণ–2 : $a_1x + b_1 = 0 \ldots .$ (i)

$a_2x + b_2 = 0 \ldots .$ (ii)

কোন শর্তে এই সহ-সমীকরণটির একটি সাধারণ মূল থাকবে—অর্থাৎ কোন শর্তে সহ-সমীকরণটি সমাধানযোগ্য?

সমাধান : এখানে সমীকরণ দুটি সুষম (homogeneous—অর্থাৎ প্রত্যেকটির ডানপাশে শূন্য আছে)। এখন (i) কে b_2 এবং (ii) কে b_1 দ্বারা গুণন ক'রে এবং প্রাপ্ত (i) থেকে (ii) বিয়োগ ক'রে পাওয়া যায় :

$$a_1b_2x + b_1b_2 - a_2b_1x - b_2b_1 = 0$$
$$a_1b_2x - a_2b_1x + b_1b_2 - b_1b_2 = 0$$
$$a_1b_2x - a_2b_1x = 0$$
$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$
$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

সুতরাং $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ হলে, অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হলে, উক্ত সহ-সমীকরণের নির্দিষ্ট সমাধান থাকবে।

[বিঃ দ্রঃ সিস্টেমটি সুষম (homogeneous) ব'লে এ কথা সত্য। তা সুষম না হলে, অর্থাৎ সমীকরণগুলির ডানপক্ষ শূন্য না হলে, এ কথা সত্য হতো না। সেক্ষেত্রে এই অধ্যায়ের একেবারে প্রথমে প্রদত্ত সিস্টেম সম্পর্কে উক্ত শর্তটি সত্য হতো।]

উদাহরণ -3 : কোন শর্তে—

$$a_1x + b_1y = 0$$
$$a_2x + b_2y = 0$$

সমীকরণদ্বয় যুগপৎ (simultaneously) সমাধানযোগ্য?

সমাধান : সিস্টেমটি সুষম। ফলে :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এই নির্ণায়কটির মান শূন্য হলে এর নির্দিষ্ট সমাধান থাকবে।

উদাহরণ-4 : কোন শর্তে

$$a_1x + b_1y = c_1 \; .\,.\,.\,. \text{(i)}$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \; .\,.\,.\,. \text{(ii)}$$

সিস্টেমটির যুগপৎ সমাধান থাকবে?

সমাধান : (i) কে b_2 দ্বারা এবং (ii) কে b_1 দ্বারা গুণন ক'রে এবং প্রাপ্ত (i) থেকে (ii) বিয়োগ ক'রে :

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$$
$$\underline{\begin{array}{l} a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \\ (-) \qquad\quad (-) \qquad\quad (-) \end{array}}$$

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$$
$$x\,(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$
$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\mathbf{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

এবার (i) কে a_2 এবং (ii) কে a_1 দ্বারা গুণন ক'রে এবং (i) থেকে (ii) বিয়োগ ক'রে :

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{\mathbf{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

এখানে আমরা একেবারে প্রথম উদাহরণের সেই শর্তটি পেয়েছি : সমীকরণদ্বয়ের নির্দিষ্ট সাধারণ সমাধান থাকবে যদি

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কটির মান শূন্য না হয়।

মন্তব্য : একটি বিশেষ জিনিস লক্ষ্য করুন : উদাহরণ–3 এ যে-নির্ণায়কের মান শূন্য হলে সংশ্লিষ্ট সিস্টেমটির সাধারণ সমাধান থাকবে, উদাহরণ–4 এ সেই একই নির্ণায়কের মান শূন্য হলে ফল হবে উল্টো। কেন? কারণ প্রথম সিস্টেমটি সুষম, অথচ দ্বিতীয়টি তা নয়। ফলে উদাহরণ–4 এ প্রদত্ত কোনো সিস্টেমের বা অ-সুষম কোনো সিস্টেমের সমাধানযোগ্যতা নির্ণয় করতে হলে উক্ত উদাহরণে প্রদত্ত শর্তটি যাচাই করতে হবে, উদাহরণ–3 এ প্রদত্ত শর্ত নয়; কারণ, সেরূপ সমীকরণগুচ্ছের ডানপক্ষকে বামপার্শ্বে এনে ডানে শূন্য বসাতে চাইলে প্রাপ্ত নির্ণায়কে সারি-সংখ্যার চেয়ে কলাম-সংখ্যা বেশি হয়ে যেতে পারে। যেমন :

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0$$

এর (a, b, c) এর নির্ণায়ক বের করা সম্ভব নয়। নির্ণায়ক হয় সর্বদা বর্গাকৃতির, যা আমরা আগেই জেনেছি। অবশ্য এখন কারো কারো মনে হতে পারে যে এর সাথে আরেকটি সমীকরণ থাকলে তা সম্ভব হতো যেমন :

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y - c_3 = 0$$

কিন্তু তা হতো না, কারণ মাত্র দুইটি চলক $(x_1 y)$-এর জন্য তিনটি সমীকরণ কেন? তাহলে বুঝতে হবে একটি সমীকরণ নিশ্চয়ই অতিরিক্ত (redundant); অর্থাৎ তা অন্য কোনোটির সমতুল (equivalent), যেমন :

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$6x + 9y + 21 = 0$$

সমীকরণদ্বয় সমতুল। এখানে প্রথমটিকে 3 দ্বারা গুণন করলে দ্বিতীয়টি পাওয়া যায়। অর্থাৎ উভয় সমীকরণে একই কথা বলা হয়েছে। পরে আমরা দেখব যে এরূপ নির্ণায়ক অর্থহীন। অবশ্য বাংলাদেশের কিছু কিছু বইতে এরূপ উদাহরণ এবং ব্যাখ্যাই দেয়া হয়েছে।

তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের মান

(The Value of a Determinant of Order Three)

আমরা এর আগে দেখেছি যে দ্বিতীয় পর্যায়ের (অর্থাৎ দু'টি সারি এবং দু'টি কলাম সম্পন্ন) নির্ণায়কের মান বের করা খুবই সহজ। কিন্তু তৃতীয় বা তদূর্ধ্ব পর্যায়ের নির্ণায়কের মান বের করা আরেকটু কষ্টসাধ্য এবং সে-সব ক্ষেত্রে ***অনুরাশি*** **(minor)** এবং ***সহগুণক*** **(cofactor)** নামক দুটি রাশির ধারণার সাথে পরিচিত হওয়া এবং তা ব্যবহার করা সুবিধাজনক। এই রাশি দুটির সাথে পরিচিত হয়ে আমরা পরে বিস্তারিতভাবে দেখব কিভাবে কোনো নির্ণায়ককে সেগুলির মাধ্যমে ***বিস্তৃত*** **(expand)** করতে হয় এবং সেভাবে নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করতে হয়। যদিও এই বইতে সর্বোচ্চ তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের আলোচনাকে প্রাধান্য দেয়া হবে, তবুও তা থেকে অর্জিত জ্ঞানকে আমরা চতুর্থ পর্যায়ের নির্ণায়কের ওপরও প্রয়োগ ক'রে দেখব।

অনুরাশি (Minor)

কোনো বর্গ-ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি এনট্রির জন্য একেকটি অনুরাশি থাকে। কোনো এনট্রি a_{ij} (অর্থাৎ i-তম সারির j-তম কলামের এনট্রি)-এর অনুরাশি হলো উক্ত ম্যাট্রিক্সের i-তম সারি এবং j-তম কলামকে অগ্রাহ্য ক'রে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক। যেমন :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির a_{21}-এর অনুরাশি M_{21} হলো—

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$$

এবং a_{22} এর অনুরাশি M_{22} হলো :

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

সহগুণক (Cofactor)

কোনো ম্যাট্রিক্সের কোনো এনট্রি a_{ij} এর সহগুণক পাওয়া যাবে উক্ত এনট্রির অনুরাশিকে $(-1)^{i+j}$ দ্বারা গুণন ক'রে। অর্থাৎ অনুরাশি এবং সহগুণকের মান অভিন্ন তবে চিহ্ন ভিন্ন হতে পারে। যেমন, উপরে প্রদর্শিত a_{21} এর সহগুণক হবে $(-1)^{2+1}.\ M_{21} = (-1)^3.M_{21} = (-1).M_{21} = -M_{21}$। এই চিহ্নের রীতি হচ্ছে নিচের মতো :

সহগুণকের চিহ্নের রীতি ঃ

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

3 × 3 ম্যাট্রিক্স

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

4 × 4 ম্যাট্রিক্স

$$\begin{bmatrix} + - + - + - + \ldots \\ - + - + - + - \ldots \\ + - + - + - + \ldots \\ - + - + - + - \ldots \\ + - + - + - + \ldots \\ - + - + - + - \ldots \\ + - + - + - + \ldots \end{bmatrix}$$

n × n ম্যাট্রিক্স

উদাহরণ–4 : নিচের ম্যাট্রিক্সটির সবগুলি অনুরাশি এবং সহগুণক বের করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

সমাধান : অনুরাশি M_{11} :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -1(1) - 0(2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

অনুরাশি M_{12} :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 4.2 = -5$$

একই প্রক্রিয়ায় পাওয়া যায় :

$$\begin{array}{lll} M_{11} = -1 & M_{12} = -5 & M_{13} = 4 \\ M_{21} = 2 & M_{22} = -4 & M_{23} = -8 \\ M_{31} = 5 & M_{32} = -3 & M_{33} = -6 \end{array}$$

এখন পূর্বোক্ত চিহ্নের রীতি অনুসারে সংশ্লিষ্ট সহগুণকগুলি হলো :

$$\begin{array}{lll} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{array}$$

নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of a Determinant)

এখন কোনো নির্ণায়ককে তার সহগুণকের মাধ্যমে বিস্তৃত ক'রে (expanding by cofactors) তার মান নির্ণয় করা যাবে। বিস্তৃতির নিয়ম হলো ঃ

> $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \ldots a_{ij}C_{ij}$ যেখানে C_{ij}গুলির চিহ্ন যোগবোধক থেকে পর্যায়ক্রমে পাল্টে যাবে।

অর্থাৎ কোনো ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হলো তার *যে-কোনো সারি বা কলামের* প্রতিটি এনট্রি এবং সংশ্লিষ্ট সহগুণকের গুণফলের সমষ্টি। এখানে $|A|$ চিহ্ন দ্বারা ম্যাট্রিক্স [A] এর নির্ণায়ককে বুঝানো হচ্ছে।

উদাহরণ–5 : নির্ণায়ক বের করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

সমাধান : নির্ণায়ক $|A| = 0.C_{11} + 2.C_{12} + 1.C_{13}$ যেখানে C_{11}, C_{12} ইত্যাদি দ্বারা সংশ্লিষ্ট সহগুণককে নির্দেশ করা হচ্ছে। পূর্ববর্তী উদাহরণ থেকে C_{ij} এর মানগুলো বসিয়ে পাওয়া যায় :

$$|A| = 0 + 2.5 + 1.4$$
$$= 14$$

এখানে যে-কোনো সারি বা কলামকে হিসাবে এনেও নির্ণায়ক বের করা যেত। যাচাই ক'রে দেখা যাক।

দ্বিতীয় সারি থেকে : $|A| = 3.C_{21} + (-1).C_{22} + 2.C_{23}$

$$= 3(-2) + (-1)(-4) + 2.8$$
$$= 14$$

তৃতীয় সারি থেকে : $|A| = 4.C_{31} + 0.C_{32} + 1.C_{33}$

$$= 4.5 + 0 + 1(-6)$$
$$= 14$$

প্রথম কলাম থেকে : $|A| = 0.C_{11} + 3.C_{21} + 4.C_{31}$

$$= 0 + 3(-2) + 4(5)$$
$$= 14$$

তৃতীয় কলাম থেকে : $|A| = 1.C_{13} + 2.C_{23} + 1.C_{33}$

$= 1.4 + 2.8 + 1 (-6)$

$= 14$

ইত্যাদি।

> ***একটি কৌশল :*** যেহেতু নির্ণায়কের মান নির্ণয়ের জন্য যে-কোনো সারি বা কলামকে বিস্তৃত করা যায়, সেহেতু সেই সারি বা কলামটি নেয়া সুবিধাজনক যাতে সর্বাধিক সংখ্যক শূন্য আছে। নিচের উদাহরণটি দেখুন।

উদাহরণ–6 : নিচের 4×4 (পড়া হয় **ফোর বাই ফোর**) ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক বের করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

সমাধান ঃ যেহেতু শেষের সারিটিতে শূন্য বেশি, সেহেতু হিসাবের সুবিধার জন্য উক্ত সারিকেই বিস্তৃত করা যাক।

$$|A| = 2.C_{41} + 0 + 0 + 1.C_{44}$$
$$= 2.C_{41} + C_{44}$$

যেখানে C_{ij} হলো i^{th} (i-তম) সারি এবং j^{th} (j-তম) কলামের সহগুণক।

এখন : $C_{41} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

এর প্রথম সারি সহগুণকগুলিকে বিস্তৃত ক'রে :

$$C_{14} = (-1) \left[0. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + (-1).4. \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (-1) [0 + (-1).4. \{20 - (-2)\} + 1 \{30 - 0\}]$$

$$= (-1) [- 88 + 30]$$

$$= (-1)\,[-58]$$
$$= 58$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

প্রথম সারিকে বিস্তৃত ক'রে :

$$C_{44} = 2.\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\,0.\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 4.\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= 2.\{30 - 0\} + 0 + 4\{2 - 0\}$$
$$= 60 + 0 + 8$$
$$= 64$$

$$\therefore |A| = 2.58 + 68$$
$$= 116 + 64$$
$$= 184$$

বিঃ দ্রঃ যে-ক্ষেত্রে ঋণাত্মক চিহ্ন প্রয়োজন, কেবল সেক্ষেত্রেই (–1) গুণন করা হয়েছে।

বিঃ দ্রঃ ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়কের মধ্যকার পার্থক্য ভালোভাবে লক্ষ্য করুন! নির্ণায়ক হলো একটি মাত্র সংখ্যা বা রাশি, যেমন উপরোক্ত উদাহরণের নির্ণায়ক হলো 184।

