অঙ্কের মজা

ইয়া. পেরেলম্যান

অঙ্কের মজা

www.pathagar.com

অঙ্কের মজা

ইয়া. পেরেলম্যান

বোবাশাহ্ প্রকাশনী
ইসলামিয়া মার্কেট
নীলক্ষেত

www.pathagar.com

অনুবাদ : রবীন্দ্র মজুমদার
মোঃ সোহেল

একমাত্র পরিবেশক
ভাই ভাই প্রকাশনী
ইসলামিয়া মার্কেট
নীলক্ষেত
ঢাকা-১২০৫

মূল্য ঃ ১২৫.০০

মুদ্রণ ঃ ৩৮৬ এলিফ্যান্ট রোড

© English translation, Bobasha publishers
ISBN 5-03-000263-4 © বাংলা অনুবাদ ; বোবাশাহ্ প্রকাশনী, ২০০৪

www.pathagar.com

সূচীপত্র

ভূমিকা

অধ্যায় এক : দুপুরে খেতে খেতে মাথা ঘামানো ১
1. বনের মাঝে ফাঁকা জায়গায় একটা কাঠবেড়ালি ১
2. স্কুলের কয়েকটি দল ৩
3. কাঠকুটোর সমস্যা ৪
4. কে বেশি গুনেছে ৫
5. নাতি-ঠাকুর্দা ৫
6. রেলগাড়ির টিকিট ৫
7. হেলিকপ্টার নামল কোথায় ৬
8. ছায়া ৭
9. দেশলাই-কাঠি ৭
10. 'আশ্চর্য' গাছের গুঁড়ি ৮
11. ডিসেম্বরের হেঁয়ালি ৯
12. একটা পাটিগণিতের কৌশল ৯

1 থেকে 12 নং প্রশ্নের উত্তর ১০
13. হারিয়ে যাওয়া অঙ্কটি ১৮
14. জিজ্ঞেস না করেই সংখ্যা বলে দেওয়া ২০
15. কার পকেটে কোন্ জিনিসটা ২১

অধ্যায় দুই : খেলার অঙ্ক ২৪
ডমিনো
16. 28টি গুটির একটি শৃঙ্খল ২৪
17. একটি শৃঙ্খলের দুই প্রান্ত ২৪
18. ডমিনোর একটি কৌশল ২৪
19. একটি ফ্রেম ২৪
20. সাতটি বর্গক্ষেত্র ২৪
21. ম্যাজিক বর্গক্ষেত্র ২৬
22. ডমিনোর প্রগতি ২৬

www.pathagar.com

	পনেরোর ধাঁধা	
	23. প্রথম সমস্যা	৩২
	24. দ্বিতীয় সমস্যা	৩২
	25. তৃতীয় সমস্যা	৩২
	16 থেকে 25 নং প্রশ্নের উত্তর	৩২
অধ্যায় তিন :	আরো এক ডজন ধাঁধা	৩৭
	26. সুতলি	৩৭
	27. মোজা আর দস্তানা	৩৭
	28. চুলের পরমায়ু	৩৭
	29. মজুরি	৩৮
	30. স্কি করে যাওয়া	৩৮
	31. দুই শ্রমিক	৩৮
	32. একটি প্রতিবেদন টাইপ করা	৩৮
	33. দুটি কগ-চাকা	৩৮
	34. বয়স কতো ?	৩৯
	35. আরেকটি বয়সের ধাঁধা	৩৯
	36. একটি দ্রব তৈরি করা	৩৯
	37. কেনাকাটা	৩৯
	26 থেকে 37 নং প্রশ্নের উত্তর	৪০
অধ্যায় চার :	গোনাগুনি	৪৬
	38. গুনতে জানেন কি	৪৬
	39. বনের মধ্যে গাছের সংখ্যা গোনা হয় কেন	৫০
অধ্যায় পাঁচ :	হোঁচট খাওয়ানো সংখ্যা	৫১
	40. পাঁচ রুবলের বদলে একশো রুবল	৫১
	41. এক হাজার	৫১
	42. চব্বিশ	৫১
	43. ত্রিশ	৫২
	44. যে-অংকগুলির ঘর ফাঁকা রয়েছে	৫২
	45. অঙ্কগুলি কি	৫২
	46. ভাগ	৫২
	47. 11 দিয়ে ভাগ করা	৫২

www.pathagar.com

48. জমার গুণ ৫৩
49. সংখ্যার ত্রিভুজ ৫৩
50. আরেকটি সংখ্যার ত্রিভুজ ৫৩
51. যাদু তারকা ৫৩
40 থেকে 51 নং প্রশ্নের উত্তর ৫৪
অধ্যায় ছয় : রাক্ষুসে সব সংখ্যা ৬০
52. একটি লাভজনক চুক্তি ৬০
53. গুজব ৬৫
54. বাইসাইকেল-জুয়াচুরি ৬৯
55. পুরস্কার ৭২
56. দাবার ছক সম্বন্ধে একটি কিংবদন্তী ৭৭
57. দ্রুত বংশবৃদ্ধি ৮২
58. বিনি পয়সায় ভোজ ৮৭
59. মুদ্রার কৌশল ৯২
60. একটি বাজি ধরা ৯৬
61. আমাদের ভিতরে বাইরে রাক্ষুসে সব সংখ্যা ১০১
অধ্যায় সাত : মাপজোখের যন্ত্রপাতি ছাড়াই ১০৫
62. পা ফেলে ফেলে দূরত্ব মাপা ১০৫
63. জীবন্ত মাপকাঠি ১০৬
64. মুদ্রার সাহায্যে মাপা ১০৭
অধ্যায় আট : জ্যামিতিক হেঁয়ালি ১১০
65. টানা-গাড়ি ১১০
66. বিবর্ধক পরকলার মধ্য দিয়ে ১১০
67. ছুতোর-মিস্ত্রির লেভেল্ ১১১
68. কতোগুলো তল ১১১
69. চন্দ্রকলা ১১১
70. দেশলাই-কাঠির খেলা ১১১
71. আরেকটি দেশলাই-কাঠির খেলা ১১২
72. মাছিটা কোন পথ ধরে যাবে ১১২
73. একটি প্লাগ তৈরি করুন ১১৩
74. দ্বিতীয় প্লাগ ১১৩

www.pathagar.com

75. তৃতীয় প্রাগ ১১৩
76. একটি মুদ্রার কৌশল ১১৩
77. মিনারের উচ্চতা ১১৪
78. সদৃশ রেখাচিত্র ১১৪
79. তারের ছায়া ১১৪
80. একটি ইঁট ১১৪
81. দৈত্য ও বামন ১১৫
82. দুটি তরমুজ ১১৫
83. দু[illegible] ১১৫
[illegible]. একটি চেরি ফল ১১৫
85. ইফেল টাওয়ার ১১৫
86. দুটি প্যান ১১৫
87. শীতের দিনে ১১৫

65 থেকে 87 নং প্রশ্নের উত্তর ১১৫

অধ্যায় নয় : বৃষ্টি আর তুষারের জ্যামিতি ১২৬
88. প্লুভিওমিটার ১২৬
89. বৃষ্টিপাতের পরিমাণ কতো ১২৮
90. কতোটা তুষার পড়েছে ১২৯

অধ্যায় দশ : গণিত ও মহাপ্লাবন ১৩০
91 মহাপ্লাবন ১৩০
92. এই মহাপ্লাবন কি সম্ভব ছিল ১৩৪
93. এমন একটা বিশাল নৌকো হতে পারে কি ১৩৫

অধ্যায় এগারো : ত্রিশটি বিভিন্ন সমস্যা ১৩৭
94. একটি শিকল ১৩৭
95. মাকড়সা আর গুবরে পোকা ১৩৭
96 ওয়েস্টকোট, টুপি আর গ্যালোশ ১৩৭
97. মুরগির ডিম আর হাঁসের ডিম ১৩৮
98 বিমান সফর ১৩৮
99. অর্থ উপহার ১৩৮
100. দুটি ড্রাফ্‌ট্‌-গুটি ১৩৮
101. দুটি অঙ্ক ১৩৮
102. এক ১৩৮

www.pathagar.com

103. পাঁচটি 9 ১৩৮
104. দশটি অঙ্ক ১৩৮
105. চারটি উপায় ১৩৮
106. চারটি 1 ১৩৮
107. রহস্যময় ভাগ ১৩৮
108. আরেকটি ভাগ ১৩৯
109. দৈর্ঘ্যটা কতো দাঁড়াবে ১৩৯
110. প্রায় একই ধরণের আরেকটি ১৩৯
111. উড়োজাহাজ ১৪০
112. দশ লক্ষ জিনিস ১৪০
113. পথের সংখ্যা ১৪০
114. ঘড়ির ডায়াল ১৪০
115. আট-কোণা তারা ১৪০
116. একটি সংখ্যা-চক্র ১৪১
117. তেপায়া ১৪১
118. ঘড়ির কাঁটার কোণ ১৪১
119. নিরক্ষরেখা ধরে ১৪১
120. ছয় সারি ১৪২
121. ক্রুশ ও চন্দ্রকলা ১৪২
122. ঘনককে ভাগ করা ১৪২
123. আরও ভাগ করা ১৪৩
94 থেকে 123 নং প্রশ্নের উত্তর ১৪৪

www.pathagar.com

ভূমিকা

এই বইটি পড়ে উপভোগ করার জন্যে গণিত সম্বন্ধে একটা মোটামুটি জ্ঞান—অর্থাৎ, পাটিগণিতের নিয়মকানুন আর জ্যামিতি সম্বন্ধে প্রাথমিক জ্ঞান থাকলেই যথেষ্ট। খুব কম অঙ্কের বেলাতেই সমীকরণ তৈরি করা আর সমাধান করার মতো দক্ষতার দরকার হবে এবং এ ধরনের অঙ্ক কিছু থাকলেও, সেগুলিও নিতান্তই সহজ।

বিষয়সূচীর মধ্যেও, পাঠক দেখলেই বুঝবেন, যথেষ্ট বৈচিত্র্য আছে: নানা ধরনের ধাঁধা আর গাণিতিক বুদ্ধির খেলার এক বিচিত্র সংগ্রহ থেকে, কাজে লাগার মতো গণনা আর পরিমাপ সংক্রান্ত নানা প্রয়োগমূলক অঙ্ক পর্যন্ত, এর বিষয়বস্তু বিস্তৃত।

গ্রন্থকার তাঁর এই বইটিকে যথাসম্ভব নতুন করে তোলার জন্যে সর্বপ্রকারে চেষ্টা করেছেন; তাঁর অন্যান্য বইয়ে ('বুদ্ধির খেলা আর হরেক মজা', 'আগ্রহ জাগানোর মতো নানা প্রশ্ন' ইত্যাদিতে) ইতিপূর্বেই যা-যা বলা হয়েছে, সেগুলির পুনরাবৃত্তি এড়িয়ে গেছেন। পাঠক এই বইটিতে মাথা ঘামাবার মতো নানা ধরনের এমন কিছু প্রশ্ন পাবেন যেগুলি আগের কোনো বইয়ে স্থান পায়নি। ষষ্ঠ অধ্যায়টি —'রাক্ষুসে সব সংখ্যা'—গ্রন্থকারের পূর্ববর্তী পুস্তিকাগুলির একটি অবলম্বনে লেখা এবং এতে চারটি নতুন গল্প যোগ করা হয়েছে।

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় এক ॥

দুপুরে খেতে খেতে মাথা ঘামানো

বৃষ্টি নেমেছে···ছুটি কাটাতে এসে যে 'হলিডে হোম'-এ আমরা রয়েছি, সেখানে সবে দুপুরের খাওয়া খেতে বসেছি সবাই। অতিথিদের একজন বললেন, সকাল বেলায় যা ঘটেছে, সে সম্বন্ধে আমরা শুনতে চাই কিনা।

সবাই সায় দেওয়াতে শুরু করলেন তিনি।

1. **বনের মাঝে ফাঁকা জায়গায় একটা কাঠবেড়ালী :** "একটা কাঠবেড়ালীর সঙ্গে লুকোচুরি খেলে বেশ মজা পেয়েছি," বললেন তিনি, "বনের মধ্যে ওই ঘাসে ঢাকা ছোট গোল ফাঁকা জায়গাটা তো আপনারা জানেন—ওই যেটার ঠিক মাঝখানে একটা মাত্র বার্চ গাছ দাঁড়িয়ে আছে? ওই গাছটাতেই একটা কাঠবেড়ালী আমার চোখের আড়ালে লুকিয়ে ছিল। একটা ঝোপের পিছন থেকে আমি বেরিয়ে আসতেই দেখতে পেলাম ওর নাক আর জ্বলজ্বলে চোখ দুটো গুঁড়িটার আড়াল থেকে উঁকি মারছে। ক্ষুদে প্রাণীটাকে দেখব ভেবে—ও যাতে ভয় না পায়, সেজন্য দূরত্বটাকে বজায় রাখার কথা মনে রেখে—আমি বনের মাঝে ফাঁকা জায়গাটার ধার ঘেঁষে গাছটার চারদিকে ঘুরতে লাগলাম। চার পাক ঘুরলাম। কিন্তু ক্ষুদে ঠগটা কেবলই সন্দেহ ভরা চোখে আমার দিকে তাকাচ্ছে আর সমস্তক্ষণ আমার দিক থেকে নিজেকে গাছটার আড়ালে রাখছে। যতই চেষ্টা করি না কেন, কিছুতেই আর ওটার পিছন দিকটা দেখতে পেলাম না।"

"কিন্তু," বাধা দিয়ে বলল শ্রোতাদের একজন, "এই মাত্র নিজেই তো বললেন যে, আপনি চার বার গাছটাকে ঘিরে পাক খেয়েছেন।"

"গাছটাকে ঘিরে, হ্যাঁ, কিন্তু কাঠবেড়ালীটাকে ঘিরে নয়।"

"কিন্তু কাঠবেড়ালীটা তো গাছেই ছিল, তাই না?"

"ছিল।"

"অর্থাৎ, আপনি কাঠবেড়ালীটারও চারদিকে ঘুরপাক খেয়েছেন।"

"ওটার পিঠের দিকটাই যখন দেখতে পাইনি, তখন কি করে বলছেন যে ওটাকে ঘিরে ঘুরপাক খেয়েছি?"

"গোটা ব্যাপারটার সঙ্গে ওর পিঠের সম্পর্কটা কি? ফাঁকা জায়গাটার ঠিক মাঝখানে গাছের উপরে ছিল কাঠবেড়ালীটা। আর আপনি গাছটাকে ঘিরে ঘুরপাক খেয়েছেন। অর্থাৎ আপনি কাঠবেড়ালীটারও চারপাশে ঘুরপাক খেয়েছেন।"

www.pathagar.com

"আজ্ঞে না, তা করিনি। মনে করা যাক, আমি আপনাকে পাক দিয়ে ঘুরছি আর আপনিও সঙ্গে সঙ্গে ঘুরে চলেছেন শুধু আপনার মুখখানা আমার সামনে রেখে। এটাকে কি আপনাকে ঘিরে ঘোরা হচ্ছে বলবেন ?"

"নিশ্চয়, তাছাড়া আর কি বলা যাবে ?"

"আপনি বলতে চান, আমি কখনো আপনার পিছনে না গেলেও আর আপনার পিঠের দিকটা না দেখলেও, আপনার চারধারে পাক খাচ্ছি ?"

"পিঠটাকে ভুলে যান! আপনি আমাকে ঘিরে ঘুরছেন, আর সেটাই আসল কথা। এর সঙ্গে পিঠের কি সম্পর্ক ?"

"দাঁড়ান। কোনো কিছুর চারদিকে ঘুরপাক খাওয়াটা কি বলুন দিকি। আমি যেভাবে এটা বুঝি, সেটা হল—এমনভাবে পাক খাওয়া, যাতে যে জিনিসটার চারদিকে আমি ঘুরছি, সেই জিনিসটাকে সর্বদিক থেকেই দেখা। ঠিক বলেছি, প্রফেসর ?" আমাদের টেবিলে বসা একজন প্রবীণ-বয়সীর দিকে ফিরে জিজ্ঞেস করলেন তিনি।

"আপনাদের পুরো যুক্তিটাই মূলত একটা শব্দকে নিয়ে," বললেন অধ্যাপক, "প্রথমেই আপনাদের যেটা করা উচিত সেটা হল 'ঘুরপাক' খাওয়ার সংজ্ঞা সম্বন্ধে একমত হওয়া। কোনো জিনিসের চারদিকে ঘোরা বলতে আপনারা কি বোঝেন ? দু'রকম ভাবে সেটা বোঝা যেতে পারে। প্রথমত, সেটা হল একটা বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত কোনো জিনিসকে প্রদক্ষিণ করা। দ্বিতীয়ত, সেটা হল সেই জিনিসটিকে এমনভাবে প্রদক্ষিণ করা, যাতে সেটার সব দিকই দেখা যায়। যদি প্রথম অর্থটা ধরেন, তাহলে আপনি কাঠবেড়ালীটাকে ঘিরে চার বার পাক খেয়েছেন। আর যদি দ্বিতীয় অর্থটা ধরেন, তাহলে আপনি আদৌ সেটার চারদিকে ঘোরেননি। এখানে সত্যিই কোনো তর্কের অবকাশ নেই—অর্থাৎ, যেখানে আপনারা দুজনে একই ভাষায় কথা বলছেন এবং শব্দগুলির একই অর্থ করছেন।"

"বেশ তো, দুটো অর্থ হয়—একথা স্বীকার করছি। কিন্তু কোনটা সঠিক ?"

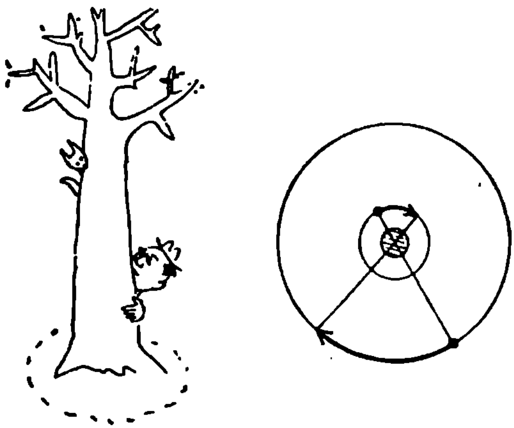
"প্রশ্নটাকে এভাবে রাখা ঠিক নয়। আপনারা যে কোনো বিষয়ে একমত হতে পারেন। প্রশ্ন হল, দুটো অর্থের কোন্‌টা সাধারণত বেশি গ্রাহ্য ? আমার মতে, প্রথম অর্থটা। বলছি, কেন। আপনারা জানেন, সূর্য 25 দিনের সামান্য কিছু বেশি সময় নিয়ে নিজেই পুরো একবার চক্রাকারে আবর্তন করে..."

"সূর্য পাক খায় নাকি ?"

"নিশ্চয়, ঠিক যেমন পৃথিবী নিজের অক্ষকে ঘিরে পাক খায়। এখন, মনে করুন, সূর্য সেটা করতে সময় নিচ্ছে 25 দিন নয়—365¼ দিন,

www.pathagar.com

অর্থাৎ পুরো এক বছর। যদি তাই হত, তাহলে পৃথিবী তার শুধু একটি দিকই —অর্থাৎ, শুধু তার 'মুখ'খানাই—দেখত। কিন্তু তা সত্ত্বেও, কেউ কি সেক্ষেত্রে বলবে যে, পৃথিবী সূর্যের চারধারে ঘুরছে না ?"



চিত্র 1 : ক্ষুদে ঠগটা সমস্তক্ষণ আমার দৃষ্টির আড়ালে রয়ে গেছে

"হুঁ। এবার ব্যাপারটা পরিষ্কার হল—আমি সত্যিই কাঠবেড়ালীটাকে পরিক্রমা করেছি।"

"আমার একটা প্রস্তাব আছে, বন্ধুগণ!" দলের একজন বলে উঠলেন, "বৃষ্টি নেমেছে, কেউই এখন আর বাইরে বেরুচ্ছে না, তাই আসুন কিছু ধাঁধার খেলা হোক। ওই কাঠবেড়ালীর হেঁয়ালিটা দিয়ে দিব্যি শুরু করা গেছে। আসুন, কিছু ধাঁধা ভাবা যাক।"

"বীজগণিত বা জ্যামিতির ব্যাপার-ট্যাপার হলে আমি এসবের মধ্যে নেই," বলে উঠল এক তরুণী।

"আমিও", তার সঙ্গে যোগ দিল আরেকজন।

"না, আমাদের সবাইকেই খেলতে হবে। কিন্তু কোনো বীজগাণিতিক বা জ্যামিতিক সূত্র থেকে বিরত থাকব বলে আমরা সবাই প্রতিশ্রুতি দেব—শুধু, ধরা যাক, সবচেয়ে প্রাথমিক সূত্রগুলি ছাড়া। কোনো আপত্তি নেই তো ?"

"না!" সমস্বরে বলে উঠল আর সবাই, "শুরু করা যাক!"

"আরেকটা কথা। অধ্যাপক মশাই হবেন আমাদের বিচারক।"

2. স্কুলের কয়েকটি দল : "পাঠক্রমের বাইরের বিষয়ে চর্চা করার জন্য আমাদের স্কুলে পাঁচটি দল আছে", শুরু করল একজন তরুণ পায়োনিয়র,

www.pathagar.com

"এগুলি হল : ফিটারদের দল; যন্ত্রাংশ জোড় লাগায় যারা সেই জয়নারদের দল; ফটোগ্রাফি সম্বন্ধে আগ্রহীদের দল; দাবা খেলোয়াড়দের আর ঐকতানিকদের দল। ফিটারদের দলটার বৈঠক বসে একদিন পর-পর; জয়নাররা প্রতি তৃতীয় দিনে মিলিত হয়; ফটোগ্রাফির দল—প্রতি চতুর্থ দিনে; দাবাড়ুদের দল—প্রতি পঞ্চম দিনে; আর, ঐকতানিকদের দলটা জড়ো হয় প্রতি ষষ্ঠ দিনে। এই পাঁচটা দলেরই প্রথম আসর বসেছিল পয়লা জানুয়ারি। তারপর থেকে প্রত্যেকটি দলের নিয়মিত আসর বসেছে ওই সময়সূচী অনুযায়ী। প্রশ্ন হল, বছরের প্রথম তিন মাসে ক'বার এই পাঁচটি দলের সবগুলিরই একই দিনে আসর বসেছে (পয়লা জানুয়ারি বাদ দিয়ে) ?"

"বছরটা কি লিপ ইয়ার ?"

"না।"

"অর্থাৎ, ওই প্রথম তিন মাসে ছিল 90 দিন।

"ঠিক।"

"এই সঙ্গে আমাকে আরেকটি প্রশ্ন যোগ করতে দিন", বলে উঠলেন অধ্যাপক, "সেটা এই : ওই প্রথম তিন মাসে যে দিনগুলিতে কোনো দলেরই আসর বসেনি, সে রকম দিনের সংখ্যা কতো ?"

"ও প্রশ্নটার মধ্যে কিছু একটা চালাকি আছে, তাই-না ? অন্য কোনো একটাও এমন দিন নেই যে দিনে পাঁচটি দলের সবগুলিরই আসর বসেছে এবং এমন দিনও থাকছে না যেদিন কোনো-না-কোনো দলের আসর বসেনি। এটা স্পষ্ট !"

"কেন ?"

"তা জানিনে। তবে মনে হচ্ছে—প্রশ্নটার মধ্যে কিছু একটা চালাকি আছে।"

"বন্ধুগণ !" খেলার প্রস্তাব যিনি করেছিলেন, তিনি বললেন, "উত্তরগুলো আমরা এখন বলে দেব না। ভেবে দেখার জন্য আরও কিছু সময় দেওয়া যাক। রাত্রিবেলায় খাবার সময়ে অধ্যাপক মশাই উত্তরগুলি ঘোষণা করবেন।"

3 কাঠকুটোর সমস্যা : "গ্রীষ্মের ছুটি কাটাবার একটা বাংলোয় ঘটেছিল ব্যাপারটা। বলতে পারেন ঘর-গেরস্থালির সমস্যা। বাংলোটিতে আছে তিন জন স্ত্রীলোক। ধরা যাক : 'X', 'Y' আর 'Z'। পুরনো বাড়ি, রান্নার উনুনটাও সেকেলে। X উনুনটায় তিনটে কাঠের টুকরো গুঁজে দিল। Y গুঁজে দিল পাঁচটা কাঠের টুকরো। আর, Z-এর কাছে আগুন জ্বালাবার কাঠ না থাকায় তার অংশ হিসেবে সে তাদের আট কোপেক দিল। এখন, X আর Y কি ভাবে ওই পয়সাটা ভাগ করে নেবে ?"

www.pathagar.com

"সমান-সমান", চটপট জবাব দিল একজন, "এরা দুজনে যে কাঠ জোগান দিয়েছে, সেই কাঠের আগুনেই তো Z ব্যবহার করেছে, না-কি?"

"ভুল বললেন", প্রতিবাদ করল আরেকজন X আর Y তো সমান-সমান পরিমাণে কাঠ দেয়নি—একজন কম, অন্যজন বেশি। সুতরাং X-এর পাওয়া উচিত তিন কোপেক আর Y-এর বাকিটা। আমার মনে হয়, সেটাই ন্যায়সঙ্গত হবে।"

"হ্যাঁ, এ সম্বন্ধে ভাববার যথেষ্ট সময় আপনাদের আছে", বললেন অধ্যাপক, "এর পরে কে?"

4. কে বেশি গুনেছে: দুজন লোক—একজন তার বাড়ির দরজায় দাঁড়িয়ে, আর অন্যজন রাস্তার বুকে একবার এদিক একবার ওদিক পায়চারি করতে করতে—পথ-চলতি মানুষদের সংখ্যা গুনেছে পুরো এক ঘণ্টা ধরে। কে বেশি গুনেছে?"

টেবিলের প্রান্তে বসা একজন বলল, "স্বাভাবিকভাবেই, যে এদিকে-ওদিকে পায়চারি করতে করতে গুনেছে, সে-ই।"

"রাত্রে খাবার সময়ে উত্তরটা জানতে পারবেন", বললেন অধ্যাপক, "এর পরে?"

5. নাতি-ঠাকুর্দা: 1932 সালে আমার বয়েস ছিল আমার জন্মসালের শেষ দুটি অংক যা তাই। এই মজার যোগাযোগটির কথা আমার ঠাকুর্দাকে বলায়, তিনি আমাকে অবাক করে দিয়ে বললেন যে, তাঁর ক্ষেত্রেও ওই একই ব্যাপার প্রযোজ্য। এটা অসম্ভব বলেই ভেবেছিলাম আমি..."

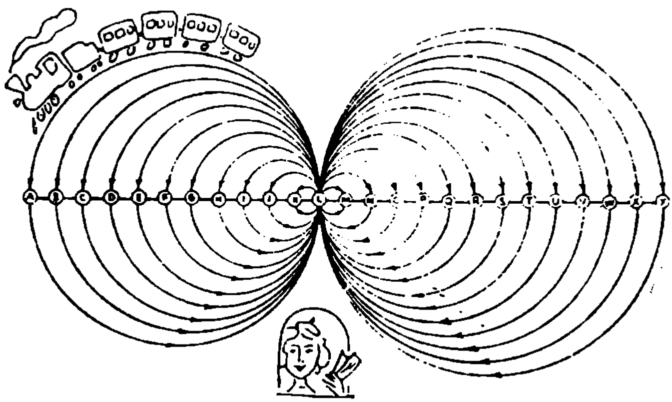
"নিশ্চয়ই অসম্ভব", বলে উঠল এক তরুণী।

"বিশ্বাস করুন, এটা রীতিমত সম্ভব এবং ঠাকুর্দা সেটা প্রমাণও করে দিলেন। 1932 সালে আমাদের দুজনেরই কার কতো বয়েস ছিল?

6. রেলগাড়ির টিকিট: পরের জন, এক তরুণী, বলল, "ট্রেনের টিকিট বিক্রি করা আমার কাজ। লোকে ভাবে কাজটা খুব সোজা। তাদের বোধ হয় কোনো ধারণাই নেই যে, এমন-কি, একটা ছোট স্টেশনেও কতোগুলো টিকিট বেচতে হয়। আমার রেলপথে 25টি স্টেশন আছে এবং আমাকে আপ লাইনে আর ডাউন লাইনে প্রত্যেকটি সেকশনের জন্য বিভিন্ন টিকিট বিক্রি করতে হয়। তাহলে কতো বিভিন্ন রকমের টিকিট আমার স্টেশনে আছে বলে আপনারা মনে করেন?"

"এবার আপনার পালা", একজন বিমানচালককে বললেন অধ্যাপক।

www.pathagar.com



চিত্র 2. প্রথম রেলগাড়ির টিকিট বিক্রি করে

7. হেলিকপ্টার নামল কোথায় : "লেনিনগ্রাদ থেকে একটা হেলিকপ্টার উত্তরমুখো রওনা দিল। 500 কিলোমিটার উড়ে গিয়ে, সেটা পূবমুখো ঘুরে গেল। পূর্ব দিকে 500 কিলোমিটার ওড়ার পরে, আবার সেটা দক্ষিণ দিকে ঘুরে আরও 500 কিলোমিটার উড়ল। তারপর পশ্চিমে ঘুরে 500 কি মি. উড়ে এসে নেমে দাঁড়াল। প্রশ্নটা হল : সেটা কোথায় নামল—লেনিনগ্রাদের পশ্চিমে, পূবে, উত্তরে, না দক্ষিণে ?"

"এটা তো সোজা" বলল একজন, "500 পা এগিয়ে গিয়ে, ডাইনে ফিরে 500 পা যাবার পরে, দক্ষিণে আরও 500 পা এলেন ; তারপর ফের ডাইনে 500 পা ফেলার পরে আপনি স্বভাবতই যেখান থেকে রওনা হয়েছিলেন সেখানেই ফিরে এলেন !"

"সোজা ? বেশ তো, হেলিকপ্টারটা তাহলে নেমে দাঁড়াল কোথায় ?"

"অবশ্যই লেনিনগ্রাদে। আবার কোথায় ?"

"ভুল !"

"তাহলে ঠিক বুঝতে পারছিনে।"

"হুঁ, এই ধাঁধাটার মধ্যে কিছু একটা প্যাঁচ আছে", বলল আরেকজন, "হেলিকপ্টারটা লেনিনগ্রাদে এসে নামেনি ?"

"আরেকবার বলবেন আপনার প্রশ্নটা ?"