উদাহরণ–7 : নিচের নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করুন।

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

সমাধান : প্রথম সারিকে বিস্তৃত (expand) করা যাক।

$$D = 0.C_{11} + 2.C_{12} + 1.C_{13}$$
$$= 2.C_{12} + 1.C_{13}$$

এখানে $C_{12} = (-)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\left| 3.1 - 4.2 \right| = -(-5) = 5$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 4(-1) = -12 + 4 = -8$$

$$\text{সুতরাং } D = 2 \,.\, 5 + 1 \,.\, (-8)$$
$$= 10 - 8$$
$$= 2$$

তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের জন্য একটি বিকল্প পদ্ধতি

(An Alternative Method for Determinants of the Third Order)

তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করার জন্য একটি বিশেষ পদ্ধতি আছে যা কেবল তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের জন্যই ব্যবহৃত হতে পারে। পদ্ধতিটির সবেচেয় বড় সুবিধা হলো এই যে এতে চিহ্নের এবং সহগুণক (cofactor) নির্ণয়ের ঝামেলা নেই। পদ্ধতিটি নিম্নরূপ। মূল নির্ণায়কের উপস্থাপন যদি হয় এরূপ :

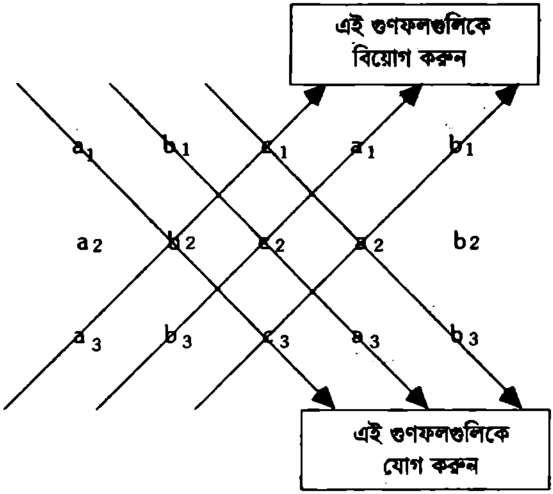
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

তাহলে একে নিচের কায়দায় নোতুন ক'রে সাজাতে হবে ঃ প্রথম এবং দ্বিতীয় কলামকে ডানে আবারও লিখতে হবে, যার ফলে মোট পাঁচটি কলাম পাওয়া যাবে :

এখানেও বসানো হলো

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}}$$

এবার নিচের চিত্রের মতো ক'রে ঠিক তিনটি কর্ণ (diagonal) বরাবর সংখ্যাগুলির গুণফল নির্ণয় ক'রে নিচের গুণফলগুলিকে যোগ ক'রে তা থেকে উপরের গুণফলগুলিকে বিয়োগ করতে হবে।



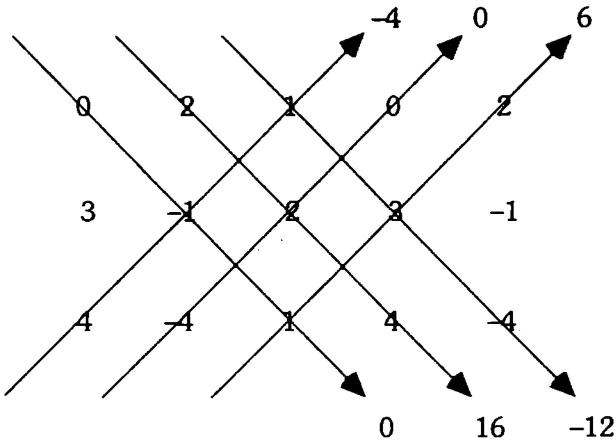
ফলে ঃ

$$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

উদাহরণ–৪ : নির্ণায়কটির মান বের করুন :

$$D \equiv \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

সমাধান : যেহেতু এটি একটি তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক, সেহেতু এর মান নিচের বিশেষ কৌশলে নির্ণয় করা যায়। প্রথম এবং দ্বিতীয় কলামগুলিকে আবারও শেষে যুক্ত ক'রে, এবং চিত্রে নির্দেশিত গুণফলগুলি বের ক'রে :



নিচের গুণফলগুলির যোগফল : $16 + (-12) = 4$

উপরের গুণফলগুলির যোগফল : $-4 + 6 = 2$

সুতরাং $D = 4 - 2 = 2$

সত্য কথা বলতে কি, তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের মান নির্ণয়ের জন্য উপরোক্ত পদ্ধতিটিই সবচেয়ে বেশি সুবিধাজনক। কিন্তু উচ্চতর পর্যায়ের নির্ণায়কের মান বের করার জন্য সহগুণকের মাধ্যমেই তার কোনো সারি বা কলামকে বিস্তৃত করা হয়। তবে উক্ত পদ্ধতিকেও আরো সহজ করা যায়, যা আমরা নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্যাবলী (properties) আলোচনা করতে গিয়ে দেখব।

নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্যাবলী
(Properties of Determinants)

এখন নির্ণায়কের যে-সব বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করা হবে, সেগুলি যে-কোনো পর্যায়ের নির্ণায়কের ক্ষেত্রে সত্য।

নির্ণায়ক বনাম সারি ও কলাম : নিচের নির্ণায়কটি দেখুন :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\,(-9) - 3\,(4) = -30$$

এবার এই নির্ণায়কটির সারিদ্বয়ের স্থান পরিবর্তিত ক'রে প্রাপ্ত নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করা যাক :

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 18 = 30$$

কলামদ্বয়কে বিনিময় (interchange) ক'রে :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 18 = 30$$

দেখা যাচ্ছে যে কোনো নির্ণায়কের দু'টি সারিকে বা কলামকে পরস্পর বিনিময় করলে তার মানের পরিবর্তন হয় না, কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়। এ কথা সকল নির্ণায়কের ক্ষেত্রে সত্য। সুতরাং—

1। ম্যাট্রিক্স A এর দুটি সারি বা কলামকে বিনিময় ক'রে যদি ম্যাট্রিক্স B পাওয়া যায়, তাহলে

$$|B| = -|A|$$

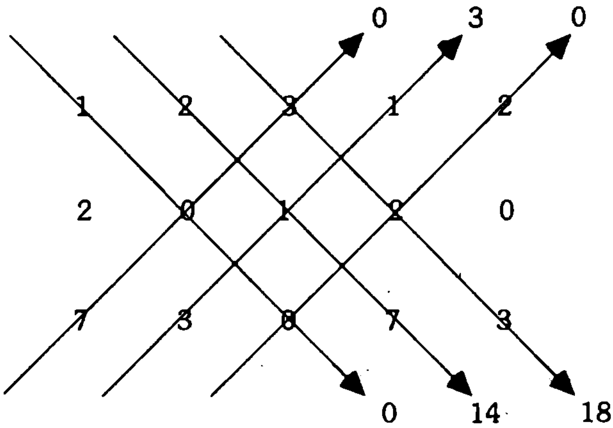
প্রমাণ : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

আবার $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$

কিন্তু নিচের নির্ণায়কটি লক্ষ্য করুন :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

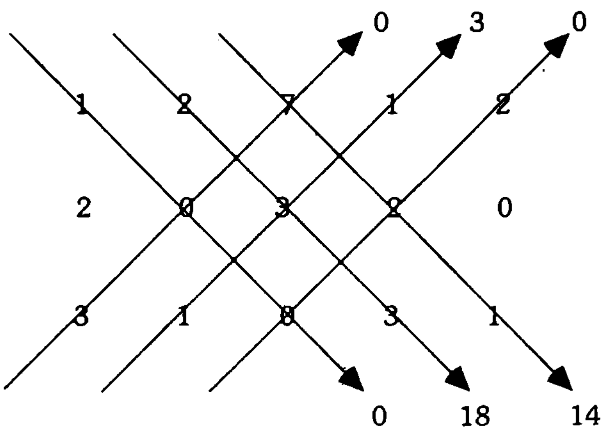
এর মান নির্ণয় করা যাক :



$D_1 = (0 + 14 + 18) - (0 + 3 + 0) = 29$

এবার D_1-এর প্রত্যেকটি অনুরূপ (corresponding) সারি এবং কলামকে পরস্পর বিনিময় ক'রে—অর্থাৎ প্রথম সারিকে (বা কলামকে) প্রথম কলামে (বা সারিতে), দ্বিতীয় সারিকে (বা কলামকে) দ্বিতীয় কলামে (বা সারিতে), ইত্যাদি কায়দায় বসিয়ে—প্রাপ্ত নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা যাক।

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



$D_2 = (0 + 18 + 14) - (0 + 3 + 0) = 29$

দেখা যাচ্ছে যে $D_1 = D_2$। এই বৈশিষ্ট্য সব পর্যায়ের নির্ণায়কের বেলায় সত্য। সুতরাং—

[redacted]

প্রমাণ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

উপরোক্ত বিস্তৃত রূপকে এভাবে লেখা যায় :

$$a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1a_3c_2 - c_1a_3b_2$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 + c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়কের জন্য উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

এবার নিচের উদাহরণটি দেখুন :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

এখন D_1 এর প্রথম সারিকে 2 দ্বারা গুণন ক'রে তা তৃতীয় সারির সাথে যোগ ক'রে তৃতীয় সারিকে নোতুন ক'রে গঠন করা যাক :

$$D2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4+1 & 6+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 20 - 15 = 5$$

দেখা যাচ্ছে যে $D_1 = D_2$ অর্থাৎ—

3. কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ (similar) হলে নির্ণায়কটির মান হবে শূন্য (0)।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

উপরের নির্ণায়কটিতে প্রথম এবং দ্বিতীয় কলাম একই, যার ফলে নির্ণায়কটির মান শূন্য।

প্রমাণ : নির্ণায়কটির প্রথম ও দ্বিতীয় কলামকে পরস্পরের স্থানে পরিবর্তিত করলে পাওয়া যায় :

$$-D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

কিন্তু স্পষ্টভাবে দেখা যাচ্ছে যে বর্গাকারে সজ্জিত নির্ণায়ক দুটি একই। ফলে :

$$D = -D$$

বা, $D + D = 0$

বা, $2D = 0$

বা, $D = 0$ প্রমাণিত।

[illegible] সেই মান পাওয়া যায়।

এ থেকে বুঝা যাচ্ছে যে সমাধানের সুবিধার জন্য কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামকে কোনো সুবিধাজনক সংখ্যা দ্বারা গুণন করতে হলে সমতা ঠিক রাখার জন্য তার মানের সাথেও উক্ত রাশি গুণন করতে হবে।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{হলে } m \times D = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ইত্যাদি।

অন্যভাবে :

$$m \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ :

সহগুণকের বিধি অনুসারে :

প্রথম নির্ণায়কটির মান, D =

m ($a_1 \times a_1$-এর সহগুণক + $b_1 \times b_1$-এর সহগুণক + $c_1 \times c_1$ এর সহগুণক)

$m\,(a_1 \times C_1 + b_1 \times C_2 + c_1 \times C_3)$

দ্বিতীয় নির্ণায়কটির মান, D′ =

$ma_1 \times ma_1$-এর সহগুণক + $mb_1 \times mb_1$-এর সহগুণক + $mc_1 \times mc_1$ এর সহগুণক

$= ma_1 \times C_1 + mb_1 \times C_2 + mc_1 \times C_3$

$= m\,(a_1 \times C_1 + b_1 \times C_2 + c_1 \times C_3)$

সুতরাং D = D′ প্রমাণিত।

একটি উদাহরণ :

নিচের নির্ণায়কটি দেখুন।

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

পূর্ববর্তী নিয়ম–3 অনুসারে D = 0। তাহলে :

$$D' = \begin{vmatrix} 9 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

সহজ উত্তর। D′ = 0। যেহেতু D-এর প্রথম সারিকে একই ধ্রুব সংখ্যা, m, দ্বারা গুণন করা হয়েছে, সেহেতু

$$D' = D \times m \text{ (নিয়ম–4 অনুসারে)}$$
$$= 0 \times m$$
$$= 0$$

অবশ্য প্রথম দুটি কলাম দেখেই একথা ব'লে দেয়া যেত (কেবল নিয়ম–3 এর সাহায্য নিয়ে)।

৫। কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি বা কলামের উপাদানগুলিকে দুটি সংখ্যার যোগফল হিসেবে প্রকাশ করলে নির্ণায়কটিকে দুটি আলাদা নির্ণায়কের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। অন্যভাবে বলা যায়, কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের উপাদানগুলির প্রত্যেকটি দুইটি উপাদানের যোগফল হলে, ঐ নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : উপরোক্ত নির্ণায়কগুলির মানকে যথাক্রমে D_1, D_2, D_3 হিসেবে ধ'রে নেই। তাহলে সহগুণকের নিয়ম অনুসারে :

$$D_1 = (a_1 + m_1)C_1 + (a_2 + m_2)C_2 + (a_3 + m_3)C_3$$
$$D_2 = a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3$$
$$D_3 = m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3$$

এখন : $D_2 + D_3$

$$= a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 + m_1C_1 + m_2C_2 = m_3C_3$$
$$= (a_1 + m_1)C_1 + (a_2 + m_2)C_2 + (a_3 + m_3)C_3$$
$= D_1$ প্রমাণিত।

6. নিয়ম-4 এবং 5 থেকে [illegible]

ফলে—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm mc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : নিয়ম-4 এবং 5 এর প্রসঙ্গ তোলার সাথে সাথেই প্রমাণের পদ্ধতিটি মনের মধ্যে এসে যায়।

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm mc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \pm mc_1 & b_1 & c_1 \\ \pm mc_2 & b_2 & c_2 \\ \pm mc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{[নিয়ম-5 অনুসারে]}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{[নিয়ম-4 অনুসারে]}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm m \times 0$$ [নিয়ম-3 অনুসারে]

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ প্রমাণিত।

নির্ণায়কের প্রয়োগ
(Application of Determinants)