বিমানচালক আরেকবার বললেন ব্যাপারটা। শ্রোতারা পরস্পর মুখ চাওয়া-চাওয়ি করল সবাই।

www.pathagar.com

"আচ্ছা বেশ", বললেন অধ্যাপক, "উত্তরটা ভেবে দেখার মতো যথেষ্ট সময় আছে। এর পর কে বলবেন, বলুন।"

8. **ছায়া :** "আমার ধাঁধাটাও একটা হেলিকপ্টার নিয়ে" বললেন পরবর্তী বক্তা, "কোনটা আয়তনে বড়ো — উড়ন্ত হেলিকপ্টারটা, না, তার নিখুঁত ছায়াটা ?"

"ব্যাস্ ?"

"হুঁ।"

"তা, বেশ। ছায়াটা স্বভাবতই হেলিকপ্টারটার চেয়ে বড়ো : সূর্যরশ্মি পাখার মতো ছড়িয়ে পড়ে, তাই-না ?"

"আমি ঠিক তা বলব না", বলে উঠল আরেকজন, "সূর্যরশ্মিগুলো পরস্পরের সমান্তরাল। তাহলে, হেলিকপ্টার আর তার ছায়াটা হবে সমান আয়তনের।"

"না, তা হবে না। মেঘের পিছন থেকে সূর্যরশ্মির ছড়িয়ে পড়া দেখেছেন কখনও ? যদি দেখে থাকেন, তাহলে নিশ্চয় লক্ষ করেছেন— সূর্যরশ্মি কতোখানি ছড়িয়ে পড়ে। স্বয়ং হেলিকপ্টারটার চেয়ে তার ছায়াটা নিশ্চয়ই বেশ কিছুটা বড়ো মাপের হবে।"

"তাহলে লোকে কেন বলে যে, সূর্যরশ্মিগুলো পরস্পরের সমান্তরাল—যেমন ধরুন, জাহাজীরা, জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা ?"

অধ্যাপক তর্কটা বন্ধ করে দিয়ে পরের জনকে বললেন তাঁর ধাঁধাটা বলতে।

9. **দেশলাই কাঠি :** একজন এক বাক্স দেশলাইয়ের কাঠি টেবিলের উপরে উপুড় করে কাঠিগুলো তিনটি আলাদা গাদায় ভাগ করলেন।

"নিশ্চয়ই একটা বহ্ন্যুৎসব করতে যাচ্ছেন না ?" মন্তব্য করল একজন।

"না, এগুলো আপনাদের একটু মাথা ঘামানোর জন্য। ব্যাপারটা হল : মোট 48টা দেশলাই-কাঠি আছে। কোন্ গাদায় কটা কাঠি আছে তা বলছিনে। ভালো করে দেখুন। দ্বিতীয় গাদায় যতোগুলো কাঠি আছে, ঠিক অতোগুলো কাঠি প্রথম গাদাটা থেকে তুলে নিয়ে যদি দ্বিতীয় গাদাটায় যোগ করি ; এবং তারপরে তৃতীয় গাদাটায় যতোগুলো কাঠি আছে, ঠিক অতোগুলো কাঠি দ্বিতীয় গাদাটা থেকে তুলে নিয়ে যদি তৃতীয় গাদাটায় যোগ করি ; এবং সব শেষে, প্রথম গাদাটায় যতোগুলো কাঠি আছে, ঠিক অতোগুলো কাঠি তৃতীয় গাদাটা থেকে তুলে নিয়ে যদি প্রথম গাদাটায় যোগ করি—তাহলে, এই সবকিছু করার পর, এই তিনটি গাদার প্রত্যেকটিতেই কাঠির সংখ্যা দাঁড়াবে সমান-সমান। তাহলে, গোড়ায় এই তিনটি গাদার প্রত্যেকটিতে কটা করে কাঠি ছিল ?"

www.pathagar.com

10. 'আশ্চর্য' গাছের গুঁড়ি : "একজন গ্রামীণ গণিতজ্ঞ আমাকে একবার এই ধাঁধাটার সুরাহা করতে বলেছিলেন", শুরু করলেন ধরের জন. "দিবা গল্প একটা, আর বেশ হাসির খোরাকও আছে গল্পটার মধ্যে। একদিন এক বনের মধ্যে এক বুড়োর সঙ্গে দেখা হল একজন চাষীর। দুজনে কথাবার্তা বলতে লাগল। বুড়ো খুব খুঁটিয়ে চাষীকে দেখার পর বলল,

"এই বনের মধ্যে একটা আশ্চর্য মাথা-কেটে-ফেলা গাছের গুঁড়ি আছে। দরকারের সময় সেটা লোকের বড়ো উপকার করে।"

'তাই নাকি? কি উপকার করে – রোগ সারিয়ে দেয়?'

'ঠিক তা নয়। টাকা-পয়সা দ্বিগুণ করে দেয়। গাছের গুঁড়িটার শিকড়-বাকড়ের মধ্যে টাকার থলেটা গুঁজে দিয়ে একশো পর্যন্ত গোনো—ব্যাস্!— দ্বিগুণ হয়ে গেছে তোমার টাকা। আশ্চর্য বটে ওই গাছের গুঁড়িটা, হ্যাঁ!

'আমি একবার পরখ করে দেখতে পারি?' খুব উত্তেজিত হয়ে জিজ্ঞেস করল চাষী।

'কেন পারবে না? শুধু কিছু মূল্য দিতে হবে তোমায়।'

'কাকে, আর কতো দিতে হবে?'

'যে লোকটা তোমাকে ওই গুঁড়িটা দেখিয়ে দেবে তাকে। আমিই সেই লোক। আর, কতো দেবে, সেটা অন্য কথা।'

দুজনের মধ্যে দরাদরি শুরু হল। বুড়ো যখন জানতে পারল চাষীর কাছে তেমন বেশি কিছু নেই, তখন সে প্রতিবার টাকা দ্বিগুণ হবার পর 1 রুবল 20 কোপেক* নিতে রাজি হল।

দুজনে গভীর বনের মধ্যে ঢুকল। অনেকক্ষণ ধরে খোঁজাখুঁজি করার পর বুড়ো চাষীকে নিয়ে এল ঝোপঝাড়ের মধ্যে শ্যাওলা-আগাছায় ঢাকা একটা ফার গাছের গুঁড়ির কাছে। তারপর চাষীর থলেটা নিয়ে সে গুঁড়িটার নিচে শিকড়-বাকড়ের মধ্যে গুঁজে দিল। এর পর, দুজনে এক থেকে একশো পর্যন্ত গুনল। থলেটাকে বের করে আনার জন্য বুড়ো অনেকক্ষণ ধরে হাতড়াবার পর, চাষীর হাতে তুলে দিল সেটা।

চাষী থলেটা খুলে দেখে, কী আশ্চর্য! তার থলেতে যে টাকা ছিল, তার পরিমাণ সত্যিই দ্বিগুণ হয়ে গেছে! সে কথা মতো 1 রুবল 20 কোপেক গুনে দিল বুড়োকে। তারপর টাকাটা আরেকবার দ্বিগুণ করে দেবার জন্য বুড়োকে অনুরোধ জানাল।

আরেকবার তারা এক থেকে একশো পর্যন্ত গুনল, আবার বুড়োটা আগের মতো অনেকক্ষণ হাতড়াবার পর থলেটা বের করে এনে চাষীর হাতে দিল এবং

* 100 কোপেকে 1 রুবল

www.pathagar.com

ফের সেই অলৌকিক ঘটনা—টাকাটা আবার দ্বিগুণ হয়ে গেছে। এবং, যে শর্ত হয়েছে সেই অনুযায়ী, বুড়ো আরেকবার 1 রুবল 20 কোপেক পেল।

তারপর তারা তৃতীয় বার থলেটা যথারীতি গুঁজে দিল এবং এবারও টাকা ডবল হয়ে গেল। কিন্তু এবারে, বুড়োকে 1 রুবল 20 কোপেক দেবার পরে চাষী দেখল—থলেতে আর এক পয়সাও নেই। এই ভাবে বেচারা তার সব পয়সাই খুইয়ে বসল। দ্বিগুণ করার মতো আর টাকা না থাকায় বেচারী নিতান্ত মনমরা হয়ে চলে গেল।

রহস্যটা অবশ্যই সকলের কাছেই স্পষ্ট—বুড়োটা যে টাকার থলেটা খুঁজে বের করতে অনেকক্ষণ সময় নিয়েছে, সেটা তো আর এমনি-এমনি নয়। সে যাই হোক, আমি আপনাদের অন্য একটা প্রশ্ন করতে চাই : "চাষীর ওই থলেতে প্রথমে কতো ছিল ?"

11. ডিসেম্বরের হেঁয়ালি : "বন্ধুগণ", শুরু করলেন পরের জন, "আমি ভাষা নিয়ে চর্চা করি, গণিতজ্ঞ নই। তাই, আমার কাছ থেকে কোনো গণিতের সমস্যা আশা করবেন না। আমি আপনাদের অন্য ধরনের একটা প্রশ্ন করব—আমি যে বিষয়ে চর্চা করি, সে বিষয়টারই কাছাকাছি। সেটা হল বর্ষপঞ্জী বা ক্যালেণ্ডার সম্বন্ধে।"

"বলুন।"

"ডিসেম্বর বছরের দ্বাদশ মাস। এই ডিসেম্বর নামটির আসল অর্থ কি আপনারা জানেন ? গ্রীক শব্দ 'ডেকা' থেকে এই মাসের নামটা এসেছে—'ডেকা' মানে দশ। যার থেকে ডেকালিটার।—অর্থাৎ, দশ লিটার ; ডিকেড—অর্থাৎ, দশ বছর ; ইত্যাদি। ডিসেম্বরের তাই আপাতদৃষ্টিতে বছরের দশম মাস হওয়া উচিত। কিন্তু তবু সেটা তা নয়। কেন, বলুন তো ?"

12. একটা পাটীগণিতের কৌশল "আমি একটা পাটীগণিতের চাতুরী দেখিয়ে সেটা আপনাদের ব্যাখ্যা করতে বলব। আপনাদের একজন—অধ্যাপক মশাই, যদি আপনার আপত্তি না থাকে—তিনটি অঙ্কের একটি সংখ্যা লিখুন কিন্তু সংখ্যাটা আমাকে বলবেন না।"

"সংখ্যাটার মধ্যে কোনো শূন্য রাখতে পারি ?"

"আমি কোনো শর্ত আরোপ করছি না। আপনি ইচ্ছামতো যে কোনো তিনটি অংকই লিখতে পারেন।"

"ঠিক আছে, লিখেছি। তার পর ?"

"তার পাশে ঠিক ওই সংখ্যাটাই লিখুন। এবারে আপনার হল ছ'টি অঙ্কের একটা সংখ্যা।"

www.pathagar.com

"ঠিক।"

"আপনার পাশের জনকে স্লিপটা দিয়ে দিন—আমার ওদিকে যিনি আছেন, তাঁকে। উনি এবারে ওই ছয় অংকের সংখ্যাটিকে সাত দিয়ে ভাগ করুন।"

"বলা তো সোজা, কিন্তু সাত দিয়ে যদি ভাগ করা না যায়, তাহলে ?"

"কিছু ভাববেন না, সেটা করা যাবে।"

"সংখ্যাটা না দেখেই এতো নিশ্চিত হলেন কি করে ?"

"আগে ভাগ করুন, তারপর আলোচনা করা যাবে।"

"হাঁ, ঠিকই বলেছেন। ভাগ হয়েছে।"

"এবার ভাগফলটা আপনার পাশের জনকে দিন—কিন্তু আমাকে বলবেন না সেটা। উনি সেটা 11 দিয়ে ভাগ করুন।"

"আবারও আপনি যা বলবেন তাই হবে বলে ভাবছেন ?"

"ভাগটা তো করুন। কোনো অবশিষ্ট থাকবে না।"

"হ্যাঁ, আবার ঠিক বলেছেন। এবার কি করতে হবে ?"

"আপনার পাশের জনকে দিয়ে দিন। উনি এই দ্বিতীয় ভাগফলটাকে, ধরা যাক, 13 দিয়ে ভাগ করুন।"

"বাছাইটা ভালো হল না। 13 দিয়ে ভাগ করার মতো সংখ্যা খুব কম··· আপনার ভাগ্য ভালো নিশ্চয়, এই সংখ্যাটাকে ভাগ করা গেছে।"

"এবারে কাগজের টুকরোটা আমাকে দিন কিন্তু ভাঁজ করে মুড়ে দিন যাতে সংখ্যাটা আমি দেখতে না পাই।" কাগজের ভাঁজ না খুলেই তিনি অধ্যাপকের দিকে সেটা এগিয়ে দিলেন : "এই যে। যে সংখ্যাটা আপনি লিখেছিলেন। ঠিক আছে ?

"বিলকুল ঠিক" বিস্ময়ের সঙ্গে বললেন অধ্যাপক, "এই সংখ্যাটাই লিখেছিলাম আমি···আচ্ছা বেশ, সকলেই একটা করে প্রশ্ন করেছেন, বৃষ্টিও থেমে গেছে। এবার তাহলে বেরুনো যাক। রাত্রেই উত্তরগুলো জানতে পারব আমরা। এবার আপনারা আমাকে স্লিপগুলো সব দিয়ে দিন।"

1 থেকে 12-র উত্তর :

1. কাঠবেড়ালীর ধাঁধাটা আগেই ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আমরা তাই তার পরেরটায় আসছি।

2. প্রথম প্রশ্নটার উত্তর আমরা সহজেই দিতে পারি : বছরের প্রথম তিন মাসে (জানুয়ারি 1 তারিখটি বাদ দিয়ে) ওই পাঁচটি দলের সবগুলি কতোবার একই দিনে আসর বসিয়েছিল, সেটা 2, 3, 4, 5 আর 6-এর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণীতক (ল. সা. গু.) বের করে নিলেই জানা যাবে। এটা

www.pathagar.com

কঠিন নয়। সংখ্যাটি হল 60। সুতরাং, পাঁচটি দল আবার একই দিনে মিলিত হবে 61তম দিনে—ফিটারদের দলটি 30 বার মিলিত হবে 1 দিন পর-পর; জয়নারদের দল, 2 দিন পর-পর প্রতি তৃতীয় দিনে—20 বার; ফটোগ্রাফি দল 3 দিন করে বাদ দিয়ে প্রতি চতুর্থ দিনে—15 বার; দাবা-খেলোয়াড়রা 4 দিন করে বিরতি দিয়ে প্রতি পঞ্চম দিনে—12 বার; এবং ঐকতানিকেরা 5 দিন করে বিরতি দিয়ে প্রতি ষষ্ঠ দিনে—10 বার। এবং, যেহেতু বছরের প্রথম তিন মাসে 90 দিন, সেইহেতু ওই দলগুলির সব ক'টি আর মাত্র একবারই একই দিনে নিজের নিজের আসর বসাতে পারবে।

দ্বিতীয় প্রশ্নটির উত্তর দেওয়া ঢের বেশি কঠিন: এমন দিনের সংখ্যা কতো, যেসব দিনে ওই দলগুলির কোনোটাই প্রথম তিন মাসের মধ্যে মিলিত হয়নি: সেটা বের করার জন্য, 1 থেকে 90 পর্যন্ত সমস্ত সংখ্যাগুলি লেখা দরকার। তারপর যেসব দিনে ফিটারদের দলটি মিলিত হয়েছে, সেই দিন-গুলি সব কেটে দিন; অর্থাৎ, 1, 3, 5, 7, 9 ইত্যাদি। তারপর কেটে দিতে হবে জয়নারদের দলটির দিনগুলি; যথা 4, 7, 10, ইত্যাদি। এই ভাবেই যখন ফটোগ্রাফি, দাবা আর গানের দলগুলির দিনগুলো কাটা যাবে, তখন বাকি দিনগুলোতে কোনো দলেরই আসর বসেনি বলে জানা যাবে।