নির্ণায়ক ব্যবহার ক'রে যে সরল সমীকরণের একটি সিস্টেমের (a system of linear equations) সমাধান বের করা যায় তা আমরা আগেই জেনেছি। এই ধারণাটি স্পষ্ট হয়ে ওঠে একটি পদ্ধতিতে, যার নাম Cramer's Rule (সুইজারল্যান্ডের গণিতবিদ Gabriel Cramer (1704—1752)-এর নামানুসারে। তিনি এই পদ্ধতিটি বের করেন। তাঁর এই পদ্ধতিটি নির্ণায়কের ব্যবহারের প্রতি গণিতবিদদেরকে আকৃষ্ট ক'রে তোলে। তিনি Cramer's Paradox নামে cubic curve সম্পর্কে একটি তথ্যও আবিষ্কার করেন। গাণিতিক অর্থনীতিতে probability তত্ত্বের প্রয়োগের নোতুন ক্ষেত্রও তিনি উন্মোচিত করেন। তিনি মাত্র বিশ বছর বয়সে গণিতের প্রফেসর হন, যা অন্তত গণিতবিদদের ইতিহাসে বেশি বিস্ময়কর কোনো ঘটনা নয়। অবশ্য তিনি 1750 সালে, তাঁর মৃত্যুর মাত্র দুবছর আগে, দর্শনের প্রফেসর হিসেবেও নিয়োগ পান।) এই নিয়ম অনুসারে কোনো সিস্টেমের সমাধান কেবল নির্ণায়কের মাধ্যমেও করা সম্ভব। নিচের উদাহরণের মাধ্যমে পদ্ধতিটি উপস্থাপন করা হলো।

দুইটি এক-ঘাত সহ-সমীকরণ নেয়া যাক :

$$a_1x + b_1y = k_1$$
$$a_2x + b_2y = k_2$$

প্রথম সমীকরণকে b_2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণন ক'রে এবং বিয়োগ ক'রে (y-কে অপনয়ন করার উদ্দেশ্যে) :

$$\begin{array}{r} a_1b_2x + b_1b_2y = k_1b_2 \\ -(a_2b_1x + b_1b_2y = k_2b_1) \\ \hline a_1b_2x - a_2b_1x = k_1b_2 - k_2b_1 \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = k_1b_2 - k_2b_1$$

$$x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

লক্ষ্য করুন, এখানে x এর সমাধানের লব (numerator) $k_1b_2 - k_2b_1$ কে এভাবেও লেখা যায় :

$$k_1b_2 - k_2b_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এভাবে হর (denominator) :

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

তাহলে আমরা x এর মানকে নিচের আকারে দুটি নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

একইভাবে y এর জন্য সমীকরণ দুটিকে সমাধান করা যাক। প্রথম সমীকরণকে a_2 এবং দ্বিতীয়টিকে a_1 দ্বারা গুণন ক'রে এবং তারপর বিয়োগ ক'রে (x কে অপনয়ন করার উদ্দেশ্যে) :

$$a_1a_2x + a_2b_1y = k_1a_2$$
$$\underline{-(a_1a_2x + b_1b_2y = k_2a_1)}$$
$$a_2b_1y - a_1b_2y = k_1a_2 - k_2a_1$$
$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = k_1a_2 - k_2a_1$$
$$y = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$$
$$\text{বা } y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

দুটি চমৎকার জিনিস লক্ষ্য করুন : 1) x এবং y উভয় রাশির মানের হর একই। একে D দ্বারা চিহ্নিত করা যাক। 2) x এর মানের লবকে পাওয়া যাচ্ছে D এর প্রথম কলামকে

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

দ্বারা অপসারিত ক'রে, যাকে আমরা নির্দেশ করব Dx দ্বারা :

$$Dx = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এবং y-এর মানের লবকে পাওয়া যাচ্ছে D-এর দ্বিতীয় কলামকে

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

দ্বারা অপসারিত ক'রে, যাকে আমরা Dy দ্বারা চিহ্নিত করব :

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

তাহলে : $x = \dfrac{Dx}{D}$

$$y = \frac{Dy}{D}$$

অর্থাৎ **Dx, Dy, D** এর মান জেনে **x** ও **y**-এর মান বের করা যায়। এটিই ক্রেমারের পদ্ধতি।

উদাহরণ : ক্রেমারের পদ্ধতি প্রয়োগ ক'রে নিচের সহসমীকরণ দুটির সমাধান করতে হবে।

$$2x - 3y = 1$$
$$5x + 4y = 7$$

সমাধান :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 5.(-3) = 8 + 15 = 23$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 7.(-3) = 4 + 21 = 25$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2.7 - 5.1 = 14 - 5 = 9$$

সুতরাং—

$$x = \frac{Dx}{D}$$

$$= \frac{25}{23}$$

$$y = \frac{Dy}{D}$$

$$= \frac{9}{23}$$

আরো বেশি-সংখ্যক চলক (variable, যেমন x, y, z) এবং সমীকরণ সম্বলিত সিস্টেমের সমাধানের ক্ষেত্রেও এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। আমরা এখানে তৃতীয় পর্যায়ের একটি উদাহরণ দেখব।

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$$

$$a_3x + v_3y + c_3z = k_3$$

এক্ষত্রেও :

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$$

D, Dx, Dy, Dz এর মান নিম্নরূপ :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Dx = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

উদাহরণ : নিচের সিস্টেমটিকে সমাধান করার জন্য Cramer's Rule ব্যবহার করতে হবে।

$$2x + 3y - z = 1$$
$$x - 2y + z = 4$$
$$x + y - z = 2$$

সমাধান :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(+2-1) - 3(-1-1) - 1(+1+2)$$
$$= 2(1) - 3(-2) - 1(+3)$$
$$= 2 + 6 - 3$$
$$= 5$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-1) - 3(-4-2) - (4+4)$$
$$= 1 + 18 - 8$$
$$= 11$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-2) - (-1-1) - (2-4)$$
$$= -12 + 2 + 2$$
$$= -8$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-4) - 3(2-4) + (1+2)$$
$$= -16 + 6 + 3$$
$$= -7$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{11}{5}$$
$$y = \frac{Dy}{D} = -\frac{8}{5}$$
$$z = \frac{Dz}{D} = -\frac{7}{5}$$

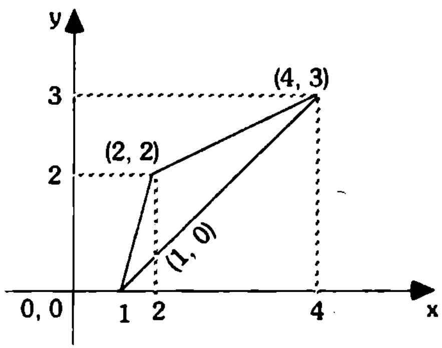
আমরা দেখলাম যে Camer's Rule ব্যবহার ক'রে কোনো system of linear equations-এর সমাধান বের করা তেমন কঠিন কিছু নয়। কিন্তু হিসাবের যান্ত্রিকতার বিচারে এর চেয়ে আরো কার্যকর পদ্ধতি আছে যা আমরা এখানে আলোচনা করব না। তাছাড়া Camer's Rule ব্যবহৃত হতে পারে কেবল সেসব ক্ষেত্রে যেখানে চলকের (বা অজানা রাশির) সংখ্যা সমীকরণের সংখ্যার সমান। এই সীমাবদ্ধতার কারণে অন্যান্য পদ্ধতিরও আবশ্যকতা আছে।

কয়েকটি সুন্দর উদাহরণ

বিশ্লেষণী জ্যামিতিতে (analytic geometry) নির্ণায়কের অনেক ব্যবহার আছে। আমরা তার কয়েকটি দেখব। উদাহরণগুলিকে পড়ার আগে কার্তেসীয় স্থানাংকতলে কোনো ফাংশান বা সমীকরণের চিত্র কিভাবে আঁকতে হয় তা জানা দরকার। কার্তেসীয় স্থানাংকতল হলো একটি তলের ওপর পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ-করা দুটি অক্ষ, যাদেরকে x অক্ষ এবং y-অক্ষ বলা হয় (নিচের চিত্র)। এতে সমীকরণের x এর মান x অক্ষ বরাবর এবং y এর মান (বা $f(x)$ এর মান) y অক্ষ বরাবর বসানো হয়। এভাবে এই তলে অনেক ধরনের জ্যামিতিক বস্তুর গাণিতিক চিত্রণ সম্ভব।

ধরা যাক একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(x, f(x))$ হলো $(1, 0)$, $(2, 2)$, এবং $(4, 3)$, যা নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে :

$$x_1 = 1$$
$$f(x_1) = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$f(x_2) = 2$$
$$x_3 = 4$$
$$f(x_3) = 3$$



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

স্কুল জ্যামিতি থেকে সবার জানা আছে যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা। কিন্তু এই সূত্রে এখানে কাজ হবে না, কারণ এক্ষেত্রে ভূমি এবং উচ্চতা কত তা আমাদের জানা নেই। কোনো উপায়ে তা জানা সম্ভব হলেও এ পর্যায়ে তা প্রাসঙ্গিক নয়। ত্রিভুজটি যে সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত তাদের সমীকরণ এখানে দেয়া হয়নি। তবে তা বের ক'রে নেয়া যায়। কিন্তু অত শত আমাদের দরকার হবে না। আমরা এখানে নির্ণায়ক ব্যবহার করব। নির্ণায়কের পদ্ধতি অনুসারে :

[illegible] নির্ণায়কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল [illegible]

[illegible] শীর্ষবিন্দুগুলি (x_1, y_1), (x_2, y_2) [illegible] (x_3, y_3) [illegible]

$$[illegible] \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[illegible]

সুতরাং প্রদত্ত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল, T, হবে :

$$T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{1(2.1 - 3.1) - 0.c_2 + 1(2.3 - 4.2)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{(2 - 3) + (6 - 8)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{-1 + (-2)\}$$

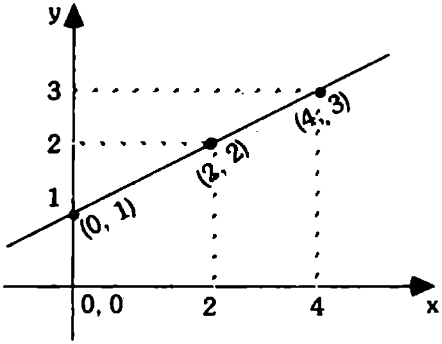
$$= \frac{1}{2} \{-3\}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}$$

সুতরাং $T = \frac{3}{2}$ বর্গ একক।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের এই ধারণা ব্যবহার ক'রে কোনো তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত কি না তা যাচাই করা যায়। নিচের চিত্রের বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত। যেহেতু এরা সবাই— একই সরলরেখায় অবস্থিত, সেহেতু এদের



ওপর পূর্বোক্ত ক্ষেত্রফলের সূত্রটি প্রয়োগ ক'রে ফল পাওয়া যাবে শূন্য। এখানে অবশ্য সূত্রটির $\frac{'1'}{2}$ ধ্রুবপদটির কোনো দরকার হবে না। তাহলে আমরা বলতে পারি :

[illegible] তিনটি বিন্দুর সমরেখিকতা যাচাই [illegible]

[illegible] (collinear) [illegible]

[illegible]

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[illegible] বিন্দু তিনটি ত্রিভুজ গঠন করে। [illegible]

তাহলে পূর্ববর্তী বিন্দু তিনটি সমরেখ কি না তা সূত্রটির মাধ্যমে যাচাই করা যাক।

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times c_1 - 1(2.1 - 4.1) + 1(2.3 - 4.2)$$

$$= 0 - (2 - 4) + (6 - 8)$$

$$= +2 - 2$$

$$= 0$$

যেহেতু নির্ণায়কটির মান শূন্য, সেহেতু বিন্দু তিনটি সমরেখ (অর্থাৎ একই সরলরেখায় অবস্থিত)।

বিষয়টিকে বেশ সহজ মনে হলো। এবার তাহলে বলুন তো আমাদের উক্ত উদ্দেশ্য সফল করার জন্য নির্ণায়ক ব্যবহার ক'রে ফল পাওয়া গেল কেন? অর্থাৎ, নির্ণায়কের সাথে বিন্দুত্রয়ের সমরেখতার সম্পর্ক আছে কেন? গাণিতিকভাবে নয়, সমীকরণের সাধারণ ধারণা ব্যবহার ক'রে চিন্তা ক'রে দেখুন কোনো জবাব মেলে কি না। অনেক সময়ে আন্দাজও আমাদেরকে বুদ্ধিমান ক'রে তুলতে পারে, নয় কি?

নির্ণায়ক ব্যবহার ক'রে দুটি প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাংক থেকে বিন্দু দুটিকে যুক্ত করলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার সমীকরণ বের করা যায়। বিন্দু দুটির স্থানাংক (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হলে সংশ্লিষ্ট সরলরেখাটির সমীকরণ হবে :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

একটি উদাহরণের মাধ্যমে সূত্রটিকে ব্যবহার করা যাক। (2, 4) এবং (–1, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ কী হবে?

তাহলে সমাধান ক'রে দেখা যাক।

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

বা $x(4.1 - 3.1) - y(2.1 - (-1)1) + 1(2.3 - (-1)4) = 0$

বা $x(4 - 3) - y(2 + 1) + (6 + 4) = 0$

বা $x - 3y + 10 = 0$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ : $x - 3y + 10 = 0$

এবার একটু পেছন দিকে চিন্তা করা যাক। আমরা তিনটি বিন্দুর সমরৈখিকতার সূত্রটি পেয়েছিলাম তাদের দ্বারা সম্ভাব্য ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রের সাহায্যে। কিন্তু উপরের সরলরেখার সূত্রের সাপেক্ষে একটু হালকা কল্পনা করলেও কিছুটা লাভবান হওয়া যেতে পারে।

$$x - 3y + 10 = 0$$

সমীকরণটি থেকে (x, y) এর অসংখ্য মান পাওয়া যেতে পারে। ধরা যাক এরূপ তিন জোড়া মান নেয়া হলো এবং মনে করা হলো যে উক্ত মান তিনটির বাকি দুটি ভিন্ন দুটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে। সেগুলি উপরোক্ত ত্রিভুজের উভয় পার্শ্বকে যথাক্রমে (উদাহরণস্বরূপ) 3 এবং 4 দ্বারা গুণন ক'রে পাওয়া যায় :

$$3x - 9y + 30 = 0$$

$$4x - 12y + 40 = 0$$

তাহলে প্রাপ্ত তিনটি সমীকরণের সাথে সরলরেখার চিন্তাকে না সম্পৃক্ত ক'রে ভেবে দেখা যেতে পারে এদের সমাধান কী। অর্থাৎ এই system of linear equations-এর সমাধানটি কী? তা নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা ক্রেমারের পদ্ধতি প্রয়োগ করতে পারি, যাতে D, Dx, Dy নির্ণয় করা লাগবে। কিন্তু D এর মান নির্ণয় করতে গিয়েই দেখা যাবে যে তার মান হচ্ছে শূন্য, কারণ তার একটি কলাম বা সারি অন্য একটি কলাম বা সারির সদৃশ। আর D এর শূন্য হওয়া মানেই হলো এই যে, systemটির কোনো গ্রহণযোগ্য সমাধান নেই, কিংবা সেগুলির অসংখ্য সমাধান আছে (অর্থাৎ তারা মূলত একই সমীকরণের বা রেখার বিভিন্ন প্রকাশ)। সুতরাং এ থেকেই বুঝা যাচ্ছে যে নির্ণায়কের সাহায্যে একাধিক বিন্দুর সমরৈখিকতার বা তাদের মধ্যদিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার ব্যাপারে সিদ্ধান্ত নেয়া যায়।

গণিতের নিজস্ব তত্ত্বগঠনের প্রয়োজনে নির্ণায়কের অনেক ব্যবহার রয়েছে যা নিয়ে এই বইতে আলোচনা করা সম্ভব নয়। সেসব আলোচনা চ'লে আসবে যথাযথ প্রসঙ্গের সাথেই।

আমাদের প্রকাশিত অন্যান্য বই—

বাংলা ভাষা পরিক্রমা (ব্যাকরণ ও রচনা)

— এস. এম. জাকির হুসাইন

বইটির বৈশিষ্ট্যাবলী :

বাংলা ব্যাকরণের বিভিন্ন বিষয় এমনভাবে বর্ণিত হয়েছে যে শিক্ষার্থীদেরকে কোনোকিছু না বুঝে মুখস্থ করার প্রয়োজন হবে না।

ষ-ত্ব বিধান, ণ-ত্ব বিধান, সন্ধি, সমাস, কারক, প্রকৃতি-প্রত্যয় ইত্যাদি ক্ষেত্রে উপস্থাপন পদ্ধতি এত সহজ এবং পদ্ধতিগত যে কোন শিক্ষার্থী অন্য কারও সাহায্য ছাড়াই সেগুলো পুরোপুরি বুঝতে সক্ষম হবে। সচরাচর কোন বাংলা ব্যাকরণ বই-ই শিক্ষার্থীদের সব প্রয়োজন মেটাতে পারে না। ফলে তাদেরকে একের অধিক বইয়ের সাহায্য নিতে হয়। এই দিকটা বিবেচনা করে এই বইতে সম্ভাব্য সব বিষয় অন্তর্ভুক্ত করার চেষ্টা করা হয়েছে।

বি. সি. এস. ও ডিগ্রী (পাশ ও সাবসিডিয়ারি, সম্মান) পর্যায়ের প্রয়োজনীয় রচনা, ভাবসম্প্রসারণ, সারাংশ ইত্যাদি এতে রয়েছে।

Tactics for Effective Reading and Critical Thinking

— by S. M. Zakir Hussain

Reading and Comprehension এর কৌশল সমন্বিত উদাহরণ। প্রচুর practice material-উত্তর এবং ব্যাখ্যাসহ। Comprehension এত জটিল জিনিস যে তা একমাত্র কৌশলে এবং practice এর মাধ্যমেই আয়ত্ত করা সম্ভব। এই বইটি পড়ে শেষ করলে আপনি শুধু degree পর্যায়ের নয়, GMAT, GRE, SAT, TOEFL এবং BCS এর Reading Comprehension গুলোর ১০০% উত্তর করতে পারবেন।

আরো থাকবে speed reading এর কৌশল। কিভাবে অল্প সময়ের মধ্যে জটিল passage পড়ে তার পূর্ণ অর্থ, Theme, Topic Sentence, Thematic structure, Assumption, Inference, Transitional Devices, Rhetorical Devices ইত্যাদি শুদ্ধভাবে উদ্ধার করা যায় সেই কৌশল। এসব কৌশল তাদেরও কাজে লাগবে যারা অল্প সময়ে অধিক প'ড়ে বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে চান। ফলে, গবেষক, business executive, শিক্ষক সবারই বইটি অত্যন্ত কাজে লাগবে। একটি passage মাত্র ১ বার পড়ে যে তার যাবতীয় ধরনের গসযরণ্র এবং implied meaning কিভাবে উদ্ধার করা যায়, এ বইতে তার পরিপূর্ণ কৌশল পাবেন। এরূপ একটি বই খোদ ইংরেজি ভাষাতেও বিরল। সহজ ইংরেজিতে লেখা। আপনি যদি জীবনে বেশি দূর এগিয়ে যেতে চান, তাহলে বইটি আপনার জন্য অবশ্যপাঠ্য। সাহিত্য, ইতিহাস, এবং সমাজবিজ্ঞানের বা বিজ্ঞানের যে-কোনো শাখার ছাত্রদের জন্য এটি একটি অনন্য বই। বইটি সংগ্রহে রাখুন এবং পড়ুন।

A Passage to the English Language

— by S. M. Zakir Hussain

ইংরেজি ভাষা গভীরভাবে, নির্ভুলভাবে, কারো সাহায্য ছাড়াই শেখার নিশ্চয়তার জন্য এই বইটি পড়ুন। MBA. BBA. Admission Test. TOEFL. GMAT. GRE. SAT. BCS-ইত্যাদি প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষাসহ অন্যান্য যে-কোন উচ্চতর পর্যায়ের প্রয়োজন মেটানোর জন্য এই বইটির উপর বিশ্বস্ত হ'য়ে নির্ভর করতে পারেন। সচরাচর আপনাকে grammar-এর সমূদয় প্রয়োজন মেটানোর জন্য একাধিক বই (দেশি এবং বিদেশি) এর শরণাপন্ন হতে হয়। কিন্তু আমাদের বিশ্বাস, এই একটিমাত্র বই-ই আপনাকে সেই ঝামেলা এবং অনিশ্চয়তা থেকে রেহাই দিতে পারে। বইটি পড়ে দেখুন, এবং এর উপর যে-কোন গঠনমূলক মন্তব্য ক'রে আমাদেরকে জানান। আমরা আপনার যে-কোন গঠনমূলক পরামর্শ সম্মানের সাথে মূল্যায়ন করব।

The Anatomy of the English Sentence

— by S. M. Zakir Hussain

বইতে রয়েছে—

(১) MBA. BBA ADmission Test. GMAT. GRE. SAT-তে যে-সব বিশাল জটিল ইংরেজি বাক্য প্রশ্ন হিসেবে দেওয়া হয়, কিভাবে তাদেরকে গঠন-শৈলী বিশ্লেষণ ক'রে অর্থ উদ্ধার করা যায় এবং sentence টির কোথায় ভুল আছে তা নির্ভুলভাবে, অত্যন্ত সহজে নির্ণয় করা যায় সেই কৌশল। পদ্ধতিটি কৌশলগত এবং

চমৎকার।

(২) কিভাবে নিজে নিজে ছোট বাক্য থেকে শুরু করে জটিল এবং বিশাল বিশাল নির্ভুল ইংরেজি বাক্য গঠন করা যায় সেই কৌশল।

(৩) MBA. BBA Admission Test. Test. GMAT. GRE. SAT-এ এসে থাকে বা আসতে পারে এমন সব সম্ভাব্য প্রশ্নের সমন্বয়ে গঠিত অত্যন্ত কার্যকরী কয়েকটি MODEL TEST.

A High Level English Course-Book—1, 2 & 3 (Spoken & Written English)

— by S. M. Zakir Hussain

এই বই দু'টি রচিত হয়েছে কেবলমাত্র তাদের জন্য যারা ইংরেজির প্রাথমিক বিষয়গুলো জানেন এবং আরো উচ্চতর পর্যায়ের জন্য নিজেকে উপযুক্ত করতে চান। সুতরাং কোনো পাঠকের যদি বইটি পড়ার সময় মনে হয় যে তার প্রাথমিক পর্যায়ের জন্য আরো বেশি প্রস্তুতি নেয়া দরকার, তাহলে তাকে আমরা A High Level English Course Book-1 বইটি পড়ার জন্য অনুরোধ করব। বইটির সম্বন্ধে বেশি কিছু বলার চেয়ে সহজে এটুকু বলা যায়, A High Level English Course Book-1 বইটি যদি আপনার ভাল লাগে, যদি মনে করেন যে এই পদ্ধতিতে লেখা অন্য যে-কোন বইও আপনার জন্য উপকারে আসবে, তা আপনাকে অত্যন্ত অল্প পরিশ্রমের বিনিময়ে অধিক ফল দেবে, তাহলে, আমাদের বিশ্বাস, এই বইটিও আপনাদের কাছে খুব ভালো লাগবে।

কিছু কিছু ভারতীয় বই যা প'ড়ে বাক্য মুখস্থ করা ছাড়া উপায় নেই তা দিয়ে তো আপনার কোন লাভ নেই; আপনাকে শিখতে হবে উচ্চ পর্যায়ের ইংরেজি-এমনকি যাতে TOEFL-এর বেশ কিছুও শেখা হয়ে যাবে। উচ্চ পর্যায়ের শিক্ষার্থী, চাকুরীজীবি, বিদেশ গমনেচ্ছু ব্যক্তি, উচ্চাকাঙ্খী-সবার জন্যই বইটি অনন্য। ইংরেজি শিখতে কারো সাহায্য লাগে? মিথ্যে কথা! এ বইটি তা প্রমাণ করবে। কমপক্ষে ইন্টারমিডিয়েট পাশ না হলে বইটি পড়ে তেমন লাভবান হবেন না।

Word Learning Magic-Book—1

— by S. M. Zakir Hussain

পরিবর্ধিত, পরিমার্জিত ২য় সংস্করণ। Synonym এবং Antonym-এর বর্ধিত তালিকা থাকবে। প্রতিটি word-এর উচ্চারণ দেয়া থাকবে। এছাড়া Part-I ও Part-II-তে আরও নোতুন নোতুন word দেয়া হবে। যারা বইটি পড়েছেন তারা এই ২য় সংস্করণটিও পড়ে দেখুন।

Word Learning Magic-Book—2 & 3

— by S. M. Zakir Hussain

বইটি Book-1 অপেক্ষা আরও পদ্ধতিগত, সহজ, এবং সুখপাঠ্য। প্রতিটি word-এর উচ্চারণ দেয়া হয়েছে। মাত্র ৫০টি ও ৪০টি root মুখস্থ করলে পুরো বইটার সমুদয় word-ই আয়ত্ত করা যাবে। পৃষ্ঠা সংখ্যা ৩৬০ এবং বইটি যে কোন পাঠকেরই মন জয় করবে।

কল্পকণা

— এস. এম. জাকির হুসাইন

একটি চমৎকার কবিতার বই। তরুণ কবি এবং কাব্যামোদীদের জন্য বইটি অবশ্য পাঠ্য। পাকা হাতেরই লেখা।

আজকের নেতা : সফল নেতৃত্বের শত কৌশল

— এস. এম. জাকির হুসাইন

একটি চমৎকার বই। বাংলা ভাষায় এটাই প্রথম। আপনি যদি সফল নেতা হতে চান, কিংবা নেতৃত্বের দক্ষতা আরও বাড়াতে চান, কিংবা নিজের অঞ্চলে বা প্রতিষ্ঠান অভাবনীয় সুনাম প্রভাব এবং সাফল্য অর্জন করতে চান, তাহলে এই বইটি পড়ুন। বইটির সবগুলো পদ্ধতিই কার্যকরী এবং সহজ। এছাড়া এতে থাকবে নেতৃত্বের প্রতিযোগিতায় কিভাবে অপরকে ছাড়িয়ে যাওয়া যায় এবং কিভাবে পরিবেশের এবং পরিস্থিতির সুযোগকে সঠিকভাবে চিহ্নিত ক'রে তাকে ঠিকভাবে কাজে লাগানো যায় সেই অপূর্ব কৌশল। অপরকে দিয়ে নিজের কাজ সফলভাবে করিয়ে নেয়ার কার্যকরী কৌশল এ বইটিতে পাবেন। রাজনৈতিক এবং যে-কোন প্রতিষ্ঠানিক নেতৃত্বের ক্ষেত্রে বইটি অনন্য। আজই প'ড়ে দেখুন।

চোখের তলে জলের ঝিলিক (কবিতার বই)

— এস. এম. জাকির হুসাইন

যৌবন এবং তারুণ্যের তীব্র আবেদনে ভরা একগুচ্ছ কবিতা। কবিতা যে মোটেও কঠিন না হয়ে এমনকি গল্পের চেয়েও বেশি উপাদেয় হতে পারে, এ বইটি তার প্রমাণ। এই বইটিই পারে আপনার অবসরের মুহূর্তকে আনন্দে আর স্বপ্নে মুখরিত ক'রে তুলতে। এই লেখকের অন্যান্য বই যারা পড়েছেন তারা তাঁর এই বইটিও পড়ে দেখুন।

যারা কবিতাকে কঠিন এবং নীরস মনে ক'রে তা এড়িয়ে চলেন, তাদেরকে আমরা অন্তত এই বইটি প'ড়ে দেখতে আহ্বান জানাচ্ছি।

Word Making Tactics Book—2 & 3

— by S. M. Zakir Hussain

Book–1-এ যে সব পদ্ধতি দেয়া সম্ভব হল বা, বিশেষত আরও শক্তিশালী, জটিল, এবং উচ্চ পর্যায়ে প্রযোজ্য, সে-সব কৌশলগুলো Book–1 এর মত উপস্থাপন পদ্ধতিতেই Book–2 তে আসছে। এই বইটি ইংরেজি ভাষার উপর আপনার দখল আরও মজবুত করবে, আপনাকে দিবে সফলতার অধিক আশ্বাস।