সেটা করলেই দেখতে পাবেন যে, এরকম দিনের সংখ্যা 24—অর্থাৎ, জানুয়ারি মাসে আট দিন, যথা, 2, 8, 12 14, 18, 20, 24 আর 30 তারিখ; ফেব্রুয়ারি মাসে সাত দিন; আর, মার্চ মাসে ন'দিন।

3. অনেকেই ভাববেন যে আটটা কাঠের টুকরোর জন্য আট কোপেক—অর্থাৎ একটার জন্য এক কোপেক দেওয়া হয়েছে; এরকম ভাবলে ভুল হবে। পয়সাটা দেওয়া হয়েছে আটটা কাঠের টুকরোর এক-তৃতীয়াংশের জন্য। কারণ ওই আটটি কাঠের আগুনে তিন জনের প্রত্যেকেই সমানভাবে কাজে লাগিয়েছে। সুতরাং, ওই আটটা কাঠের দাম হিসেব অনুযায়ী $8 \times 3 = 24$ কোপেক (যার এক-তৃতীয়াংশ Z দিয়েছে)। অর্থাৎ প্রত্যেকটা কাঠের দাম 3 কোপেক।

এবার, কার কতো খরচ পড়েছে, সেটা সহজেই বোঝা যাবে। Y-এর পাঁচটা কাঠের দাম 15 কোপেক; কিন্তু যেহেতু সে (নিজের অংশ বাবদ) 8 কোপেক দামের আগুন ব্যবহার করেছে, সেইহেতু সে পাবে $15 - 8 = 7$ কোপেক। X-ও 8 কোপেক দামের আগুন ব্যবহার করেছে, কিন্তু তার তিনটি কাঠের টুকরোর দাম 9 কোপেক; তাই তার কাছ থেকে পাওনা 8 কোপেক কেটে নিলে থাকে $9 - 8 = 1$ কোপেক; তাহলে সে পাবে 1 কোপেক।

4. দুজনেই একই সংখ্যক পথচলতি মানুষ গুনেছে। যে লোকটি দোরগোড়ায় দাঁড়িয়েছিল, সে তার ডানদিকে আর বাঁদিকে যাতায়াতকারী

www.pathagar.com

সবাইকে গুনেছে ; আর যে লোকটি রাস্তার বুকে একবার ডানদিকে একবার বাঁদিকে পায়চারি করতে করতে গুনেছে, সে প্রতিবারই তার সামনের দিক থেকে আসা মানুষদের গুনেছে।

কথাটা অন্যভাবেও বলা যায়। যে লোকটি হাঁটতে হাঁটতে পথ চলতি লোকদের গুনেছে, সে যখন প্রথম বার দোরগোড়ায় দাঁড়িয়ে থাকা লোকটির সামনে ফিরে আসছে, তখন তারা দু'জনেই সমান সংখ্যক পথচলতি মানুষ গুনেছে। কারণ, দাঁড়িয়ে থাকা লোকটির সামনে দিয়ে যেসব মানুষ রাস্তার ডানদিকে বা বাঁদিকে গেছে, তারা সকলেই রাস্তার বাঁদিক বা ডানদিক থেকে আসা পায়চারিরত লোকটির সামনে দিয়ে গেছে। এরকম প্রতিবারই। এক ঘণ্টা পরে সংখ্যাটা সমান-সমান দাঁড়াচ্ছে। শেষ বার যখন দুজনে মুখোমুখি এসে দাঁড়াল, তখন তারা পরস্পরকে একই সংখ্যা জানিয়ে দিল।

5. প্রথমে মনে হতে পারে যে প্রশ্নটার ভাষাটা ভুল—ঠাকুর্দা আর নাতির বয়েস সমান। আমরা এখনই দেখতে পাব যে, প্রশ্নটার মধ্যে কোনো ভুল নেই! স্পষ্টতই নাতির জন্ম বিংশ শতাব্দীতে। তাহলে, যে সালে সে জন্মেছে সেই সালের প্রথম দুটি অংক 19— —(শতকের সংখ্যা)। শেষের দুটি অংক সেই একই দুটি অংকের সঙ্গে যোগ করলে দাঁড়ায় 32। সুতরাং সংখ্যাটা 16 : নাতির জন্ম 1916 সালে এবং 1932 সালে তার বয়েস 16 বছর।

ঠাকুর্দার জন্ম স্বভাবতই ঊনবিংশ শতাব্দীতে। সুতরাং তাঁর যে সালে জন্ম, সেই সালের প্রথম দুটি অংক 18 – –। ওই সালের বাকি অংক দুটিকে দ্বিগুণ করলে অবশ্যই 132 হতে হবে। তাহলে, যে সংখ্যাটি আমরা বের করতে চাই, সেটা 182-র অর্ধেক ; অর্থাৎ, 66। ঠাকুর্দার জন্ম 1866 সালে এবং 1932 সালে তাঁর বয়স 66।

অতএব, 1932-এ নাতি আর ঠাকুর্দার প্রত্যেকেরই বয়েস ছিল তাঁদের নিজের জন্মসালের শেষ দুটি অংকের সমান সংখ্যক।

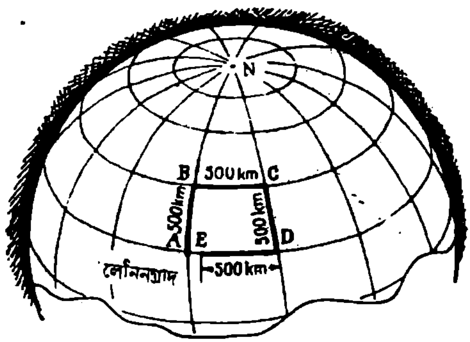
6. 25টি স্টেশনের প্রত্যেকটিতে যাত্রীরা বাকি 24টি স্টেশনের যে কোনো-টির টিকিট কিনতে পারে। সুতরাং, বিভিন্ন যেসব টিকিট রাখা দরকার, সেগুলির সংখ্যা : $25 \times 24 = 600$।

রিটার্ন টিকিটও থাকতে পারে। তা যদি হয়, তাহলে সংখ্যাটা দ্বিগুণ হয়ে দাঁড়াবে এবং সেক্ষেত্রে বিভিন্ন টিকিটের সংখ্যা হল 1,200।

7. এই প্রশ্নটির মধ্যে কোনো বিরোধ নেই। হেলিকপ্টারটা একটি বর্গক্ষেত্রের প্রান্ত-সীমারেখা ধরে ওড়েনি। মনে রাখতে হবে যে, পৃথিবী গোল এবং তার মধ্যরেখাগুলি মেরুতে গিয়ে মিলেছে (3 নং ছবি)।

www.pathagar.com

লেনিনগ্রাদ-অক্ষাংশের 500 কিলোমিটার উত্তরের সমাক্ষরেখা (BC)-বরাবর পূর্ব দিকে 500 কি. মি. দূরত্বে উড়ে যাবার সময়ে হেলিকপ্টারটি যতো ডিগ্রি গেছে, লেনিনগ্রাদ অক্ষাংশ (DA)-বরাবর পশ্চিম দিকে ফিরে আসার সময়ে ঠিক ততো ডিগ্রি আসতে গেলে তাকে কিছুটা বেশি দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে। কারণ, লেনিনগ্রাদ-অক্ষাংশের বৃত্তের ব্যাসার্ধ তার 500 কি. মি. উত্তরের অক্ষাংশের বৃত্তের ব্যাসার্ধের চেয়ে বেশি লম্বা। তাই, A B আর CD দৈর্ঘ্যে সমান হলেও, AD-র চেয়ে BC দৈর্ঘ্যে ছোট। তাই D থেকে পশ্চিম দিকে সংশ্লিষ্ট অক্ষাংশ-বরাবর 500 কি. মি. মাপলে, সেটা লেনিনগ্রাদের কিছুটা পূর্ব দিকে E বিন্দুতে এসে শেষ হবে। অতএব, হেলিকপ্টারটি ওড়ার শেষে লেনিনগ্রাদের কিছুটা পূর্বদিকে নেমেছিল।



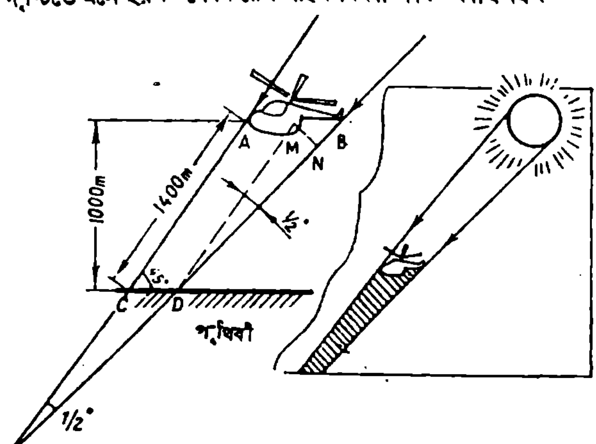
চিত্র 3

কতো কিলোমিটার দূরে? সেটাও হিসেব করা যেতে পারে। হেলিকপ্টারটা A B C D E পথ ধরে উড়ে গেছে। N হল উত্তর মেরুবিন্দু যেখানে AB আর DC মধ্যরেখাগুলি গিয়ে মিলেছে। হেলিকপ্টারটি প্রথমে উত্তর দিকে —অর্থাৎ AN মধ্যরেখা ধরে—500 কি. মি. গেছে। মধ্যরেখার এক ডিগ্রি হল 111 কি. মি. দীর্ঘ; তাহলে 500 কি. মি. দৈর্ঘ্যের চাপ (AB) হবে 500 : 111 = 4°5′। লেনিনগ্রাদ 60তম সমাক্ষরেখার উপরে অবস্থিত। সুতরাং, B হল 60° + 4°5′ = 64°5′ সমাক্ষরেখার উপরে। এরপরে হেলিকপ্টারটি পূর্বদিকে উড়ে গেছে; অর্থাৎ, BC সমাক্ষরেখা ধরে 500 কি. মি. দূরে। এই সমাক্ষরেখার এক ডিগ্রির দৈর্ঘ্য হল 48 কি. মি.। (এটা হিসেব করে বের করা যেতে পারে, কিংবা সারণি থেকে দেখে নেওয়া যেতে পারে।) সুতরাং, হেলিকপ্টারটি তার পূবমুখো যাত্রায় 500 কি. মি.

www.pathagar.com

উড়ে যেতে গিয়ে কতো ডিগ্রি অতিক্রম করেছে, সেটা বের করা সহজ : 500 : 48 = 10°4′। এবার দক্ষিণ দিকে –অর্থাৎ, CD মধ্যরেখা ধরে 500 কি. মি. উড়ে গিয়ে হেলিকপ্টারটি ফিরে এল লেনিনগ্রাদ-সমাক্ষরেখায়। তারপর থেকে সে চলল পশ্চিমমুখো, অর্থাৎ, DA বরাবর। কিন্তু এইদিকে 500 কি. মি. স্পষ্টতই A আর D-র মধ্যে দূরত্বের চেয়ে কম, যে কথাটা আগেই বলা হয়েছে : AD আর BC-র মধ্যে ডিগ্রির সংখ্যা সমান, অর্থাৎ 10°4′। কিন্তু 60-তম সমাক্ষরেখার এক ডিগ্রির দৈর্ঘ্য হল 55·5 কি. মি.। অতএব, A আর D-র মধ্যে দূরত্ব হল 55·5 × 10 4 = 577 কি. মি.। তাহলে দেখা যাচ্ছে, হেলিকপ্টারটি লেনিনগ্রাদে নামতে পারে না : সেটা নেমে দাঁড়িয়েছে লেনিনগ্রাদের পূর্ব দিকে 77 কি. মি. দূরে লাদোগা হ্রদের তীরে।

৪. এই প্রশ্নটি নিয়ে আলোচনা করার সময়ে আমাদের গল্পের পাত্রপাত্রীরা কয়েকটা ভুল করেছে। সূর্যরশ্মি লক্ষণীয় রকমে পাখার মতো ছড়িয়ে পড়ে বলাটা ভুল। পৃথিবী, সূর্যের সঙ্গে তার দূরত্বের তুলনায়, এতো ছোট যে পৃথিবী-পৃষ্ঠের যে কোনো অংশের উপরে এসে পড়া সূর্যরশ্মি বিস্তৃত হয় এমন একটা কোণে যেটাকে প্রায় হিসেবের মধ্যে আনাই যায় না। বাস্তবিক পক্ষে ওই রশ্মিগুলোকে পরস্পরের সমান্তরাল বলা যায়। কখনও কখনও আমরা এই রশ্মিগুলিকে পাখার মতো ছড়িয়ে পড়তে দেখি (যেমন, সূর্য যখন কোনো মেঘের আড়ালে যায়)। কিন্তু সেটা অবস্থানগত দৃষ্টি-অনুপাত ছাড়া আর কিছু নয়। দুটি সমান্তরাল রেখা, যেখানে দাঁড়িয়ে দেখছি সেখান থেকে, ক্রমশ দূরে চলে গিয়ে সব সময়ে কোনো একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে বলে আপাত দৃষ্টিতে মনে হয়। যেমন রেল-লাইন কিংবা দীর্ঘ বীথিপথ।



চিত্র 4 :

www.pathagar.com

কিন্তু, সূর্যরশ্মি সমান্তরাল রেখায় মাটিতে এসে পড়ে বলে তার অর্থ এই নয় যে, কোনো হেলিকপ্টারের নিখুঁত ছায়াটা স্বয়ং হেলিকপ্টারটির সমান লম্বা-চওড়া হবে। 4 নং ছবি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, হেলিকপ্টারের নিখুঁত ছায়াটা পৃথিবীর বুকে এসে পড়ার সময়ে শূন্যপথে ক্রমেই সঙ্কীর্ণ হয়ে এসেছে এবং তারই ফলে, হেলিকপ্টারটি যে ছায়া ফেলেছে সেটা হেলিকপ্টারটির চেয়ে অপেক্ষাকৃত ছোট: AB-র চেয়ে CD ছোট।

কতোখানি ছোট, সেটাও হিসেব কষে বের করা খুবই সম্ভব—অবশ্যই যদি আমাদের জানা থাকে যে, কোন উন্নতিতে হেলিকপ্টারটি উড়ছে। ধরে নেওয়া যাক, এই উন্নতি 1,000 মিটার। AC আর BD রেখা দুটি যে কোণ তৈরি করেছে সেটা, পৃথিবী থেকে সূর্যকে যে কোণ থেকে দেখা হচ্ছে, সেই কোণের সমান। আমরা জানি যে, এই কোণটি $\frac{1}{2}$ ডিগ্রির সমান। সেই সঙ্গে, আমরা এও জানি যে, $\frac{1}{2}°$ কোণ থেকে দেখা যে কোনো বস্তুর চোখ থেকে দূরত্ব হল সেই বস্তুটির 115 ব্যাসের দৈর্ঘ্যের সমান। সুতরাং MN ছেদটুকু (যে অংশটুকু পৃথিবীতে দাঁড়িয়ে $\frac{1}{2}°$ কোণে দেখা হচ্ছে) হবে AC-র $\frac{1}{115}$ অংশ। A বিন্দু থেকে পৃথিবী পৃষ্ঠ পর্যন্ত লম্ব রেখাটির চেয়ে AC রেখাটি দৈর্ঘ্যে বড়ো। সূর্যরশ্মি আর পৃথিবী পৃষ্ঠের মধ্যে যে কোণ (ACD) তৈরী হয়েছে, সেটা যদি 45° হয়, তাহলে AC (হেলিকপ্টারটির উন্নতি 1,000 মিটার ধরে নিয়ে) মোটামুটি 1,400 মিটার দীর্ঘ এবং তার ফলে MN ছেদটি দাঁড়াচ্ছে 140 : 115 = 1·2 মিটার।