Tactics for Learning Prepositions Book—1 & 2

— by S. M. Zakir Hussain

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে Spoken English-এ প্রচুর সংখ্যক preposition ব্যবহৃত হয়। কারণ কি? কারণ হল prepositionকে সঠিকভাবে ব্যবহার করতে জানলে অতি সংক্ষেপে, কার্যকরীভাবে এবং idiomatically মনের ভাব প্রকাশ করা যায়। আসলে ইংরেজি যাদের মাতৃভাষা তারা তাদের কথাবার্তায় preposition এত বেশি ব্যবহার করে যে, আপনি হাজার ইংরেজি শিখেও একমাত্র preposition ভালভাবে না বুঝার কারণে তাদের ইংরেজির অধিকাংশই বুঝতে পারবেন না। আবার নিশ্চয়ই আপনি লক্ষ্য করেছেন যে preposition অধিকাংশ ব্যক্তিই কেবল চোখ বুজে মুখস্থ করতে চায়, অধিকাংশ ক্ষেত্রে পেরেও ওঠে না। কারণ তাদেরকে কোনো বই সহজ এবং আকর্ষণীয় পদ্ধতিতে preposition এর idiomatic ব্যবহারের নিয়ম উপহার দিচ্ছে না।

কিন্তু আপনার আর দুশ্চিন্তা নেই। এই বইটি আপনাকে preposition-সম্পর্কিত সকল রহস্য অত্যন্ত সহজে এবং উপভোগ্য উপায়ে শেখাবে। শুধু spoken English-এর জন্য নয়, ইংরেজি ভাষা সফলভাবে এবং গভীরভাবে যে-কেউ শিখতে চান না কেন, তার জন্য এই বইটি অবশ্যপাঠ্য।

অন্ধকারের বস্ত্রহরণ

(পূর্ববর্তী প্রচারিত নাম : সৃজনশীল চিন্তার কৌশল এবং প্রয়োগ)

— এস. এম. জাকির হুসাইন

গল্পের নায়ক, বুড্ডা, জ্ঞানপুরীর সন্ধান পায়, যা আছে যুক্তির ওপারে। সেখানে যেতে হয় সম্মোহনযোগে। তার উদ্দেশ্য বৈজ্ঞানিক, উদ্ভাবনী, এবং বুদ্ধিবৃত্তিক সৃজনশীলতার রহস্য জানা। সে প্লেটো পড়েছে, কিন্তু প্লেটো হতে পারেনি, রাসেল চর্চা করেছে, তবুও রাসেল হতে পারেনি। সে বুঝতে পেরেছে যে প্লেটো প'ড়ে প্লেটো হওয়া যায় না, রাসেল হতে গেলে রাসেল পড়াই যথেষ্ট নয়, তাঁদের মতো হতে গেলে তাঁরা যে-দৃষ্টি দিয়ে বাস্তবতাকে দেখেছেন সেই দৃষ্টি অর্জন করতে হবে, তাঁদের মতো ক'রে ভাবতে শিখতে হবে, তাঁদের মতো ক'রে প্রশ্ন করতে শিখতে হবে—প্রকৃতিকে এবং নিজেকে। সে পেয়েও গেল উপযুক্ত শিক্ষক, শিখল বিভিন্ন *দৃষ্টিকোণ*। মাথার মধ্যে সৃজনশীল চিন্তা কিভাবে সংঘটিত হয় তা সে পুরোপুরি না জানতে পারলেও সে কার্যকরভাবে জানতে পেরেছে কিভাবে নিজের মধ্যে সৃজনশীলতাকে উস্কে দিতে হয়, চিন্তার নাড়ানিটাকে কিভাবে ফলপ্রসূভাবে নাড়াতে হয়। সে শিখেছে কিভাবে চিন্তার সুতোটার একেকটা মোচড় সভ্যতাকে ধাপে ধাপে বদলে দিয়েছে। সেই সুতোটা সে ধরতে চায়—তাতে সে নিজের মতো ক'রে দুয়েকটি মোচড় দিতে চায়।

জ্ঞানপুরী থেকে এক বন্ধুর প্ররোচনায় সে গেল 'জ্ঞানাগারে'—জ্ঞান চুরি করতে। সেখানেও সে শিখল চিন্তার সুতোটাকে অন্যভাবে মোচড়াতে। সে জানল নিউটন যদি ক্যালকুলাস আবিষ্কার না করতেন তাহলে সে নিজে কিভাবে তা করত, কুয়োর ব্যাঙ কেন আজীবন লাফিয়েও কুয়ো থেকে বের হতে পারে না, কিভাবে ব্যাখ্যা করতে হবে এমন ঘটনাকে যে এক মাথাবিশিষ্ট এক রাক্ষস নিজের মাথা ছিঁড়ে নিজে খাচ্ছে, সৃষ্টিকর্তা নিজেকে ধ্বংস করতে পারেন না—তাঁর এই অক্ষমতাকে কিভাবে ব্যাখ্যা করতে হয়, এবং এরূপ আরো অনেক রহস্য। এবং তার অর্জিত *দৃষ্টিকোণকে* প্রয়োগ ক'রে সে নিজেই আবিষ্কার করল রহস্যময় অথচ বাস্তব এক সরলরেখা যার একটাই মাত্র প্রান্ত। সম্পূর্ণ যুক্তিপূর্ণ সমাধান দিল রাসেলের সেট থিওরি সম্পর্কিত ধাঁধাঁর, যা রাসেল নিজেও সঠিকভাবে দিতে পারেননি। ভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে ব্যাখ্যা করল সক্রেটিসের শিক্ষক জিনোর প্রধান ধাঁধাঁকে। উদ্ভাবন করল 'প্রক্রিয়াতত্ত্ব', যা চিন্তার ক্ষেত্রে নোতুন বিপ্লবের সূচনা করবে ব'লে তার শিক্ষক মনে করেন।

অসীম অন্ধকারের মধ্যে ছড়িয়ে ছিটিয়ে আছে অসংখ্য আলোকবিন্দু। সে তা থেকে দুহাত ভ'রে কুড়িয়ে নিতে চায়। কিন্তু অবশেষে তার জ্ঞানের সাথে সংঘর্ষ লেগে গেল তার জীবনের—বিশুদ্ধ সত্যকে জানলে যা হয়। আর তাই তার এই অবিরাম ছুটে চলা।

Word Making Tactics—1

— by S. M. Zakir Hussain

এই বইটি একটি অত্যন্ত ব্যতিক্রমধর্মী বই। এর প্রধান বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নরূপ : এতে থাকবে-জানা word থেকে অসংখ্য নোতুন নোতুন word গঠন করার কৌশল।

অজানা/জানা root থেকে আরো অনেক word গঠন করার কৌশল।

যিনি ইংরেজি বেশ জানেন অথচ কথা বলার সময় সঠিক Wordটি মনে করতে পারেন না, কিংবা যিনি মনে করেন যে জানা word ও সময়মতো তার কাজে লাগে না, বা আয়ত্ত হয় না, তার জন্যই এই বইটি অত্যন্ত উপকারে আসবে। উচ্চাকাঙ্ক্ষী পাঠকের জন্যই এই বইটি। এই বইটি আপনাকে বিশ্বাস করতে সাহায্য করবে যে, ইংরেজি word মাতৃভাষার শব্দের মতই হৃদয়ঙ্গম করা যায়।

Tactics for Learning Phrasal Verbs

— by S. M. Zakir Hussain

Phrasal verbs/Group Verbs Spoken এবং written উভয় ইংরেজিতে কত গুরুত্বপূর্ণ তা লক্ষ্য করেছেন? অথচ চোখ বুঁজে মুখস্থ না ক'রে ক'জন তা ভালোভাবে আয়ত্ব করতে পারে? তাছাড়া মুখস্থ ক'রে কি কোনোকিছু পুরোপুরি 'হৃদয়ঙ্গম' করা যায়? কিন্তু উপায় যে নেই—একথা বলছেন? না, উপায় অবশ্যই আছে। এই লেখক এই বইটিতে চমৎকার কিছু কৌশল উপহার দিয়েছেন যা দ্বারা আপনি অধিকাংশ Phrasal Verb-ই মাতৃভাষার মতো আয়ত্ব করতে পারবেন। প'ড়েই দেখুন। পড়লেই বুঝবেন যে, এই লেখকের স্বাভাবিক বৈশিষ্ট্য—অর্থাৎ জটিল অথচ গুরুত্বপূর্ণ বিষয়কে সহজ ও হৃদয়গ্রাহী ক'রে উপস্থাপন করা—এই বইটিতেও সমানভাবে ফুটে উঠেছে।

Effective Listening And Smooth Pronunciation

— by S. M. Zakir Hussain

ধরা যাক, আপনি বেশ ভালোই ইংরেজি জানেন। কিন্তু যেটুকু জানেন তা কি শুদ্ধভাবে ও সাবলীলভাবে বলতে পারেন? শুদ্ধভাবে বলতে গেলে তা আর সাবলীল হয়ে ওঠে না, আবার সাবলীলভাবে বলতে গেলে তা আর স্বাভাবিক হয় না, কষ্টকর এবং কৃত্রিমতাপূর্ণ হয়ে ওঠে—এই বুঝি আপনার সমস্যা? একই সাথে নিজের জানা ইংরেজি ও অপরের মুখে (বিশেষত খোদ ইংরেজি ভাষীদের মুখে) শুনলে তা আর বোধগম্য হয় না? accent, stress, intonation, assimilation ইত্যাদির গোলকধাঁধায় word-গুলো এমনভাবে তালগোল পাকিয়ে যায় যে, জানা ইংরেজিও তাদের মুখে শোনার সময় প্রতিটি word-কে আলাদাভাবে চিহ্নিত করতে অসুবিধা হয়। ফলে মোটের উপর কিছু বুঝতে পারেন না? একজন ইংরেজি-জানা ব্যক্তির পক্ষে এটা নিঃসন্দেহে দুঃখজনক সমস্যা। কিন্তু এই সমস্যার সমাধান পাচ্ছেন এই বইতেই। একরত্তি এক বই, অথচ অত্যন্ত শক্তিশালী। মাত্র কয়েকদিনের মধ্যেই এই বইটি আপনার ইংরেজি বলার ও শোনার ক্ষমতা কমপক্ষে ২০ গুণ বাড়িয়ে দেবে। প'ড়েই দেখুন। বইটি কানের ময়লা সাফ করবে, জিহ্বাকে তৈলাক্ত করবে। বইটির আগে নাম ছিল Effective Listening and Smooth Speaking.

Effective Writting Skills for Advanced Learners

— by S. M. Zakir Hussain

ব্যবহারিক বা শিক্ষাগত জীবনে পত্র, রচনা, রিপোর্ট, কলাম, প্রবন্ধ, গল্প—ইত্যাদি সবাইকেই লিখতে হয়। কিন্তু এসব ক্ষেত্রে প্রকৃত উদ্দেশ্য হাসিল করা চাট্টিখানি কথা নয়। লেখার গুণ ও মানের উৎকর্ষই তার সার্থকতা নির্ধারণ করে। বাংলা বা ইংরেজি যে ভাষাতেই হোক, এসব লেখার জন্য কতকগুলো আয়াস-সাধ্য কৌশল অর্জন করা আবশ্যক। কাঁচা হাতকে কেরানির মতো অনর্গল লিখে পাকা করা যায় না, তা করতে হলে শেখা চাই শক্তিশালী কতকগুলো কৌশল। বক্তৃতা, বাণিজ্যিক পত্র, প্রভাব সৃষ্টি করতে সক্ষম এমন পত্র বা রিপোর্ট ইত্যাদির সার্থকতা মূলত তাদের রচনার কৌশলগুলোর ওপরই নির্ভরশীল। এমনকি ইংরেজি ও বাংলা উভয় ভাষাতেই গদ্য-রচনার যাদুকরী রীতির প্রয়োগ দ্বারা সত্যিকারের সোনার ফসল ফলানো সম্ভব। এই বইটি আপনার গদ্য-লেখার দক্ষতা অদ্ভুতভাবে বাড়িয়ে দেবে। অন্যের লেখার প্রভাব থেকে নিজেকে মুক্ত ক'রে কীভাবে লেখায় নিজস্ব style সৃষ্টি করতে হয়, তাও জানা দরকার। এসবই পাচ্ছেন এই বইটিতে। কেবল তত্ত্বীয় জ্ঞানের জন্য এই বইটি নয়, এ থেকে যা শিখবেন তা সাথে সাথে প্রয়োগও করতে পারবেন। বইটি হোক আপনার জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রের নিত্যসঙ্গী।

How to Speak English Fluently Book—1

— by S.M. Zakir Hussain

বাংলা ভাষায় এ বিষয়ের উপর লেখা অন্য কোন বইয়ের নজির আজও সৃষ্টি হয়নি। এটাই প্রথম। যারা ইংরেজি জেনেও ঠিকমত বলতে পারেন না, কিংবা যারা মনে করেন যে তারা যেটুকু ইংরেজি জানেন তা অন্তত কথা বলার

জন্য যথেষ্ট কিন্তু বলার সময় ভালভাবে বলতে পারেন না, কিংবা যারা অন্যের ইংরেজি শুনে বুঝতে সক্ষম কিন্তু নিজে বলতে অক্ষম, তাদের জন্য এই বইটির কোনো বিকল্প নেই। আপনি যদি উপরোক্ত তিনটি অবস্থার যে-কোনো একটির মধ্যে নিজেকে খুঁজে পান, তাহলে একথা সত্য যে আপনি মুটামুটি ভাল ইংরেজি জানেন। সুতরাং এরূপ অবস্থায় নোতুন ক'রে ইংরেজি শিখতে গেলে আপনি তেমন লাভবান হবেন না। দরকার শুধু এই বইটির। বইটির প্রতিটি পৃষ্ঠাই আপনাকে এর সত্যতার প্রমাণ দেবে। আবার বইটি এমনভাবে রচিত যে একেবারে অল্প ইংরেজি জানা ব্যক্তির জন্যও এটা সমানভাবে কার্যকরী হবে। এই লেখকেব অন্যান্য বই পড়ার অভিজ্ঞতা থাকলে পূর্ণ আত্ম-বিশ্বাস নিয়েই এই বইটিও পড়ুন।

How to Speak English Fluently Book—2

— by S. M. Zakir Hussain

বলাই বাহুল্য যে, Book–1 ভালো লাগলে Book–2 আরো ভালো লাগবে।

Magic Rules of Pronunciation Book—1

— S. M. Zakir Hussain

বলুন দেখি . . . ?

treat—এর উচ্চারণ "ট্রীট"

কিন্তু threat—এর উচ্চারণ "থ্রেট" কেন? অর্থাৎ "ea" = কখনও "ঈ" আবার কখনও "এ" কেন? কিংবা beatific—এর উচ্চারণ "বিঅ্যাটিফিক" কেন? অর্থাৎ এক্ষেত্রে "ea" = "ইঅ্যা" হল কেন?