কিন্তু এদিকে আবার, হেলিকপ্টার আর তার ছায়ার—অর্থাৎ MB-র—মধ্যে অন্তর MN-র চেয়ে বেশি (সঠিকভাবে বলতে গেলে 1·4 গুণ)। কারণ, MBD কোণটি প্রায় 45 ডিগ্রির সমান। অতএব, MB = 1·2 × 1·4 = প্রায় 1·7 মিটার।

এই সবই হেলিকপ্টারটির নিখুঁত—কালো আর সুস্পষ্ট রেখায় চিহ্নিত—ছায়ার ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য; সেটার কম-কালো আর অস্পষ্ট উপচ্ছায়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

প্রসঙ্গক্রমে বলা যেতে পারে, আমাদের হিসেব থেকে দেখা যাচ্ছে, হেলিকপ্টারের বদলে যদি প্রায় 1·7 মিটার ব্যাসের একটা ছোট বেলুন হত, তাহলে তার ছায়াটা নিখুঁত হত না। আমরা দেখতে পেতাম শুধু একটা অস্পষ্ট উপচ্ছায়া।

9. এই প্রশ্নটির মীমাংসা করতে হবে শেষের দিক থেকে। এই তথ্যটি থেকে অগ্রসর হওয়া যাক যে, দেশলাই-কাঠিগুলিকে চালাচালি করার পরে

www.pathagar.com

সবগুলি গাদায় কাঠির সংখ্যা দাঁড়িয়েছে সমান-সমান। যেহেতু এইসব চালাচালির মধ্য দিয়ে কাঠিগুলোর মোট সংখ্যাটা (48) একই আছে, সেই হেতু প্রত্যেকটি গাদায় 16টি করে কাঠি আছে। তাহলে, সব শেষে দাঁড়িয়েছে এইরকম :

প্রথম গাদা	দ্বিতীয় গাদা	তৃতীয় গাদা
16	16	16

ঠিক তার আগেই, আমরা প্রথম গাদাটিতে ততোগুলো কাঠি যোগ করেছি যতোগুলো কাঠি সেটাতে ছিল, অর্থাৎ, আমরা সেই গাদার কাঠির সংখ্যাটি দ্বিগুণ করেছি। তাহলে শেষ বার কাঠি চালাচালি করার আগে প্রথম গাদাটায় আটটা কাঠি ছিল। যে তৃতীয় গাদাটা থেকে আমরা এই আটটি কাঠি নিয়েছি, সেটাতে ছিল 16+8=24টি কাঠি। এবার তাহলে সংখ্যাগুলো দাঁড়াল, এই রকম :

প্রথম গাদা	দ্বিতীয় গাদা	তৃতীয় গাদা
8	16	24

তার আগে, দ্বিতীয় গাদাটা থেকে আমরা ততোগুলো কাঠি নিয়েছিলাম যতোগুলো ছিল তৃতীয় গাদাটায়। অর্থাৎ 24 হল সেটার মূল সংখ্যাটির দ্বিগুণ। তাহলে, প্রথমবার চালাচালি করার পরে কোন গাদাটায় কতোগুলি কাঠি ছিল, তা এটা থেকে দেখা যাচ্ছে :

প্রথম গাদা	দ্বিতীয় গাদা	তৃতীয় গাদা
8	16+12=28	12

এবার এটা পরিষ্কার যে, প্রথমবার কাঠিগুলি চালাচালি করার আগে (অর্থাৎ, দ্বিতীয় গাদাটার যতোগুলো কাঠি ছিল ততোগুলো কাঠি প্রথম গাদাটা থেকে তুলে নিয়ে দ্বিতীয় গাদাটায় যোগ করার আগে), প্রত্যেকটি গাদায় দেশলাই কাঠির সংখ্যা ছিল :

প্রথম গাদা	দ্বিতীয় গাদা	তৃতীয় গাদা
22	14	12

10 এই হেঁয়ালিটারও উল্টো দিক থেকে হিসেব করে সহজেই মীমাংসা করা যাবে। আমরা জানি, তৃতীয়বার যখন টাকাটা দ্বিগুণ হয়ে গেল তখন থলেটায় ছিল 1 রুবল 20 কোপেক (এই টাকাটাই বুড়ো মানুষটি শেষ বার পেয়েছিল)। তাহলে, তার আগে থলেটায় কতো ছিল? নিশ্চয় 60 কোপেক। চাষাটি দ্বিতীয় বার বুড়োকে 1 রুবল 20 কোপেক দেবার পরে থলেটায় তাই ছিল। অতএব, সেটা দেবার আগে ছিল :

www.pathagar.com

$$1{\cdot}20+0{\cdot}60=1{\cdot}80$$

তাহলে, টাকার পরিমাণটা দ্বিতীয়বার দ্বিগুণ হবার পরে থলেতে ছিল 1 রুবল 80 কোপেক। তার আগে ছিল 90 কোপেক। অর্থাৎ, যেটা ছিল চাষীটি বুড়োকে প্রথমবার 1 রুবল 20 কোপেক দেবার পরে। সুতরাং, প্রথমবার সেটা দেবার পরে থলেতে ছিল $0{\cdot}90+1{\cdot}20=2{\cdot}10$। এটা হল প্রথমবার টাকাটা দ্বিগুণ হবার পরে। সুতরাং, একেবারে গোড়ায় ছিল এই অর্থের অর্ধেক—অর্থাৎ, 1 রুবল 5 কোপেক। এই টাকাটা নিয়েই চাষী তার চট্-জল্দি বড়োলোক হবার ব্যর্থ কাজে নেমেছিল।

মিলিয়ে নেওয়া যাক :

থলেতে টাকার পরিমাণ :

প্রথমবার টাকাটা দ্বিগুণ হবার পর···$1{\cdot}05\times2=2{\cdot}10$

প্রথমবার বুড়োকে তার প্রাপ্য দেবার পর···$2{\cdot}10-1{\cdot}20=0{\cdot}90$

দ্বিতীয়বার টাকা দ্বিগুণ হবার পর···$0{\cdot}90\times2=1{\cdot}80$

দ্বিতীয়বার বুড়োকে তার প্রাপ্য দেবার পর···$1{\cdot}80-1{\cdot}20=0{\cdot}60$

তৃতীয়বার টাকা দ্বিগুণ হবার পর $0{\cdot}60\times2=1{\cdot}20$

তৃতীয়বার বুড়োকে তার প্রাপ্য দেবার পর···$1{\cdot}20-1{\cdot}20=0$

11. এই ইওরোপীয় ক্যালেন্ডার এসেছে প্রাচীন রোমানদের কাছ থেকে। জুলিয়াস সিজারের আগে তাদের বছর শুরু হত মার্চ মাস থেকে। তখন ডিসেম্বর ছিল বছরের দশম মাস। পরে যখন নববর্ষের সূচনাকে জানুয়ারি 1 তারিখে সরিয়ে আনা হল, তখন কিন্তু মাসের নামগুলিকে সেই অনুযায়ী সরিয়ে দেওয়া হয়নি। এরই ফলে, কতকগুলি মাসের নামের অর্থ আর তাদের পরম্পরার মধ্যে অসঙ্গতি থেকে গেছে :

মাস	অর্থ	ক্রমিক স্থান
সেপ্টেম্বর	(সেপ্টেম 'septem'— সাত)	নবম
অক্টোবর	(অক্টো 'octo'—আট)	দশম
নভেম্বর	(নভেম 'novem'—নয়)	একাদশ
ডিসেম্বর	(ডেকা 'deka'—দশ)	দ্বাদশ

12. আদি সংখ্যাটির কি গতি হল সেটা দেখা যাক। সেটার পাশে ঠিক সেই সংখ্যাটাই লেখা হয়েছে। অর্থাৎ, আমরা যেন একটি তিন অঙ্কের সংখ্যাকে 1,000 দিয়ে গুণ করে, গুণফলের সঙ্গে ফের সেই সংখ্যাটিই যোগ করেছি। যেমন, ধরা যাক :

$$8{,}72{,}872=8{,}72{,}000+872$$

www.pathagar.com

বাস্তবিক পক্ষে আমরা যে আদি সংখ্যাটিকে 1,001 দিয়ে গুণ করেছি, সেটা পরিষ্কার।

তারপরে কি করেছি? আমরা সেটাকে পর-পর 7, 11 আর 13 দিয়ে ভাগ করেছি, অথবা $7 \times 11 \times 13$ দিয়ে, অর্থাৎ 1,001 দিয়ে ভাগ করেছি।

তাহলে আমরা আদি সংখ্যাটিকে প্রথমে 1,001 দিয়ে গুণ করেছি এবং পরে 1,001 দিয়ে ভাগ করেছি। খুব সহজ, তাই না?

* * *

'হলিডে হোম'-এ এই মাথা ঘামানো সম্বন্ধে অধ্যায়টি শেষ করার আগে, আমি আপনাদের আরও তিনটি পাটীগণিতের চাতুরী বলে নিতে চাই: এগুলো আপনাদের বন্ধুদের জিজ্ঞেস করে দেখতে পারেন। দুটিতে আপনাকে সংখ্যা বলতে হবে এবং তৃতীয়টিতে কোন্ জিনিসটির কে মালিক, তা বলতে হবে।

খেলাগুলো খুবই পুরনো এবং সম্ভবত আপনারা এগুলো ভালো ভাবেই জানেন। কিন্তু ব্যাখ্যাটা যে কি, তা সকলেই জানেন কি-না, সে সম্বন্ধে আমি খুব সুনিশ্চিত নই। এবং এসব খেলার তত্ত্বগত ভিত্তি না জানা থাকলে আপনার পক্ষে সেগুলোর রহস্য ভেদ করা সম্ভব নয়। প্রথম দুটি ব্যাখ্যা করার জন্যে বীজগণিতের নিতান্তই প্রাথমিক জ্ঞানটুকু থাকা দরকার।

13. হারিয়ে যাওয়া অংকটি: আপনার বন্ধুকে যেকোনো অনেকগুলি অংকের একটি সংখ্যা লিখতে বলুন। ধরা যাক, তিনি লিখলেন 847 সংখ্যাটি। তাঁকে ওই তিনটি অংক যোগ করতে বলুন $(8+4+7)=19$; তারপরে যোগফলটিকে আদি সংখ্যাটি থেকে বাদ দিতে বলুন। ফলটা দাঁড়াবে:

$$847-19=828$$

এই শেষের তিন অংকের সংখ্যাটি থেকে যেকোনো একটা অংক কেটে দিয়ে, বাকি অংক দুটি আপনাকে বলতে বলুন। আপনি তৎক্ষণাৎ বলে দেবেন কোন্ অংকটি তিনি কেটে দিয়েছেন—যদিও আপনি আদি সংখ্যাটি জানেন না, আপনার বন্ধু সেই সংখ্যাটি নিয়ে যা-যা করেছেন, তাও আপনি জানেন না।

এটার ব্যাখ্যা কি?

খুব সহজ: আপনাকে শুধু এইটুকু করতে হবে: যে-দুটি অংক আপনি জেনেছেন, সেই দুটি যোগ করুন; এই যোগফলের নিকটতম উচ্চতর যে-সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য, সেই সংখ্যাটি ভেবে নিন; তারপর এই শেষোক্ত সংখ্যাটি থেকে ওই যোগফলটি বাদ দিন। তাহলেই আপনার বন্ধু যে-অংকটি কেটে দিয়েছেন সেটি পেয়ে যাবেন। যেমন, 828 সংখ্যাটি থেকে তিনি যদি প্রথম অংকটি

www.pathagar.com

(8) কেটে দিয়ে আপনাকে বাকি দুটি অংক (2 আর 8) বললেন, আপনি এই অংক দুটি যোগ করে পাচ্ছেন 10 — যার 9 দ্বারা বিভাজ্য নিকটতম উচ্চতর সংখ্যা হল 18। অতএব, যে-অংকটি আপনার বন্ধু কেটে দিয়েছেন সেটা (18 – 10) = 8।

কি করে হল? সংখ্যাটা যাই হোক-না-কেন, তার অংকগুলোর যোগফল যদি আপনি সেই সংখ্যাটি থেকে বাদ দেন, তাহলে বিয়োগফলটি সব সময়েই হবে 9 দ্বারা বিভাজ্য। বীজগণিতের নিয়মে, আমরা *a* ধরলাম শতকের সংখ্যা, *b* ধরলাম দশকের সংখ্যা আর *c* ধরলাম এককের সংখ্যা। অতএব, মোট সংখ্যাটি দাঁড়াচ্ছে :

$$100a+10b+c$$

এই সংখ্যাটি থেকে আমরা তার অংকগুলির যোগফল বাদ দিচ্ছি এবং বিয়োগফলটি পাচ্ছি :

$$100a+10b+c-(a+b+c)$$
$$=99a+9b=9(11a+b)$$

এখন, বলাই বাহুল্য যে, $9(11a+b)$ সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব, কোনো সংখ্যা থেকে ওই সংখ্যার অংকগুলির যোগফল বিয়োগ করলে, বিয়োগফলটি সব সময়ে 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

এমনও হতে পারে যে, যে-দুটি অংক আপনাকে বলা হয়েছে, সেই দুটি অংকের যোগফল 9 দ্বারা বিভাজ্য। এর অর্থ, আপনার বন্ধু যে-অংকটি কেটে দিয়েছেন সেটি হয় 0 আর না-হয় 9 এবং সেক্ষেত্রে আপনাকে বলতে হবে যে, কেটে দেওয়া অংকটি হয় 0 আর না-হয় 9।

এই চাতুরীটির আরেকটি রকমফের দেওয়া যাচ্ছে : আদি সংখ্যাটি থেকে সেটার অংকগুলির যোগফলটাকে বিয়োগ করার বদলে আপনার বন্ধুকে বলুন —ওই একই সংখ্যার অংকগুলিকে ইচ্ছে মতো ওলট-পালট করে সাজিয়ে, আদি সংখ্যাটি থেকে বিয়োগ করতে। যেমন ধরুন, তিনি যদি 8,247 লিখে থাকেন, তাহলে সেটা থেকে 2,748 বাদ দিতে পারেন (অংকগুলি ওলট-পালট করে সাজানোর ফলে যে-সংখ্যা দাঁড়িয়েছে, সেটা যদি আদি সংখ্যাটির চেয়ে বেশি হয়, তাহলে আদি সংখ্যাটিকেই বিয়োগ করতে বলুন)। বাদবাকিটা করা হবে আগের মতোই : 8,247 – 2,748 = 5,499। যে-অংকটিকে কেটে দেওয়া হয়েছে সেটা যদি 4 হয়, তাহলে অন্য তিনটি অংক (5, 9 আর 9) জেনে নিয়ে, যোগ করে পাচ্ছেন 23। 9 দ্বারা বিভাজ্য নিকটতম সংখ্যা হল 27। সুতরাং, কেটে দেওয়া অংকটি হল 27 – 23 = 4।

www.pathagar.com

14. জিজ্ঞেস না করেই সংখ্যা বলে দেওয়া : আপনার বন্ধুকে যেকোনো তিন-অঙ্কের একটি সংখ্যা লিখতে বলুন—সংখ্যাটির শেষে শূন্য থাকলে চলবে না এবং তার প্রথম ও শেষ অংক দুটির মধ্যে অন্তর 2-এর কম হলে চলবে না। এরপর তাঁকে অংকগুলির পরম্পরাকে উলটে দিতে বলুন। এবার তাঁকে বৃহত্তর সংখ্যাটি থেকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি বাদ দিতে হবে এবং বিয়োগফলটির সঙ্গে এই বিয়োগফলেরই অঙ্কের পরম্পরা উলটে নিয়ে যোগ করতে হবে। বন্ধুকে কিছু জিজ্ঞেস না করেই আপনি তাঁকে যোগফলটা বলে দিন।

যেমন, ধরা যাক, আপনার বন্ধু যে সংখ্যাটি লিখেছেন, সেটা 467। এর পরে তাঁকে এই যোগ-বিয়োগ দুটি করতে হবে :

$$467;\ 764;\ (764-467)=297;$$

$297+792=1{,}089$;—এই শেষের সংখ্যাটাই আপনি বন্ধুটিকে বলেছেন। কি করে সেটা বের করলেন ?