একইভাবে hat = "হ্যাট", অথচ
hate—"হেইট",
এবং father—"ফাদ্যার"।

অর্থাৎ "ট" = কখনও "অ্যা", কখনও "এই", আবার কখনও "আ" হচ্ছে।

bough—এর উচ্চারণ "বাউ", কিন্তু

rough—এর উচ্চারণ "রাফ" কেন? কেন "রাউ" নয়?

numb—শব্দে "b" উচ্চারিত হবে কি?

column, palm—ইত্যাদি word-এর সঠিক উচ্চারণ কী?

debt, wrestle, qualm—ইত্যাদি ষমরচ-এর সঠিক উচ্চারণ কি?

আবার : but—বাট, কিন্তু put—পুট-u-এর উচ্চারণ কোথাও "আ" কোথাও "উ"। অধিকন্তু cute-এ u-এর উচ্চারণ "ইউ"। university-তে u = ইউ, অথচ utmost-এ u = "আ"। কেন? dull, null, skull ইত্যাদিতে u = আ, অথচ bull, pull-এ u = উ। hire-এ i = আইঅ্যা, কিন্তু time-এ i = আই, আবার bird-এ i = অ্যা। finish-এ i = ই, অথচ finite-এ i = আই। কিন্তু কেন?

তাহলে কি প্রতিটি word-এর উচ্চারণ আলাদা আলাদাভাবে মুখস্থ করতে হবে?

না। একেকটি নিয়ম জেনে হাজার হাজার ষমরচ-এর উচ্চারণ সঠিকভাবে করা সম্ভব। এই বইতে এমন কিছু নিয়ম বর্ণনা করা হবে। এসব নিয়মের (কৌশলের) আরেকটি উপকার এই যে কোনো word-এর অর্থ আপনি যদি না-ও জানেন তবু এগুলোর সাহায্যে তা সঠিকভাবে উচ্চারণ করতে পারবেন।

যারা ইংরেজি প্রথমে শিখছেন, কিংবা যারা শুধু জানা word ছাড়া অন্যান্য word-এর উচ্চারণ করতে পারেন না, যারা শিক্ষকতা করেন কিন্তু ছাত্র/ছাত্রীদেরকে সহজে এবং কৌশলে উচ্চারণ শেখানোর জন্য কোনো পদ্ধতি হাতের কাছে পাচ্ছেন না, যারা TOEFL করবেন তাদের সবার জন্যই এই বইটি অত্যন্ত উপকারী ব'লে প্রমাণিত হবে। তাছাড়া যে-সব উচ্চাকাঙ্ক্ষী পিতা-মাতা বা অভিভাবক তাদের সন্তানদেরকে অতি অল্প বয়স থেকে ইংরেজি উচ্চারণ সঠিকভাবে এবং অত্যন্ত সহজে শেখাতে চান, তাদের জন্য এই বইটি হবে একটি অনন্য আকর্ষণ। এরূপ বই বাংলা ভাষায় আর দ্বিতীয়টি নেই।

A Systematic Approach t o Critical Reasoning And Analytical Ability

— by S. M. Zakir Hussain

TOEFL, GMAT, GRE, SAT, BCS, MBA BBA Admission প্রভৃতি উচ্চমার্গের প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষার সবচেয়ে কঠিন sectionগুলো হল—অধিকাংশ পরীক্ষার্থীর মতে—Reading Comprehension এবং Critical Reasoning বা Analytical Ability (এবং I.Q) section দুটি। বছর বছর সাধনা করেও অনেকে এই section দুটির উপর পূর্ণ আধিপত্য প্রতিষ্ঠা করতে পারে না। কিন্তু ব্যাপারটিকে যতটা কঠিন মনে হয় তা ততটা কঠিন নয়। সঠিক বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতি এবং কৌশল অবলম্বন করতে পারলে এই section দুটিতে (প্রায়) ১০০% নম্বরই পাওয়া সম্ভব। তবে উক্ত পরীক্ষাগুলোর জন্য বাজারে যে-সব বিদেশি গাইড বই পাওয়া যায় সেগুলোর সাহায্যে অতটা সাফল্য পাওয়া আদৌ সম্ভব নয়, যদিও সেগুলো খুব উপকারী। এ ব্যাপারে পুরোপুরি আশ্বস্ত হতে হলে এই লেখকের এই বই দুটি পড় ন। বিস্ময়কর বই। প্রথম বইটি Critical Reasoning Analytical Ability, I.Q. Test এবং অন্যান্য মনস্তাত্ত্বিক পরীক্ষার জন্য।

British and American English Differentiated

— by S. M. Zakir Hussain

আধুনিক যুগের শিক্ষিত এবং উচ্চাকাঙ্ক্ষী ব্যক্তিদের জন্য বইটি অত্যাবশ্যক। কারণ আপনি যে ইংরেজি লেখেন বা বলেন, তাতে যদি British এবং American English মিশ্রিত থাকে, তাহলে তা পড়ে বা শুনে Britishরা যেমন হাসবে তেমনি ঠাট্টা করবে Americanরা। এ কারণে আন্তর্জাতিক Correspondence, লেখালেখি— ইত্যাদি ক্ষেত্রে যারা জড়িত তাদের উচিত এই দুই ইংরেজির মধ্যকার প্রধান পার্থক্যগুলো জেনে রাখা। বিশেষ করে, TOEFL, GMAT, GRE, SAT ইত্যাদির ছাত্রদের জন্য এই পার্থক্য জানা আবশ্যক।

Tough English Made Simple

— by S. M. Zakir Hussain

এই বইতে ইংরেজি ভাষার কিছু জটিল অথচ অত্যাবশ্যক construction, তাদের গঠন পদ্ধতি, ব্যবহার এবং উপযোগিতা আলোচিত হয়েছে। Spoken এবং Written উভয় ইংরেজিতেই এই construction-গুলো অনেককেই খুব ভোগায়। আবার TOEFL, GMAT, GRE, SAT, Bcs-সহ অন্যান্য প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় এবং বাস্তব জীবনের প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষার ক্ষেত্রে এই construction-গুলো বিশেষ গুরুত্বের দাবি রাখে। সুতরাং, এই বইটি আপনার দরকার। সর্বোপরি, এই লেখকের স্বভাবজাত উপস্থাপন-পদ্ধতির বন্ধুত্বপূর্ণ ছোঁয়ায় জটিল জিনিসগুলো যে কত উপভোগ্য এবং সহজপাঠ্য হয়ে উঠেছে তা বইটি পড়লেই বুঝবেন।

The Beauty of Mathematics

— by S. M. Zakir Hussain

সত্যিকার অর্থে বড় হতে গেলে গণিতভীতির বদলে মনের মধ্যে গণিতপ্রীতিই চাঙ্গা ক'রে তোলা চাই। গণিত না জেনে কে কবে কোথায় প্রখর, প্রলয়ংকরী, বা গঠনমূলক চিন্তাশক্তি অর্জন করেছে? অথচ সচরাচর শিক্ষার্থীদের ধারণা গণিত নীরস—তা কেবল কতকগুলো যান্ত্রিক সমীকরণের সমষ্টি। ফলে তারা গণিতবিমুখ থাকে। প্রচলিত পাঠ্যক্রম, শিক্ষাদান-পদ্ধতি, এবং পরীক্ষা-পদ্ধতিও এর জন্য অনেকাংশে দায়ী। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে গণিতের মতো এত গভীর, সুন্দর, আনন্দদায়ক বিজ্ঞান আর দ্বিতীয়টি নেই। বিজ্ঞানের ভাষা হলো গণিত। আবার বৈজ্ঞানিক এবং বৌদ্ধিক চিন্তার সর্বোৎকৃষ্ট হাতিয়ারও গণিত। তা শুধু পাঠ্যবইতে সীমাবদ্ধ থাকলে চলবে না, চিন্তায়-মননে এবং সার্বক্ষণিক চৈতন্যে তাকে তুলে আনতে হবে। গণিত এক অনাবিল আনন্দের ক্ষেত্র। গণিত-দীক্ষিত চোখ এবং মন প্রকৃতিজগতের দিকে তাকিয়ে তার প্রকৃত রহস্যময় রূপকে দেখতে সক্ষম হয়।

কিন্তু কেবল ফর্মূলা মুখস্থ ক'রে গণিত শেখা যায় না। এই বইটি পড়লেই বুঝা যাবে গণিত আসলে কী। এমনকি যার গণিতের ব্যাকগ্রাউন্ড নেই, তিনিও বইটি পড়তে পারবেন। বইটি মূলত উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ের জন্য। কিন্তু অ-গণিতবিদ চিন্তাবিদ বা বুদ্ধিজীবিগণও বইটি প'ড়ে অত্যন্ত লাভবান হবেন। এমনকি গণিতের শিক্ষার্থীদের কাছেও—যারা কেবল পরীক্ষা ঠেকাবার উদ্দেশ্যে 'সিলেবাস' অনুযায়ী গণিত শিখেছেন—এই বইটি একটি সুখপাঠ্য এবং রহস্য-উদ্ঘাটনকারী বিনোদনমূলক বই হিসেবে প্রতীয়মান হবে। সবচেয়ে বড় কথা হলো, উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ের যে-সব শিক্ষার্থী ভবিষ্যতে বিজ্ঞানী, চিন্তাবিদ, ইঞ্জিনিয়ার ইত্যাদি হতে চান, তাদের জন্য এই মুহূর্তে এই বইটি অবশ্যপাঠ্য। এই বইটি পড়লে ভবিষ্যতে আর 'চোখে অন্ধকার দেখার' ঝামেলায় পড়তে হবে না। বইটি পড়ুন : গণিতের অসীম বাস্তবতাকে 'অনুভব' করার দক্ষতা অর্জন করুন। বাংলা ভাষায় এরূপ বই এটাই প্রথম। যারা সাধারণ এবং সার্বিক ধারণা অর্জন করার জন্য বইটি পড়তে চান, তাদেরকে বইটি পড়ার সময় হাতের কাছে কাগজ-কলম না রাখলেও চলবে।

নারীর মন

— এস. এম. জাকির হুসাইন

নারী মনস্তত্ত্বের গোপন এবং রহস্যময় দিকগুলি নিয়ে একটি তত্ত্বীয় গ্রন্থ। বাংলা ভাষায় এরূপ বই এখনও রচিত হয়নি, যা হয়েছে তা কেবল তথ্যভিত্তিক ইতিহাস-নির্ভর উপ-গবেষণা, তত্ত্বীয় কিছু নয়। এই বইতেই প্রথম দেখানো হয়েছে দেহে এবং মনে নারী কতখানি নারী এবং কেন, পুরুষ নারীর কাছে আসলে কী চায়, নারী কেন পুরুষকে ভুল বোঝে, নারীর মনের গোপন কোণে আসলেই কোনো অপূর্ণ বাসনা লুকিয়ে আছে কি না, ইত্যাদি বিষয়। বইটিতে পরিশোধিত করা হয়েছে ফ্রয়েডের তত্ত্বকে, এবং দাঁড় করানো হয়েছে নোতুন এবং গাণিতিকভাবে যাতসহ একটি তত্ত্ব—যা সম্ভবত নারী-মনস্তত্ত্বের ওপর এযাবতকালের সবচেয়ে সফল এবং নির্ভরযোগ্য তত্ত্ব। এই তত্ত্বই যৌক্তিক-মনস্তাত্ত্বিক-দার্শনিক উপায়ে দেখিয়ে দিচ্ছে তথাকথিত 'নারীবাদ'-এর যৌক্তিকতা কতখানি, নারীর প্রতি মৌলবাদী দৃষ্টিভঙ্গিই বা মানবিক কি না। বইটির মূল প্রতিপাদ্য হলো এই যে, নারীর যাবতীয় স্বজাতিসুলভ আচরণ তার যৌনতার নিজস্ব রীতি দ্বারা নির্ধারিত, এবং বইটিতে সেই যৌনতার মনস্তাত্ত্বিক স্বরূপ উদ্ঘাটন করা হয়েছে। নারী নিজেই জানে না সে কতটুকু পরিমাণে নারী। পুরুষও তাকে নিজের যুক্তি দিয়ে গড়তে চায় ব'লে ভুল করে।

Rohel Multi-Purpose Dictionary

— by S. M. Zakir Hussain

Varsity Grammar of English

— by S. M. Zakir Hussain

Encyclopedia of English Usage

— by S. M. Zakir Hussain

Mastering Tenses

— by S. M. Zakir Hussain

Learning tenses in five days and teaching in one.

Tense শেখার এবং শেখানোর একটি সম্পূর্ণ নোতুন উপায়। Tenseকে 'গঠন' করার দরকার হবে না, তা চিন্তার স্বাভাবিক প্রক্রিয়ার মধ্যেই উৎপন্ন হবে। ১২ প্রকার tense মনোভাব প্রকাশের জন্য যথেষ্ট নয় কেন, এবং অন্যান্য আর কী tense ইংরেজিতে ব্যবহৃত হয়, তার পুঙ্খানুপুঙ্খ বিবরণও থাকছে। Written এবং Spoken English-এ এবং British এবং American English-এ tense এবং ভিন্ন জাতীয় প্রয়োগ কখন এবং কেন হয় তার বিস্তারিত বিশ্লেষণ রয়েছে।

Sentence Analysis for IELTS

magic methods for analyzing long, complex sentences in order to discover their meaning even without knowing difficult words

By- S. M. Zakir Hussain

Natural Spoken English

— by S. M. Zakir Hussain

কৃত্রিম নয়, খোদ ইংরেজরা এবং Americanরা যেভাবে Spoken English ব্যবহৃত করে, ঠিক তাই। বইটির আগের নাম ছিল 'Short-Cut Ways of Speaking English'।

কোরআনের আলোকে প্রাণের প্রাগৈতিহাসিক উৎস এবং মানব মনের গুপ্ত রহস্য

— এস. এম. জাকির হুসাইন

ড. শহীদুল্লাহ মৃধার ভাষায় : "আমার হতাশা কেটে গেছে। ভেবেছিলাম এই জাতির জীবনে এই ধরনের চিন্তা ভাবনা নিয়ে কেউ আসবে না। কিন্তু নিঃসঙ্গ তরুণ চিন্তাবিদ এবং হবু দার্শনিক এস. এম. জাকির হুসাইন সেই গুরুদায়িত্ব ঘাড়ে নিয়েছেন দেখে আশান্বিত হয়েছি।"

বইটির নাম থেকে বুঝা যাচ্ছে তার বিষয়বস্তু কী। বইটি পড়তে পড়তে মন্ত্রমুগ্ধের মতো বসে থাকতে হয়! ধার্মিক নাস্তিক সবার জন্য অবশ্যপাঠ্য—মুসলিম তো বটেই। লেখক বইটিতে প্রাণ সৃষ্টির প্রাগৈতিহাসিক উৎসের রহস্য উদ্ঘাটিত করতে গিয়ে দেখেছেন যে ১৪০০ বছর আগে কোরআনেই প্রিকামব্রিয়ান, মেসোজোইক, সিনোজোইক, ইত্যাদি মহাযুগের সৃষ্টি-প্রক্রিয়ার স্তরভেদকে চিত্রিত করা হয়েছে।

তিনি এই সর্বপ্রথম সার্থকভাবে বিবর্তনবাদের সাথে কোরআনের সাযুজ্যকে দেখাতে পেরেছেন, এবং একই সাথে কিছু নাস্তিক বিজ্ঞানীর ধ্যান ধারণাকেও মিথ্যা প্রমাণিত ক'রে দিয়েছেন। বইটিতে চমৎকার ভঙ্গিতে ফুলের পাপড়ির মতো স্তরে স্তরে খুলে দেয়া হয়েছে মানব মনের গুপ্ত রহস্যটিকে। আজই পড়ুন।

A Dictionary of English Structures

— by S. M. Zakir Hussain

The Pleasure of Idiomatic English

— by S. M. Zakir Hussain

The Politics of Managing The Boss

— by S. M. Zakir Hussain

উদ্ভাবনী চিন্তার কাঠামো :
বর্হির্জগৎকে আমরা যেভাবে জানি

পরমাণুবিজ্ঞানী ড. শহীদুল্লাহ মৃধার মতে, 'আমি তো বিস্ময়ে বিমূঢ়, হতবাক হয়ে গেছি। লেখক মূল জায়গাটাতেই হাত দিয়ে ফেলেছেন। তিনি শুধু তত্ত্বই দেননি, তার প্রয়োগের উপায়টাকেও পাঠকের হাতে তুলে দিয়েছেন। লেখক একটি জাতীয় দায়িত্ব পালন করেছেন।'

— এস. এম. জাকির হুসাইন

অসুস্থতার আনন্দ

মানসিক ও শারিরীক রোগমুক্তির জন্য সহজ ও অব্যর্থ ধ্যান, আত্মসম্মোহন ও প্রার্থনা

– এস. এম. জাকির হুসাইন

মহাজ্ঞান

কোরআনের আলোকে মানব-সৃষ্টির সূচনা-বিন্দু এবং তার আলোকে মানব মন এবং স্বভাবের গূঢ় রহস্য অনুসন্ধান

– এস. এম. জাকির হুসাইন

আবেগের ভারসাম্য এবং অফুরন্ত প্রাণশক্তি

আবেগের বিক্ষিপ্ত শক্তিকে কোনোরূপ অন্তর্যুদ্ধ ছাড়াই সংহত ক'রে অফুরন্ত প্রাণশক্তি, অনুপ্রেরণা, সৃজনশীলতা এবং প্রজ্ঞা লাভের উপায়

– এস. এম. জাকির হুসাইন

প্রাচুর্য, মানসিক শক্তি এবং প্রকৃত উপভোগের রহস্য

জীবনের শত বাধা-বিপত্তি পেরিয়ে আত্মিক, মানসিক ও অর্থনৈতিক প্রাচুর্য এবং গভীর প্রজ্ঞা অর্জনের জন্য অব্যর্থ ও যুগোপযোগী তত্ত্ব এবং পদ্ধতিমালা

– এস. এম. জাকির হুসাইন

ব্যর্থতা ও হতাশার অবসান

সফল জীবন গঠন এবং বিপুল মানসিক শক্তি অর্জনের জন্য অব্যর্থ ও যুগোপযোগী তত্ত্ব এবং পদ্ধতিমালা

– এস. এম. জাকির হুসাইন

মনের রূপচর্চা এবং অন্যের মন জয় করার উপায়

মনের বিপুল সৌন্দর্য ও চিন্তায় পরিচ্ছন্নতা এবং অপরের সঙ্গে স্থায়ী সম্পর্ক গঠনের যোগ্যতা অর্জনের জন্য যুগান্তকারী উপায় এবং তত্ত্ব

– এস. এম. জাকির হুসাইন

দুঃখ কষ্টের মূল্য এবং সদ্ব্যবহার

জীবনের দৈনন্দিন দুঃখ-কষ্টকে সুখে রূপান্তরিত করার এবং তার মাধ্যমে গভীর অন্তর্দৃষ্টি লাভ করার যোগ্যতা অর্জনের জন্য যুগান্তকারী উপায় এবং তত্ত্ব

– এস. এম. জাকির হুসাইন

ROHEL
Dictionary of Synonyms and Antonyms with subtle differences of meaning

এই ধরনের একটি বই শুধু যে বাংলা ভাষাতে নেই তা নয়, ইংরেজি ভাষাতেও তা বিরল। অথচ ঠিক এরূপ একটি বই-ই আপনার দরকার। কারণ synonym Antonym এরন যে-সব বই (dictionary বা thesaurous) আপনি পড়ে থাকেন, তাতে কেবল কোনো word এর synonym এবং/বা antonym এবং কিছু উদাহরণ দেয়া থাকে, কিন্তু কোনো word তার synonym (সমার্থক শব্দ) এর সাথে কতখানি বা কতটুকু পরিমাণে সমার্থক, এবং তার antonym (বিপরীতার্থক শব্দ) এর সাথে কতটুকু পরিমাণে বিপরীতার্থক তা তাতে দেয়া থাকে না। কিন্তু আপনার আসলে দরকার এসব বিষয়ই। GMAT, GRE, SAT, TOEFL, BBA, MBA, Admission Test, BCS ইত্যাদিতে যে synonym Antonym section, sentence completion section, analogy section ইত্যাদি থাকে, তার সঠিক উত্তর করতে হলে এসব সূক্ষ্ম বিষয় অবশ্যই জানা দরকার। ব্যাপারটি আপনি নিজেই ভাল বুঝতে পারবেন যদি GMAT, GRE ইত্যাদির ভাল গাইড বই (যেমন Cliff's, Barron's, ARCO ইত্যাদি) বের ক'রে কিছুক্ষণ পড়েন। দেখবেন যে, কোনো একটি word এর শুধু synonym বা antonym জানলে সেখানে কোনো লাভই হচ্ছে না, যা জানতে হয় তা হল একটি synonym এর সাথে অন্য একটি synonym এর মিল এবং পার্থক্য আসলে কতখানি তা। আর এসব কারণেই বাজারে প্রচলিত দেশি-বিদেশি কোনো বইতেই আপনার তেমন কোনো উপকার হয় না। synoym antonym এর এসব বিষয় কেবল এই বইতেই পাবেন।

আরো কিছু কারণে এই বইটি আপনার জন্য একটি আদর্শ বই। যেমন এই বইয়ের প্রতিটি word এর এবং তার synonym এর antonym এর বাংলা ও ইংরেজি অর্থ-(definition) দেয়া থাকবে। ফলে সাধারণ word শেখার জন্যই আপনি সরাসরি এই বইটি পড়তে পারেন। প্রতিটি word এর (synonym এবং antonymxy) ব্যবহার sentence এর মাধ্যমে দেখানো হবে। প্রতিটি word এর বিভিন্ন part মত speech এর রূপও এতে পাবেন। অধিকন্তু, এতে পাচ্ছেন জটিল এবং high frequency word এর synonym এবং antonym। সুতরাং, এ ধরনের বই যদি আপনার পড়তেই হয়, তাহলে কেবল এই বইটিই পড়ুন।

Compiled by- Md. Safiur Rahman

The Tactics of Reading English Newspaper with Speaking Power

By- Muklesuzzaman Khan

ইংরেজি শব্দার্থ মুখস্থ না করে শুধুমাত্র **Reading** প'ড়ে এক জাদুকরী পদ্ধতিতে প্রাসংগিক সকল শব্দের **(Synonyms** সহ) অর্থ জানা এবং সাবলীলভাবে ইংরেজি বুঝতে এবং বলতে এই প্রথমবারের মতো একটি বইয়ের আত্মপ্রকাশ। সুতরাং বইটি পড়ে দেখুন।

A Style of Making Sound and Smooth Speaking

Rohel Conversation in English for Fluency
Rohel Selected Essays for Advanced Learner's

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ—১
(সমাজকল্যাণের ইতিহাস ও দর্শন)

— সৈয়দ শওকতুজ্জামান

সমাজবাসী মানুষের কল্যাণের জন্য সুদূর অতীতকাল থেকে বর্তমান পর্যন্ত কোথায় কখন কিভাবে কি ধরনের কর্মকাণ্ড গড়ে উঠেছিলো এর একটি সংক্ষিপ্ত অথচ তথ্যভিত্তিক বিবরণ বিবৃত হয়েছে এ বইটিতে। একই সাথে সমাজকল্যাণ ও সমাজ উন্নয়ন বিষয়ক বিভিন্ন চিন্তাধারা ও দৃষ্টিভঙ্গির পরিচিতি আছে। তাতে পরিবর্তনশীল সামাজিক প্রয়োজনের সাথে সঙ্গতি রেখে ক্রমবিবর্তন ধারার বৈচিত্র্যে সমাজকল্যাণ দর্শন কিরূপ বিকশিত ও বিস্তৃত এর একটি রূপরেখা তুলে ধরার সযত্ন প্রয়াসও এতে সহজে লক্ষ্য করা যাবে। বইটি পাঠ্যপুস্তকের চাহিদা বিবেচনায় লিখিত হলেও সমাজকল্যাণের অনেক মৌলিক ও গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ের সাম্প্রতিক তথ্যগত বিশ্লেষণ। ফলে সংশ্লিষ্ট শিক্ষক, ছাত্র-ছাত্রী, উন্নয়নকর্মীসহ সামাজিক উন্নয়নে উৎসাহী সকলের কাছে এটি একটি আবিশ্যিক বই।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ—২
(মানবীয়, বৃদ্ধি-বিকাশ, আচরণ ও পরিবেশ)

— সৈয়দ শওকতুজ্জামান

মানুষের আচরণ, বৃদ্ধি ও বিকাশ এবং মানবীয় আচরণে পরিবেশের প্রভাব ব্যাখ্যাত হয়েছে এ বই-তে। এর মাধ্যমে ব্যক্তি জীবন ও সমাজ জীবনকে মনস্তাত্ত্বিক ও স্বাস্থ্যগত দিক থেকে সুখ-সমৃদ্ধি করার তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক জ্ঞান লাভ ও তা প্রয়োগের বিষয়াদি জেনে সমাজকল্যাণ-সংশ্লিষ্ট শিক্ষক-শিক্ষার্থী ও সমাজকর্মীরা উপকৃত হতে পারবেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ—৩
(সামাজিক উন্নয়নঃ নীতি, পরিকল্পনা ও সেবাকার্যক্রম)

— সৈয়দ শওকতুজ্জামান

সামাজিক উন্নয়ন কথাটি উন্নয়ন সাহিত্যে একটি নোতুন ও গুরুত্বপূর্ণ প্রত্যয়। উন্নয়নে মানুষ, সমাজ ও পরিবেশ মুখ্য আলোচ্য বিষয় হয়ে ওঠার প্রেক্ষিতে সমাজকর্মী, উন্নয়নকর্মী, নীতি-নির্ধারক ও পরিকল্পনা অনুশীলনকারীদের সামাজিক উন্নয়ন ব্যাপক অধ্যয়ন দরকার হয়। সেজন্য উন্নয়ন ও সামাজিক উন্নয়ন, সামাজিক নীতি, পরিকল্পনা এবং সমাজকল্যাণমূলক সেবা কার্যক্রম নিয়ে বিস্তৃত আলোচনা রয়েছে এ বইতে। এসব বিষয়ের পরিচিতিমূলক বিবরণ, মূল্যায়নধর্মী বক্তব্য ও ব্যবহারিক অনুশীলনের জ্ঞান-দক্ষতা অর্জনে সংশ্লিষ্ট সকলের জন্য এটি একটি অতি প্রয়োজনীয় বই।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ—৪.১
(সামাজিক কার্যক্রম, সমাজ সংস্কার ও সামাজিক আইন)

— সৈয়দ শওকতুজ্জামান

সামাজিক কার্যক্রম-সংস্কার ও সামাজিক আইন বিষয়ে এ বইটি একটি নির্ভরযোগ্য তথ্যভিত্তিক আলোচনা। বইটিতে সমাজকর্মীরা সামাজিক কার্যক্রম প্রক্রিয়ার সাথে তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক জ্ঞান লাভে সক্ষম হবেন এবং বাংলাদেশের বিভিন্ন সমাজসংস্কার আন্দোলনের স্বরূপ-প্রকৃতি ও অবদান সম্যক অবহিত হবার মধ্য দিয়ে তারা নিজ জ্ঞান-অভিজ্ঞতাকে সমৃদ্ধ করার সুযোগ পাবেন। অন্যদিকে সমাজকল্যাণের একটি দিক বা হাতিয়াররূপে সামাজিক আইনের ধারণাগত দিক তুলে ধরে এর সাথে নারীকল্যাণ, শিশুকল্যাণ, শ্রমকল্যাণ ও সামাজিক নিরাপত্তা ইত্যাদি বিষয়ক গুরুত্বপূর্ণ আইনসমূহ পর্যালোচনা করা হয়েছে। ফলে সমাজউন্নয়নে জড়িত বা সমাজকল্যাণ প্রত্যাশী ব্যক্তিবর্গ ও সমাজকর্মী বইটি পাঠ করে ব্যাপকভাবে উপকৃত হবেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ৪.২
(সামাজিক সমস্যা ও সমস্যা বিশ্লেষণ কৌশল)