সাধারণভাবে প্রশ্নটা বিচার করা যাক। a, b আর c — এই তিনটি অংক নেওয়া যাক : c-র চেয়ে a অন্তত দুই একক বেশি। সংখ্যাটা দাঁড়াবে এই রকম :

$$100a+10b+c$$

অংকগুলো উলটে নিলে এই সংখ্যাটি পাচ্ছি :

$$100c+10b+a$$

প্রথম আর দ্বিতীয় সংখ্যাটির অন্তর দাঁড়াচ্ছে :

$$99a-99c$$

এর পর আমরা এটার নিম্নলিখিত রকমফের ঘটাচ্ছি :

$$99a-99c=99(a-c)$$

$$=100(a-c)-(a-c)$$

$$=100(a-c)-100+100-10$$

$$+10-a+c$$

$$=100(a-c-1)+90+(10-a+c)$$

ফলে, অন্তরটি হল এই তিনটি অঙ্কের :

শতকের সংখ্যা : $a-c-1$

দশকের সংখ্যা : 9

এককের সংখ্যা : $10+c-a$

অংকগুলি উলটে বসালে সংখ্যাটি দাঁড়াচ্ছে :

$$100(10+c-a)+90+(a-c-1)$$

www.pathagar.com

দুটি সংখ্যা যোগ করলে :

$$100(a-c-1)+90+10-a+c$$

$$+100(10+c-a)+90+a-c-1$$

আমরা পাচ্ছি : $100\times 9+180+9=1,089$

তাহলে, a, b আর c অংকগুলি যাই বাছাই করা হোক-না-কেন, আমরা সব সময়ে একই সংখ্যা পাব : 1,089। অতএব, এই হিসেবগুলির ফল বলে দেওয়াটা মোটেই কঠিন নয় : আপনি প্রথম থেকেই সেটা জানেন।

স্বভাবতই, একই ব্যক্তির কাছে এই কৌশলটা দুবার দেখাতে যাবেন না। তিনি ব্যাপারটা বুঝে ফেলবেন।

15. কার পকেটে কোন্ জিনিসটা : এটা খুব কৌশলের খেলা। এতে লাগে এমন তিনটি জিনিস যা পকেটে পুরে রাখা যায়—একটা পেনসিল, একটা চাবি আর একটা পেনসিল কাটার ছুরি হলে বেশ ভালোই হবে। এ ছাড়াও, টেবিলের উপরে একটা প্লেটে 24টি বাদাম রাখুন—ড্রাফ্‌ট্ বা ডমিনো খেলার গুটি বা দেশলাই-কাঠি হলেও চলবে।

এই প্রস্তুতির কাজটুকু শেষ করার পরে, আপনার তিন জন বন্ধুর প্রত্যেককে ওই তিনটি জিনিসের যে-কোনো একটিকে তাঁর পকেটে লুকিয়ে রাখতে বলুন—অবশ্যই আপনার অনুপস্থিতিতে ; আপনি ঘরের বাইরে চলে যাবার পরে একজন পেনসিল, একজন চাবি এবং তৃতীয় জন ছুরিটাকে নিজের পকেটে রাখলেন। এবং আপনি ঘরে ফিরে এসেই ঠিক-ঠিক বলে দিলেন কার পকেটে কোন্ জিনিসটি রয়েছে।

এই বলার প্রক্রিয়াটি এই রকম : আপনি ঘরে ফিরে এসে (অর্থাৎ, প্রত্যেকে একটা করে জিনিস লুকিয়ে রাখার পরে) আপনার বন্ধুদের প্রত্যেককে কয়েকটা করে বাদাম দিন—প্রথম জনকে একটি, দ্বিতীয় জনকে দুটি এবং তৃতীয় জনকে তিনটি বাদাম। তারপর আপনি আবার ঘরের বাইরে চলে যান : যাবার আগে বন্ধুদের বলে যান যে, তাঁদের আরও কয়েকটি করে বাদাম তুলে নিতে হবে—যিনি পেনসিল নিয়েছেন (আপনি জানেন না তিনি কোন্ জন) তিনি নেবেন—যতগুলি বাদাম তাঁকে প্রথম বার দেওয়া হয়েছে—ঠিক ততগুলি ; যিনি চাবি নিয়েছেন তিনি নেবেন—প্রথম বার তাঁকে যতগুলি বাদাম দেওয়া হয়েছে—তার দ্বিগুণ ; আর তৃতীয় জন (যিনি ছুরি নিয়েছেন) তিনি নেবেন—প্রথম বারে যতগুলি পেয়েছেন—তার চার গুণ বাদাম। তাঁদের বলে দিন যে বাদবাকি বাদাম প্লেটেই থেকে যাবে।

www.pathagar.com

তাঁরা সেটা করার পর, আপনি ঘরে ঢুকবেন। তারপর প্লেটটার দিকে এক নজর তাকিয়েই বলে দেবেন কার পকেটে কোন্ জিনিসটি রয়েছে।

কৌশলটা আরো বেশি বিমূঢ় করে দেবার মতো। কারণ, বলতে গেলে আপনি একাই সেটা করেছেন—কোনো সহযোগী ছাড়াই, যে আপনাকে গোপনে ইঙ্গিত করে জানিয়ে দিতে পারত। বাস্তবিকপক্ষে এর মধ্যে কোনো রহস্য নেই—পুরো ব্যাপারটাই হিসেবের ভিত্তির উপরে দাঁড়িয়ে আছে। প্লেটে পড়ে থাকা বাদামের সংখ্যা গুণেই আপনি বলে দেবেন কার কাছে কোন্ জিনিসটি আছে। সাধারণত খুব বেশি বাদাম পড়ে থাকে না—একটি থেকে সাতটির বেশি নয়—এবং আপনি এক নজরেই সংখ্যাটা গুণে নিতে পারবেন। এখন, প্রশ্নটা হল, আপনি কি করে জানলেন যে কোন্ জিনিসটা কার পকেটে রয়েছে? সহজেই। ওই তিনটি জিনিসের প্রত্যেকটি ভিন্ন রকমের পরিবেশনের ফলে প্লেটের উপরে ভিন্ন সংখ্যক বাদাম পড়ে থাকবে। কি ভাবে সেটা হচ্ছে, তা বলা যাক:

ধরা যাক, আপনার তিন বন্ধুর নাম ড্যান, এড আর ফ্র্যাংক—কিংবা শুধুই *D*, *E* আর *F*। আর ওই তিনটি জিনিসকে আমরা বলব: পেনসিল—*a*; চাবি—*b*; এবং পেনসিল-কাটার ছুরি—*c*। এই তিনটি জিনিস তিন বন্ধুর মধ্যে পরিবেশন করা যেতে পারে মোটমাট ছয় ভাবে:

D	*E*	*F*
a	*b*	*c*
a	*c*	*b*
b	*a*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*
c	*b*	*a*

উপরের এই সারণিতে যা দেখানো হয়েছে, তাছাড়া আর-কোনো রকমের সমবায় হতে পারে না।

www.pathagar.com

এবার দেখা যাক, প্রত্যেকটি সমবায়ের পরে কতোগুলি করে বাদাম থেকে যাচ্ছে :

D E F	তুলে নেওয়া বাদামের সংখ্যা	মোট	বাকি
a b c	1+1=2 ; 2+4=6 ; 3+12=15	23	1
a c b	1+1=2 ; 2+8=10 ; 3+6=9	21	3
b a c	1+2=3 ; 2+2=4 ; 3+12=15	22	2
b c a	1+2=3 ; 2+8=10 ; 3+3=6	19	5
c a b	1+4=5 ; 2+2=4 ; 3+6=9	18	6
c b a	1+4=5 ; 2+4=6 ; 3+3=6	17	7

দেখতেই পাচ্ছেন, প্রতি বারই অবশিষ্ট হচ্ছে ভিন্ন রকম। সেটা জানার পর আপনি সহজেই বলে দিতে পারেন, কার পকেটে কোন্ জিনিসটা আছে। আরেক বার, অর্থাৎ তৃতীয় বার আপনি ঘরের বাইরে যান, আপনার নোটবইটা খুলে দেখুন—যাতে উপরের ওই সারণিটি আপনি টুকে রেখেছেন (খোলাখুলি বলতে গেলে, আপনার দরকার শুধু প্রথম আর শেষ কলম দুটি)। এই সারণিটি মনে রাখা কঠিন ; কিন্তু আবার, সেটা মনে রাখার সত্যিই কোনো দরকার নেই। এই সারণিই বলে দেবে কার কাছে কোন্ জিনিসটি আছে। যেমন, ধরা যাক, প্লেটে যদি পাঁচটি বাদাম পড়ে থাকে, তাহলে সমবায়টি হবে *b c a*। অর্থাৎ,

ড্যান নিয়েছে চাবি,

এড নিয়েছে ছুরি, এবং

ফ্র্যাঙ্ক নিয়েছে পেন্সিল।

সফল হবার জন্যে আপনাকে অবশ্যই মনে রাখতে হবে তিন বন্ধুর মধ্যে প্রথমে কাকে কতোগুলো করে বাদাম দিয়েছেন (সবচেয়ে ভালো উপায় হল বর্ণানুক্রমিক ভাবে নামগুলো সাজিয়ে নেওয়া —যেমন এখানে আমরা করেছি)।

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় দুই ॥

খেলায় অঙ্ক

ডমিনো

16 28টি গুটির একটি শৃঙ্খল : ডমিনো খেলার সমস্ত নিয়ম মেনে আপনি কি এই খেলার 28টি গুটিকে একটি শৃংখলে সাজাতে পারেন ?

17. একটি শৃংখলের দুই প্রান্ত : 28টি ডমিনোর শৃংখলটি শুরু হয়েছে পাঁচ-ফুটকি-র গুটি দিয়ে। শৃংখলটির অন্য প্রান্তে কত ফুটকির গুটি রয়েছে ?

18. ডমিনোর একটি কৌশল : আপনার বন্ধু ডমিনোর একটি গুটি তুলে নিয়ে, বাকি 27টি গুটি দিয়ে আপনাকে একটি শৃংখল তৈরি করতে বললেন। তিনি জোরের সঙ্গেই বললেন যে, যেকোনো একটা গুটি না থাকলেও, তা করা যায়। এই বলে তিনি ঘরের বাইরে চলে গেলেন।

আপনি ডমিনোগুলিকে একটি শৃংখলে সাজালেন এবং দেখলেন যে, আপনার বন্ধু ঠিকই বলেছেন। আরও আশ্চর্য ব্যাপার হল : আপনার সাজানো শৃংখলটি না দেখেই আপনার বন্ধু বলে দিতে পারেন প্রান্তের গুটি দুটির ফুটকি-সংখ্যা।

কি করে সেটা জানলেন তিনি ? এবং যেকোনো 27টি গুটি দিয়েই যে একটা শৃংখল তৈরি করা যায়, সে সম্বন্ধেই বা তিনি এতো সুনিশ্চিত হলেন কি করে?

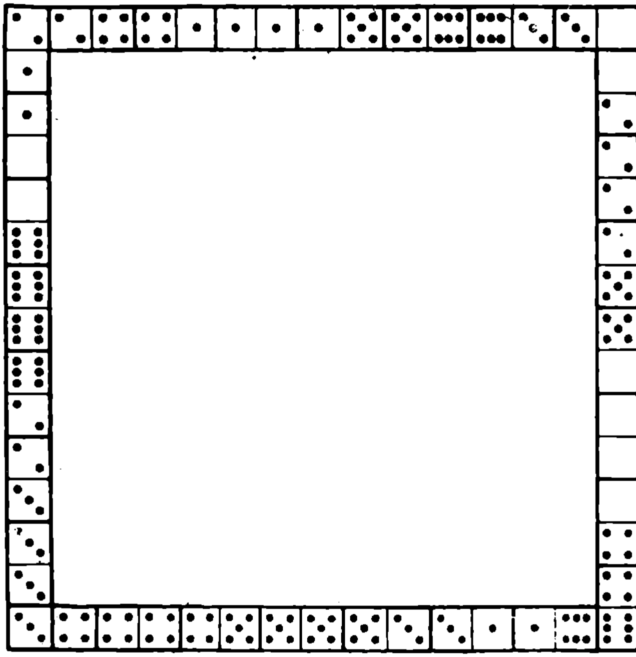
19. একটি ফ্রেম : 5নং চিত্রে, ডমিনো খেলার সমস্ত নিয়ম মেনে, গুটিগুলো দিয়ে বর্গক্ষেত্রের আকারে একটি ফ্রেম তৈরি করা হয়েছে। প্রত্যেকটা ভুজই দৈর্ঘ্যে সমান, কিন্তু ফুটকিগুলির মোট সংখ্যার দিক থেকে সমান নয়। উপরের আর বাঁ দিকের ভুজগুলির প্রত্যেকটিতে মোট 44 পয়েন্ট করে আছে এবং নিচের আর ডান দিকের ভুজ দুটিতে আছে যথাক্রমে 9 আর 32 পয়েন্ট।

এমন একটা ফ্রেম কি আপনি তৈরি করতে পারেন যেটার প্রত্যেকটি ভুজেই 44 পয়েন্ট ক'রে থাকবে ?