সামাজিক সমস্যার ধরন-প্রকৃতি, এর ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ এবং কারণ-প্রতিকার নিয়ে সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ-৪.২ খণ্ড "সামাজিক সমস্যা ও সমস্যা বিশ্লেষণ কৌশল" রচিত। এতে তাত্ত্বিক আলোচনার সাথে সাথে বাংলাদেশের সমাজজীবনের বিভিন্ন সামাজিক সমস্যা, এর প্রভাব-ব্যাপকতা এবং প্রতিকার-প্রতিরোধের বিষয়াদি বিশেষভাবে আলোচিত হয়েছে। বিজ্ঞানসম্মতভাবে বিভিন্ন সামাজিক সমস্যা জানতে এবং কার্যকর মোকাবিলার পথ-নির্দেশনা পেতে এ গ্রন্থটি তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক জ্ঞান লাভে পর্যাপ্তভাবে সহায়ক।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ–৫
(সমাজকর্ম পদ্ধতি ঃ ব্যক্তি সমাজকর্ম ও দল সমাজকর্ম)

– সৈয়দ শওকতুজ্জামান

পেশাদার সমাজকর্ম অনুশীলনে সমৃদ্ধ জ্ঞান-দক্ষতা অর্জন অপরিহার্য। সমাজকর্ম অনুশীলন পদ্ধতির মধ্যে ব্যক্তি সমাজকর্ম ও দল সমাজকর্ম পদ্ধতি অন্যতম মৌলিক পদ্ধতি হিসাবে স্বীকৃত। এ দু'টি পদ্ধতি অনুশীলনের কর্মধারা উন্নত দেশে সুসংহত ও সুসংগঠিত এবং বিস্তৃত কর্ম-পরিমণ্ডলে ব্যাপ্ত কিন্তু অনুন্নত বা উন্নয়নশীল দেশগুলো এ ব্যাপারে আশাব্যঞ্জকভাবে অগ্রসর নয়। এ দু'পদ্ধতির সুসংহত জ্ঞান-দক্ষতা অর্জনে সমাজকর্মীদের কার্যকরভাবে সমৃদ্ধ হতে এ বইটি ব্যাপকভাবে সহায়ক হবে।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ–৬
(জনসমষ্টি সমাজকর্ম ঃ গ্রামীণ ও শহর সমাজ প্রেক্ষিত)

– সৈয়দ শওকতুজ্জামান

জনসমষ্টি উন্নয়ন কি, কিভাবে কোন পদ্ধতি কৌশলে সমষ্টিগতভাবে জনগণের উন্নয়ন আনা যায় এ বিষয়টি এদেশে বিভিন্নভাবে বিভিন্ন সময় অনুশীলন হলেও এ ক্ষেত্রে সমাজকর্মের জ্ঞান-দক্ষতার ব্যাপকতর ও কার্যকর প্রয়োগের প্রয়োজনীয়তা অনস্বীকার্য। এ বইটিতে উল্লেখিত দিকগুলোর তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক দিক তুলে ধরা হয়েছে। তাতে পল্লী জনসমষ্টি উন্নয়ন ও শহর সমাজ উন্নয়নের বিভিন্ন বিষয় এবং বর্তমান বিভিন্ন সরকারী-বেসরকারী কর্মকাণ্ডের বিস্তৃত মূল্যায়নধর্মী বিবরণ বিবৃত করা হয়েছে। পল্লীবাসীর উন্নয়ন এবং শহর সমাজ উন্নয়নের কার্যকর কর্মপ্রক্রিয়া গড়ে তোলা এবং বিজ্ঞানসম্মত জ্ঞান-দক্ষতার প্রয়োগ ক্ষমতা অর্জনে এ বইটি সংশ্লিষ্ট সকলের জন্য আবশ্যক।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ–৭
(সামাজিক গবেষণা ও পরিসংখ্যান)

– সৈয়দ শওকতুজ্জামান

সামাজিক গবেষণা একটি অতি প্রয়োজনীয় বুদ্ধিবৃত্তিক চর্চা হিসাবে স্বীকৃত। সামাজিক সমস্যার বিজ্ঞান সম্মত অনুসন্ধান, সামাজিক উন্নয়নের সঠিক পথ-নির্দেশনা লাভ এবং সমাজকল্যাণমূলক বিভিন্ন সেবা কার্যক্রম গ্রহণ মূল্যায়নে সামাজিক গবেষণার জ্ঞান অত্যাবশ্যক। এ বইটিতে সামাজিক গবেষণার কর্ম পদ্ধতির বিবরণ ও অনুশীলন বিষয়ে সংক্ষিপ্ত অথচ আবশ্যকীয় বিষয়াদি আলোচনা করা হয়েছে। এর সাথে প্রসঙ্গক্রমে তথ্য সংগ্রহ বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে অন্যতম বিষয় সংখ্যাতাত্ত্বিক পদ্ধতি তথা পরিসংখ্যান কৌশল সম্পর্কেও প্রয়োজনীয় আলোচনা বিবৃত করা হয়েছে। সমাজকর্মীসহ সামাজিক গবেষণায় আগ্রহী ও এ কাজে জড়িত সকলেই এ বই পাঠে উপকৃত হবেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ৮
(সমাজকর্মে সংশ্লিষ্ট ধারণা ও তত্ত্ব)

সমাজকর্ম অনুশীলনে পর্যাপ্ত তাত্ত্বিক জ্ঞান ও দক্ষতা একটি আবশ্যকীয় বিষয়। তদুপরি অনেক উন্নত-উন্নয়নশীল দেশে সমাজকর্ম পেশার অনুশীলন বিভিন্নভাবে বিভিন্ন অভিগমন-কর্মধারায় সমৃদ্ধ হওয়ার প্রেক্ষিতে সমাজকল্যাণ অধ্যয়নে আগ্রহী ব্যক্তিমাত্রই এসব জানা দরকার। "সমাজকর্মে সংশ্লিষ্ট ধারণা ও তত্ত্ব" শীর্ষক গ্রন্থখানি কার্যকর ও অর্থবহ অনুশীলনের আবশ্যকীয় জ্ঞান-দক্ষতা বিষয়ক বিস্তারিত আলোচনায় সমৃদ্ধ। বাংলাদেশে সমাজকল্যাণ/সমাজকর্ম অধ্যয়নে জড়িত শিক্ষক-শিক্ষার্থী এবং সমাজসেবা ও সমাজকর্মে নিয়োজিত হতে আগ্রহী কিংবা নিয়োজিত হয়েছেন এমন সকলেই এ গ্রন্থ পাঠ করে নিজ নিজ কর্মক্ষেত্রে অধিকতর সাফল্য লাভে সক্ষম হতে পারেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ৯
(স্বেচ্ছাসেবী সমাজকল্যাণ ও বাংলাদেশের এনজিও সমূহ)

সমাজকল্যাণের বিস্তৃত অঙ্গনে স্বেচ্ছাসেবী সমাজকল্যাণ বর্তমানে নানামাত্রিক কর্মকাণ্ডে বিকশিত। তদুপরি এরূপ কর্মতৎপরতার প্রয়াস ও অর্জনও বিভিন্ন সেবাক্ষেত্রে ব্যাপকতর। দেশের নীতি কাঠামোতে সমাজ উন্নয়নের ক্ষেত্রে স্বেচ্ছাসেবী সংস্থাসমূহ কি ভূমিকা পালন করছে, এসব সংস্থা কিভাবে গঠিত ও পরিচালিত হয়, দেশের নেতৃস্থানীয় কতিপয় সংস্থার গঠন কাঠামো ও কর্মতৎপরতা কি ধরনের এবং স্বেচ্ছাসেবী সমাজকল্যাণের বিকাশধারায় এর সম্ভাবনাময় দিক সমূহ কি হতে পারে এসব ব্যাপারে এ গ্রন্থে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। সমাজকল্যাণ বিষয়ে পাঠদানরত শিক্ষক ও পাঠ গ্রহণকারী শিক্ষার্থী ছাড়া সমাজউন্নয়নে জড়িত বিভিন্ন এনজিও-কর্মী ও গবেষকের নিকট এ গ্রন্থটি গুরুত্বপূর্ণ হিসাবে বিবেচনার দাবী রাখে।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ১০
(মানবাধিকার, সামাজিক ন্যায়বিচার ও সমাজকল্যাণ)

সমাজে যাবতীয় শোষণ-বঞ্চনা ও নির্যাতন-অবদমনের মধ্যে মানবীয় মর্যাদা ও বিকাশধারা সমুন্নত রাখার অধিকার বিষয়ক বক্তব্য নিয়ে মানবাধিকার বিষয়ক আলোচনা। মানবাধিকার ও সামাজিক ন্যায়বিচার সমাজকল্যাণের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ-১০ (মানবাধিকার, সামাজিক ন্যায়বিচার ও সমাজকল্যাণ) গ্রন্থে জাতীয়, আন্তর্জাতিক ও সার্বজনীন মানবাধিকারের পরিচিতি ও অর্জন-পরিস্থিতি তুলে ধরার সাথে সাথে এর সংরক্ষণ ও সমুন্নত রাখার ব্যাপারে নিয়োজিত বিভিন্ন স্থানীয়, জাতীয় ও আন্তর্জাতিক সংস্থার প্রয়াস প্রসঙ্গত আলোচিত হয়েছে। এতে করে মানবাধিকার ও সমাজকল্যাণের সাথে সংশ্লিষ্ট হতে চান বা হয়েছেন এমন আগ্রহী পাঠক নিঃসন্দেহে অনেক আবিশ্যিক জ্ঞান লাভে উপকৃত হবেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ১১
(বাংলাদেশের সমাজ ও পরিবেশ)

আমরা বাংলাদেশের নাগরিক। একই সাথে আমরা স্থানীয়, আঞ্চলিক ও আন্তর্জাতিক সমাজেরও অন্তর্ভুক্ত মানুষ। কিন্তু আমরা নিজ সমাজ ও পরিবেশকে কতটা জানি? এ জানা যখন বিজ্ঞানসম্মত তথ্যভিত্তিক ব্যাপক, সমৃদ্ধ ও সামগ্রিক হয় তখনই আমাদের সমাজ ও পরিবেশ অধিকতর সুষ্ঠুভাবে আমাদের কাছে পরিচিত হয়। সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ-১১ (বাংলাদেশের সমাজ ও পরিবেশ) গ্রন্থটি এরূপ পরিচিতি এনে দেয়ার লক্ষ্যে রচিত। এতে বাংলাদেশের সমাজ ও পরিবেশ নিয়ে বিজ্ঞানসম্মত তথ্যভিত্তিক আলোচনা আছে। ফলে সমাজবাসী মানুষ হিসাবে সকলেই এর পাঠে লাভবান হতে পারেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ – ১২
(জনতাত্ত্বিক বিষয় ঃ বাংলাদেশে নীতি, পরিকল্পনা ও কর্মসূচী)

যেকোন দেশে জনসংখ্যার গঠন-কাঠামো, প্রকৃতি-বিস্তৃতি ও জনমিতিক বৈশিষ্ট্যাদি সে দেশের উন্নতি-অবনতি ও জীবনযাত্রার নানাদিককে প্রভাবিত করে। সে কারণে জনসংখ্যার এসব বাস্তবতাকে নিয়ে দরকার পড়ে ব্যাপকতর ও গভীরতর অধ্যয়ন। এক্ষেত্রে জনসংখ্যা অধ্যয়নের ধারণাগত ও পদ্ধতিগত দিকসহ বিভিন্ন ধরনের নীতি-পরিকল্পনা ও কর্মসূচী জানা আবশ্যক। সমাজকল্যাণ সমীক্ষণ-১২ (জনতাত্ত্বিক বিষয় ঃ বাংলাদেশ, নীতি, পরিকল্পনা ও কর্মসূচী) গ্রন্থটি এসব আলোচনায় সমৃদ্ধ। আগ্রহী পাঠকমাত্রই এই গ্রন্থটি পাঠ করে সহজেই নিজ জ্ঞানগত ভিত্তিকে মজবুত কাঠামোর ওপর দাঁড় করাতে পারেন।

সমাজকল্যাণ সমীক্ষা – ৪
শিল্প বিপ্লব, সমাজকল্যাণ ও কল্যাণ রাষ্ট্র
(স্নাতক শ্রেণীর জন্য)

– সৈয়দ শওকতুজ্জামান

সমাজকর্ম
(অনার্স নন-মেজর কোর্সের শিক্ষার্থীদের জন্য)

– সৈয়দ শওকতুজ্জামান

কী নিয়ে আমরা একবিংশ শতাব্দীতে প্রবেশ করব? ... কর্তব্য ছিল সরকারেরই। কিন্তু তারা তা করেননি। হয়তো বুঝে উঠতে পারেননি। তরুণ চিন্তাবিদ এস. এম. জাকির হুসাইন নিজ থেকেই সে দায়িত্ব নিয়েছেন। বাংলাদেশের কোনো গণিতের অধ্যাপক আজও পর্যন্ত এরূপ একটি বই লেখেননি।

ড. শহীদুল্লাহ মৃধা

চিত্রকরের এবং কবির প্যাটার্নের মতো গণিতবিদের প্যাটার্নকেও সৌন্দর্যমণ্ডিত হতে হয়; কবির ব্যবহৃত শব্দমালার রকমারি রং যেমন পরস্পর সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়, তেমনি হতে হবে গণিতবিদের আইডিয়াকেও। সৌন্দর্যই প্রথম পরীক্ষাঃ কুৎসিত গণিতের জন্য কোনো স্থায়ী জায়গা এই ভুবনে নেই।

ডি. এইচ. হার্ডি

A Mathematician's Apology