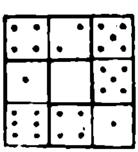
20 সাতটি বর্গক্ষেত্র : এমনভাবে একটি চার-ডমিনো বর্গক্ষেত্র তৈরি করা সম্ভব যেটার প্রত্যেকটি ভুজে সমান সংখ্যার ফুটকি থাকবে—যেমন 6নং চিত্রে দেখানো হয়েছে : প্রত্যেকটি ভুজেই আছে 11টি করে ফুটকি।

এই রকম, 28টি ডমিনো গুটি সাজিয়ে **সাতটি** বর্গক্ষেত্র তৈরি করতে পারেন কি ? ওই সাতটি বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটিরই সবগুলি ভুজেই যে একই

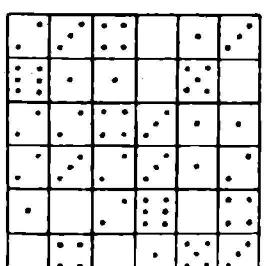
www.pathagar.com



চিত্র 5 :



চিত্র 6 :



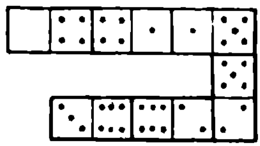
চিত্র 7 :

www.pathagar.com

সংখ্যক ফুটকি থাকবে—এমন কোনো কথা নেই। প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি ভুজে সমসংখ্যক ফুটকি হলেই চলবে।

21. ম্যাজিক বর্গক্ষেত্র : 16টি ডমিনো গুটির একটি বর্গক্ষেত্র দেখানো হয়েছে 7নং চিত্রে। এটার বৈশিষ্ট্য হল এই যে, প্রত্যেকটি সারিতেই—পাশাপাশি, উপর-নিচ এবং কোণাকুণি—13টি ফুটকি আছে। স্মরণাতীত কাল থেকে এই বর্গক্ষেত্রগুলিকে 'ম্যাজিক স্কোয়ার' বা যাদুবর্গক্ষেত্র বলে আসা হচ্ছে।

22. ডমিনোর 'প্রগতি' : 8নং চিত্রে 6টি ডমিনোকে খেলার নিয়ম অনুসারে সাজানো হয়েছে এবং দেখা যাচ্ছে, প্রতিটি পরবর্তী গুটিতে ফুটকির



চিত্র 8

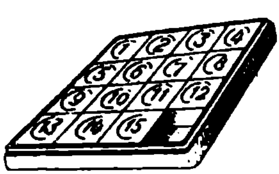
সংখ্যা 1 বেড়েছে : প্রথমটিতে 4, দ্বিতীয়টিতে 5, তৃতীয়টিতে 6, চতুর্থটিতে 7, পঞ্চমটিতে 8 এবং ষষ্ঠটিতে 9।

ক্রমপরম্পরায় এইভাবে সম-পরিমাণে বেড়ে (বা কমে) যাওয়া কতকগুলি সংখ্যার শ্রেণীকে বলা হয় 'গাণিতিক প্রগতি'। এক্ষেত্রে, প্রতিটি সংখ্যা তার পূর্ববর্তী সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি। কিন্তু অন্য রকমের অন্তরও থাকতে পারে।

আপনাকে যেটা করতে হবে, সেটা হল—অন্য কতকগুলি 6-গুটির গাণিতিক প্রগতি সাজানোর।

পনেরোর ধাঁধা :

সমচতুষ্কোণ একটা চ্যাটালো বাক্সের মধ্যে, 1 থেকে 15 পর্যন্ত সংখ্যা লেখা 15টি গুটি—খেলাটা সুপরিচিত, যদিও খুব কম খেলোয়াড়ই এর ইতিহাস জানেন। জার্মান গণিতবিদ ও ড্রাফট্‌স্ বিশেষজ্ঞ ডবলু আহ্‌রেন্‌স্ W. Ahrens) এ সম্বন্ধে যা লিখেছেন, তা এই :



চিত্র 9 : পনেরোর ধাঁধা

www.pathagar.com

"1870-এর দশকের শেষ দিকে, মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে এক নতুন খেলার আবির্ভাব ঘটে—'পনেরোর ধাঁধা'। অতি দ্রুত হারে আর ব্যাপক ভাবে এর জনপ্রিয়তা ছড়িয়ে পড়ে, এবং অল্পকালের মধ্যেই এ এক সামাজিক বিপর্যয় হয়ে দাঁড়ায়।"

"এই খেলাটির উন্মত্ত নেশা ইয়োরোপকেও আক্রমণ করে। সর্বত্রই বহু লোককে দেখা যেত যারা হেঁয়ালিটার সমাধানে ব্যস্ত—এমন কি, সর্বসাধারণের জন্য পরিবহণ-যানগুলিতেও। দপ্তর-কর্মচারী আর দোকানের বিক্রয়কারীরা সমস্যাটির সমাধানে সব সময়ে এতোই অভিনিবিষ্ট থাকত যে মালিকপক্ষ কাজের সময়ে খেলাটাকে নিষিদ্ধ করতে বাধ্য হয়েছিল। কারিতকর্মা লোকে এই উন্মাদনার সুযোগ নিয়ে বড়ো আকারের সব প্রতিযোগিতার ব্যবস্থা করতে লেগে যায়।"

"ধাঁধাটা, এমন কি, জার্মান রাইখস্টাগেও অনুপ্রবেশ করে। খেলাটা নিয়ে যখন দারুণ উন্মাদনা সৃষ্টি হয়েছে, সেই সময়ে রাইখস্টাগের সদস্য অন্যতম জনপ্রতিনিধি এবং সুপরিচিত ভূগোলবিদ ও গণিতবিদ সিগমুণ্ড গুন্থের (Siegmund Guenther) লিখেছেন যে, তাঁর শুভ্রকেশ সহযোগীদের গভীর চিন্তামগ্ন অবস্থায় ছোট ছোট ওই চতুষ্কোণ বাক্সগুলির উপরে ঝুঁকে পড়ার দৃশ্যটি তাঁর মনে আছে।"

"প্যারিসে খেলাটা চলত খোলা জায়গায়, বীথিপথগুলির বুকে, এবং শীগগিরই সেটা রাজধানী থেকে মফঃস্বলেও ছড়িয়ে পড়ে। 'এমন কোনো গেরস্থালি ছিল না যেখানে এই মাকড়সাটি তার জাল না বুনেছে'—একজন ফরাসী লেখক এইভাবে খেলাটার সর্বগ্রাসী নেশার বর্ণনা দিয়েছেন।"

"উন্মাদনাটা সবচেয়ে প্রবল হয়ে দাঁড়ায় 1,880-তে, কিন্তু গণিতবিদরা অল্প কালের মধ্যেই অত্যাচারটা বন্ধ করেন: তাঁরা প্রমাণ করে দেন যে, খেলাটার বহু সমস্যার মধ্যে মাত্র অর্ধেক সংখ্যক সমাধানযোগ্য। বাকিগুলোর মীমাংসা করার বিন্দুমাত্র সম্ভাবনা নেই।

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

চিত্র 10: ব্লকগুলির যথানুক্রমিক বিন্যাস (অবস্থান I)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

চিত্র 11: সমাধানের অসাধ্য (অবস্থান II)

www.pathagar.com

গণিতবিদরা পরিষ্কার করেই দেখিয়ে দেন যে, সমস্ত প্রচেষ্টা সত্ত্বেও কেন কতকগুলি সমস্যা অমীমাংসিতই থেকে যায় এবং কেন প্রতিযোগিতাগুলির সংগঠকরা ওই মীমাংসাগুলির জন্যে বিরাট অংকের সব পুরস্কার ঘোষণা করতে পিছপাও নয়। এক্ষেত্রে, হেঁয়ালিটার উদ্‌ভাবক স্যাম লয়েড (Sam Lloyd) সবাইকে ছাড়িয়ে যান। এই 'পনেরোর ধাঁধা'র একটি রকমফেরকে যে সমাধান করে দিতে পারবে তাকে 1,000 ডলার পুরস্কার দেওয়া হবে—এই মর্মে তিনি নিউ ইয়র্কের একটি সংবাদপত্রের মালিককে বিজ্ঞাপন দেবার জন্যে অনুরোধ করেন। প্রকাশক ইতস্ততঃ করলে লয়েড নিজেই ওই টাকাটা দেবেন বলে জানান। লয়েড তাঁর হরেক রকম অংকের সুকৌশলী হেঁয়ালী আর মাথা ঘামানোর মতো ধাঁধার জন্যে সুপরিচিত ছিলেন। ব্যাপারটা অদ্ভুত যে, তিনি তাঁর এই ধাঁধাটির জন্যে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের পেটেণ্ট পাননি। আইন অনুযায়ী, পেটেণ্ট পাবার জন্যে যে দরখাস্ত করবে, তাকে সেই সঙ্গে একটা 'কার্যকর মডেল' পেশ করতে হবে। পেটেণ্ট অফিসে তাঁকে জিজ্ঞেস করা হয় হেঁয়ালিটা সমাধান-যোগ্য কি-না, এবং লয়েডকে স্বীকার করতে হয় যে, গাণিতিক ভাবে সেটার সমাধান করা যায় না। 'সেক্ষেত্রে', কর্মকর্তাটি তাঁকে বলে দেন, 'কোনো কার্যকর মডেল থাকতে পারে না এবং সেটা ছাড়া পেটেণ্ট দেওয়া যেতে পারে না।' লয়েড এ নিয়ে আর এগোননি ; কিন্তু এ বিষয়ে কোনো সন্দেহ নেই যে,

চিত্র 12

www.pathagar.com

তিনি যদি তাঁর এই উদ্‌ভাবনটির অনন্যসাধারণ সাফল্য সম্বন্ধে আগে থেকে আঁচ করতে পারতেন, তাহলে তিনি ঢের বেশি পীড়াপীড়ি করতেন।"

এই হেঁয়ালিটি সম্বন্ধে স্বয়ং উদ্‌ভাবকের কথায় কিছু তথ্য:

"1870-এর দশকে আমি কি ভাবে, সরানো যায় এমন কতকগুলি গুটি সমেত, একটা বাক্সকে সারা দুনিয়ার অত্যধিক মাথা ঘামানোর কারণ করে তুলেছিলাম, সে কথা হয়তো হেঁয়ালি-উৎসাহীদের ভালো রকম মনে আছে। এটা 'পনেরোর ধাঁধা' নামে পরিচিত হয়ে ওঠে (9নং চিত্র)। তেরোটি গুটি নিয়মিত ক্রমানুসারে সাজানো (10নং চিত্র) এবং মাত্র দুটি, 14 আর 15, সে ভাবে সাজানো নয় (11নং চিত্র)। সমস্যাটা হল—একবারে একটি মাত্র গুটি সরিয়ে 14 আর 15 গুটি দুটিকে নিয়মিত বিন্যাসে আনতে হবে।"

"প্রথম নির্ভুল মীমাংসার জন্যে ঘোষিত 1,000 ডলার পুরস্কার কেউই জয় করে নিতে পারেনি, যদিও সেটা করার জন্যে লোকে অক্লান্ত চেষ্টা চালিয়েছে। এ নিয়ে অনেক হাসির গল্প চালু আছে হেঁয়ালিটা নিয়ে ব্যবসায়ীরা এতই অভিনিবিষ্ট যে তারা তাদের দোকান খুলতে ভুলে গেছে, মান-মর্যাদা সম্পন্ন সব কর্মকর্তা রাত জেগে সমস্যাটার সমাধানের পথ খুঁজছেন। সাফল্য সম্বন্ধে সুনিশ্চিত হয়ে লোকে কিছুতেই সমাধানের পথসন্ধান ছাড়তে রাজি নয়। জাহাজের পথনির্দেশকরা পাহাড়ের গায়ে তাদের জাহাজকে ধাক্কা খাইয়েছে, ট্রেন চালকরা নির্দিষ্ট স্টেশন ছাড়িয়ে গেছে, চাষীরা চলে গেছে লাঙল ছেড়ে।"

* * * *

ধাঁধাটার মূল সূত্রের সঙ্গে আমরা পাঠকের পরিচয় করিয়ে দিচ্ছি। সমগ্র ভাবে, এটা অত্যন্ত জটিল এবং উচ্চতর বীজগণিতের অন্যতম অংশ 'প্রতিস্থাপন তত্ত্ব'-এর সঙ্গে ঘনিষ্ঠ ভাবে যুক্ত। আহ্‌রেন্‌স্‌ এ সম্বন্ধে লিখেছেন:

"কাজটা হল—খালি জায়গাটাকে কাজে লাগিয়ে ব্লকগুলোকে এমন ভাবে সরাতে হবে যাতে শেষ পর্যন্ত 15টি ব্লকের সবগুলিই নিয়মিত ধারাবাহিকতায় সাজানো হয়ে যায়—অর্থাৎ, ব্লক 1 বসবে উপরের বাঁদিকের কোণে, ব্লক 2 বসবে সেটার ডান পাশে, ব্লক 3 বসবে ব্লক 2-র পরে এবং ব্লক 4 বসবে উপরের ডান দিকের কোণে; তার নিচের সারিতে এই একই ক্রমানুসারে 5, 6, 7 আর 8 ব্লকগুলি বসবে; ইত্যাদি (10নং চিত্র দেখুন)।"

"এক মুহূর্তের কল্পনা করুন, সব ব্লকগুলোই এলোমেলো ভাবে সাজানো রয়েছে। পরপর কয়েকবার সরিয়ে-সরিয়ে ব্লক 1-কে তার সঠিক অবস্থানে নিয়ে আসা সব সময়েই সম্ভব।"

www.pathagar.com

"ব্লক 1 কে না ছুঁয়ে, ব্লক 2-কে তার পাশের ঘরে সরিয়ে আনাও সমান সম্ভব। এর পর, ব্লক 1 আর ব্লক 2-কে না ছুঁয়ে, ব্লক 3 আর 4-কে তাদের নিজের জায়গায় সরিয়ে আনা যেতে পারে। যদি বা এমন হয় যে, এই ব্লক দুটি শেষ দুটি খাড়াখাড়ি (উল্লম্ব) সারিতে নেই, তাহলেও তাদের সেখানে আনা এবং বাঞ্ছিত ফললাভ করা সহজ। এবার উপরের সারি 1, 2, 3 আর 4 যথাক্রমে বিন্যস্ত, এবং আমাদের পরবর্তী ব্লক-চালাচালির ব্যাপারে আমরা ওই উপরের সারিটাকে আর নাড়াচাড়া করব না। একই ভাবে আমরা চেষ্টা করব 5, 6, 7 আর 8 সারিটাকে যথাক্রমে সাজাতে; এটাও সম্ভব। তারপর, পরবর্তী দুটি সারিতে 9 আর 13 ব্লক দুটিকে তাদের সঠিক অবস্থানে আনা দরকার। এইভাবে যথাক্রমে বিন্যস্ত হবার পর, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 আর 13 ব্লকগুলিকে আর সরানো হচ্ছে না। এখন 6টি ঘর বাকি থাকছে—যেগুলির মধ্যে একটি ফাঁকা এবং অন্য 5টি দখল করে আছে 10, 11, 12, 14 আর 15 ব্লকগুলি। 10, 11 আর 12 ব্লকগুলিকে সব সময়েই চালাচালি করা সম্ভব—যতক্ষণ পর্যন্ত না তাদের সঠিকভাবে সাজানো হচ্ছে। এটা করার পর, নিচের সারিতে বাকি রয়ে যাবে—হয় সঠিক, না হয় বেঠিক বিন্যাসে—14 আর 15 ব্লক দুটি (11নং চিত্র)। এই ভাবে—পাঠক যেটা নিজেই যাচাই করে দেখতে পারেন"—আমরা নিম্নলিখিত ফল পাচ্ছি :

"10নং চিত্রে (অবস্থান I) কিংবা 11নং চিত্রে (অবস্থান II) যেমন দেখানো হয়েছে, সেই ভাবে ব্লকগুলির যেকোনো আদি সমবায়কে সুবিন্যস্ত ক্রমানুসারে আনা যেতে পারে।"

"যদি কোনো সমবায়কে (combination—যেটাকে আমরা সংক্ষেপে 'C' বলব।) অবস্থান I-এ পুনর্বিন্যস্ত করা যায়, তাহলে এটা সুস্পষ্ট যে আমরা বিপরীতটাও করতে পারব। অর্থাৎ, অবস্থান I-কে 'C' সমবায়ে পুনর্বিন্যস্ত করতে পারি। প্রত্যেকটি চালাচালিকেই তো উলটে করা যায়। যেমন, ব্লক 12-কে যদি আমরা ফাঁকা ঘরে সরিয়ে দিতে পারি, তাহলে আমরা সেটাকে তার পূর্ব-অবস্থানেও ঠিক তেমনই ফিরিয়ে আনতে পারি।"

"এই ভাবে, আমাদের দুটি সমবায় শ্রেণী আছে : প্রথমটিতে আমরা ব্লকগুলিকে নিয়মিত ভাবে সাজানো অবস্থায় আনতে পারি (অবস্থান I) এবং দ্বিতীয়টিতে অবস্থান II-এ। এবং এর বিপরীতে, নিয়মিত ভাবে সাজানো অবস্থা থেকে আমরা প্রথম শ্রেণীর যেকোনো সমবায় পেতে পারি, আর অবস্থান II থেকে দ্বিতীয় শ্রেণীর যেকোনো সমবায় পেতে পারি। এবং, একই শ্রেণীর দুটি সমবায়ের যেকোনো একটিকে উলটে দেওয়া যেতে পারে।"

www.pathagar.com

"অবস্থান" I-কে অবস্থান II-এ রূপান্তরিত করা কি সম্ভব? খুব সুনির্দিষ্ট ভাবেই প্রমাণ করা যেতে পারে (বিস্তারিত ব্যাখ্যার মধ্যে না গিয়ে) যে,ব্লক-গুলিকে অসংখ্যবার চালাচালি করেও তা করা সম্ভব নয়। অতএব, ব্লকগুলির বিরাট সংখ্যক সমবায়গুলিকে দুটি শ্রেণীতে শ্রেণীভুক্ত করা যেতে পারে—প্রথম শ্রেণী, যেখানে ব্লকগুলিকে নিয়মিত ক্রমানুসারে সাজানো যেতে পারে, অর্থাৎ, সমাধানযোগ্য; এবং দ্বিতীয় শ্রেণী, যেখানে কোনো অবস্থাতেই ব্লকগুলিকে নিয়মিত ক্রমানুসারে আনা যায় না, অর্থাৎ, সমাধান অসম্ভব। এবং এইসব অবস্থানের সমাধান করার জন্যই বিপুল পরিমাণ পুরস্কার ঘোষণা করা হয়েছিল।"

"অবস্থানটা কোন্ শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত, সেটা বলার কি কোনো উপায় আছে? আছে, এবং একটা উদাহরণ এখানে দেওয়া যাচ্ছে":

"নিম্নলিখিত অবস্থানটা বিশ্লেষণ করা যাক: প্রথম সারির ব্লকগুলি নিয়মিত পর্যায়ে সাজানো আছে এবং ব্লক 9 ছাড়া দ্বিতীয় সারিটাও তাই। এই ব্লকটি দখল করে রয়েছে ন্যায়সঙ্গত ভাবে যেটা ব্লক 8-এর দখলে থাকার কথা। অতএব, ব্লক 9 রয়েছে ব্লক 8-এর পূর্ববর্তী অবস্থানে। নিয়মিত শৃংখলার এই ব্যতিক্রমকে বলা হয় 'বিশৃংখলা'। আমাদের বিশ্লেষণ থেকে আরও দেখা যাচ্ছে যে ব্লক 14, তার যেখানে থাকা উচিত সেখান থেকে তিন ঘর এগিয়ে আছে; অর্থাৎ, এটি 12, 13 আর 11 ব্লকগুলি থেকে পূর্ববর্তী অবস্থানে আছে। এখানে আমরা তিনটি 'বিশৃংখলা' দেখতে পাচ্ছি (12-র আগে 14, 13-র আগে 14 এবং 11-র আগে 14)। মোট 1 + 3 = 4টি 'বিশৃংখলা'। এ ছাড়াও, ব্লক 12 রয়েছে ব্লক 11-র আগে। ঠিক যেমন ব্লক 13 রয়েছে ব্লক 11-র আগে। এর ফলে আমরা আরো দুটি 'বিশৃংখলা' পাচ্ছি এবং মোট সংখ্যাটা দাঁড়াচ্ছে 6। এই ভাবে আমরা প্রত্যেকটি অবস্থানে 'বিশৃংখলা'-র সংখ্যা নির্ণয় করছি—নিচের ডানদিকের কোণার ঘরটি আগে থেকে ফাঁকা রাখার দিকে ভালো রকম নজর রেখে। এই 'বিশৃংখলা'র মোট সংখ্যা যদি জোড় সংখ্যা হয়—যেমন এক্ষেত্রে হচ্ছে—তাহলে সমস্ত ব্লককে নিয়মিত ক্রমানু-সারে সাজাতে পারা যাবে এবং সমস্যাটি হবে সমাধানযোগ্য। পক্ষান্তরে, 'বিশৃংখলা'র সংখ্যাটি যদি হয় বিজোড়, তাহলে অবস্থানটা হবে দ্বিতীয় বর্গের; অর্থাৎ, সেটা সমাধানের অতীত (শূন্য সংখ্যক বিশৃংখলাকে জোড় সংখ্যা হিসেবে ধরা হয়)।"

"হেঁয়ালিটার গাণিতিক ব্যাখ্যা এই উন্মত্ত নেশাটার উপরে মরণ-আঘাত হেনেছে। গণিত এই খেলাটির একটি বিস্তারিত তত্ত্ব দাঁড় করিয়েছে, সন্দেহের বিন্দুমাত্র অবকাশ রাখেনি। এই ধাঁধার মীমাংসাটি, অন্যান্য অংকের খেলার মতো, আন্দাজ অথবা প্রত্যুৎপন্নমতির উপরে নির্ভর করে না; নির্ভর করে

www.pathagar.com

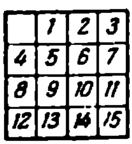
এমন কতকগুলি গাণিতিক উপাদানের উপরে যেগুলি সম্পূর্ণ নিশ্চিত রূপে ফলটাকে নির্ধারণ করে দেয়।"

এবারে, এক্ষেত্রে আরও কয়েকটি সমস্যার দিকে তাকানো যাক।

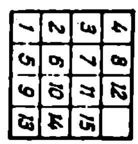
নিচে, উদ্‌ভাবক কর্তৃক আবিষ্কৃত, **সমাধানযোগ্য সমস্যাগুলির** মধ্যে তিনটি দেওয়া যাচ্ছে।

23. প্রথম সমস্যা : 11নং চিত্রের ব্লকগুলিকে উপরের বাঁদিকের ঘরটা খালি রেখে, নিয়মিত ক্রমানুসারে সাজান (13নং চিত্রের মতো)।

24. দ্বিতীয় সমস্যা : 11নং চিত্রে যেমন আছে তেমনি ভাবে সাজানো ব্লক সমেত বাক্সটাকে সেটার এক-পাশের উপরে দাঁড় করান (এক-চতুর্থাংশ ঘুরিয়ে এবং ব্লকগুলিকে চালাচালি করে তাদের 14নং চিত্রে অবস্থানে আনুন)।



চিত্র 13 : লয়েডের প্রথম সমস্যা



চিত্র 14 : লয়েডের দ্বিতীয় সমস্যা

25. তৃতীয় সমস্যা : ধাঁধার খেলাটির নিয়ম অনুযায়ী ব্লকগুলিকে চালাচালি করে বাক্সটাকে একটা "যাদু বর্গক্ষেত্রে" পরিণত করুন; অর্থাৎ, ব্লকগুলিকে এমন ভাবে সাজান যাতে যেকোনো দিকে যোগ করলে যোগফল হবে 30।

16 থেকে 25নং প্রশ্নের উত্তর :

16. সমস্যাটিকে সরল করে নেবার জন্যে, সাতটি ডবল-গুটির সবগুলিকেই সরিয়ে রাখা যাক : 0—0, 1—1, 2—2, ইত্যাদি। থাকবে প্রত্যেকটি সংখ্যার ছ'বার পুনরাবৃত্তি সমেত 21টি গুটি। যেমন, এই ছ'টি গুটির উপরে গুটিটির অর্ধাংশের গায়ে) চারটি করে বিন্দু থাকবে :

4—0, 4—1, 4—2, 4—3, 4—5, এবং 4—6

এ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি, প্রতিটি সংখ্যার পুনরাবৃত্তি ঘটছে জোড়-সংখ্যক বার। স্পষ্টতই এই গুটিগুলিকে জুড়ে দেওয়া যেতে পারে। এবং সেটা করার পর যখন ওই 21টি গুটিকে একটি অব্যাহত শৃঙ্খলে সাজানো হল, তখন আমরা ওই সাতটি ডবলগুটিকে ঢুকিয়ে দিচ্ছি সেইসব গুটির মাঝখানে—যে-গুটিগুলির শেষে রয়েছে সমসংখ্যক বিন্দু ; অর্থাৎ, দুটি শূন্য

www.pathagar.com

সংখ্যার মাঝখানে ; দুটি 1-এর মাঝখানে ; দুটি 2-এর মাঝখানে ইত্যাদি। এর পরে, খেলার নিয়ম অনুসারে 28টি গুটির সবগুলিই ওই শৃংখলে স্থান পাবে।

17. এটা প্রমাণ করা সহজ যে, 28টি গুটির একটি শৃংখল যে-সংখ্যক বিন্দু দিয়ে শুরু হয়েছে, ঠিক সেই সংখ্যক বিন্দুতেই শেষ হবে। বাস্তবিকপক্ষে, তা যদি না হত তাহলে শৃংখলটির দুই প্রান্তে বিন্দুর সংখ্যার বিজোড়-সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটত (শৃংখলের ভিতরে, সংখ্যাগুলো সব সময়ে জোড়ায় জোড়ায় থাকে)। কিন্তু আমরা জানি যে একটি সম্পূর্ণ সেটে প্রত্যেকটি সংখ্যার আট বার করে পুনরাবৃত্তি ঘটে—অর্থাৎ জোড় সংখ্যক বার। সুতরাং, শৃংখলটির দুই প্রান্তে অসমান সংখ্যক বিন্দু সম্বন্ধে আমাদের ধারণাটা ভুল : বিন্দুর সংখ্যা সমান হতেই হবে (গণিতে এ ধরনের যুক্তিকে বলা হয় 'অযৌক্তিকতা সাধন" (reduction ad absurdum)।

প্রসঙ্গত বলা যায়, শৃংখলের এই ধর্মটির আরেকটি অত্যন্ত আগ্রহোদ্দীপক দিক আছে : সেটা হল, একটি 28-গুটি শৃংখলের দুই প্রান্তকে সব সময়ে জুড়ে দিয়ে একটি বলয় তৈরি করা যায়। এই ভাবে একটি সম্পূর্ণ ডমিনো সেটকে, খেলার নিয়ম অনুসারে দুই প্রান্ত মুক্ত রেখে একটি শৃংখলে অথবা একটি বলয়ে—দুই ভাবেই সাজানো যেতে পারে।

কতো রকমে এই শৃংখল বা বলয় সাজানো যেতে পারে, তা জানার জন্যে পাঠক আগ্রহী হতে পারেন। ক্লান্তিকর সব গণনার মধ্যে না গিয়ে, আমরা বলতে পারি—এক বিরাট সংখ্যক রকমে সেটা করা যেতে পারে। সঠিক ভাবে বলতে গেলে, ওই সংখ্যাটি হল : 79, 59, 22, 99, 31, 520 ($2^{13} \times 3^{8} \times 5 \times 7 \times 4,\ 231$ সংখ্যাটির সমান)।

18. এই সমস্যাটির সমাধান উপরে বর্ণিত সমাধানের অনুরূপ। আমরা জানি যে, 28-টি ডমিনো গুটিকে সব সময়ে একটি বলয়ের আকারে সাজানো যায়। অতএব, একটি গুটি যদি আমরা সরিয়ে নিই, তাহলে :

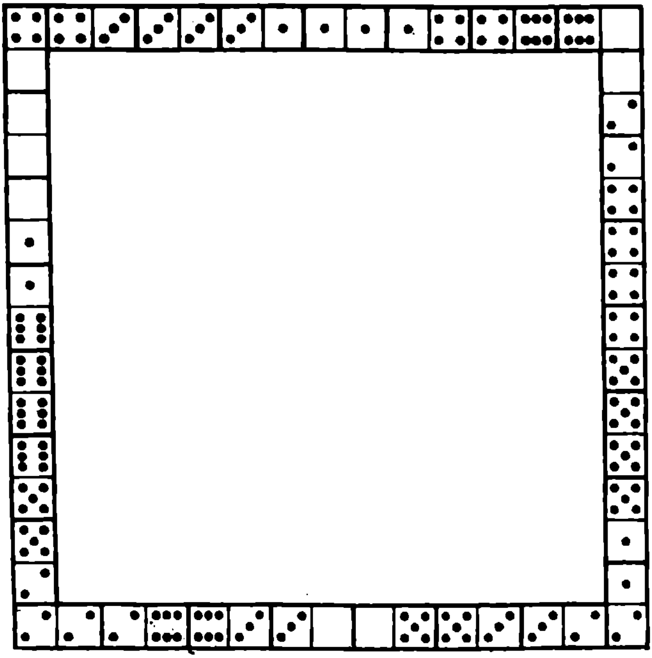
1) বাকি 27টি সব সময়ে একটি অব্যাহত শৃংখল তৈরি করবে—যেটার প্রান্ত দুটি মুক্ত থাকবে, এবং

2) এই শৃংখলটির দুই মুক্ত প্রান্তের সংখ্যাগুলি সব সময়ে হবে—যে গুটিটি সরিয়ে নেওয়া হয়েছে সেটির দুই অর্ধাংশে যে সংখ্যা আছে তাই।

কোনো ডমিনো গুটিকে লুকিয়ে রেখে আপনি সব সময়েই আগে থেকে শৃংখলের দুই প্রান্তের বিন্দুর সংখ্যা বলে দিতে পারবেন।

19. অজ্ঞাত বর্গক্ষেত্রটির চারটি বাহুর মোট বিন্দুর সংখ্যাকে অবশ্যই হতে হবে 44 × 4 = 176, অর্থাৎ, সমস্ত ডমিনো গুটির বিন্দুগুলির মোট সংখ্যার (168) চেয়ে 8 বেশি। এর কারণ, বর্গক্ষেত্রটির (প্রত্যেকটি বাহুর বিন্দুর

www.pathagar.com



চিত্র 15

সংখ্যা গোণার সময়ে) চার কোণের সংখ্যাগুলি দুবার করে গোণা হচ্ছে। এটাই এই তথ্যটিকে নির্ধারিত করে দিচ্ছে যে, কোণের ঘরগুলির বিন্দুর মোট সংখ্যা হল 8 এবং এটাই প্রয়োজনীয় বিন্যাসটিকে বের করে নিতে সাহায্য করছে (যদিও, এর আবিষ্কারটা রীতিমতো ঝামেলার ব্যাপার রয়েই গেছে)। 15নং চিত্রে সমাধানটা দেখানো হয়েছে।

20. এই সমস্যাটির অনেকগুলি সমাধানের মধ্যে দুটি এখানে দেওয়া যাচ্ছে। প্রথমটিতে (16নং চিত্র) আমরা পাচ্ছি :

1টি বর্গক্ষেত্র যার মোট সংখ্যা	3	2টি বর্গক্ষেত্র যার মোট সংখ্যা	9
1টি ,, ,, ,, ,,	6	1টি ,, ,, ,, ,,	10
1টি ,, ,, ,, ,,	8	1টি ,, ,, ,, ,,	16

দ্বিতীয়টিতে (17নং চিত্র) রয়েছে :

2টি বর্গক্ষেত্র যার মোট সংখ্যা	4	2টি বর্গক্ষেত্র যার মোট সংখ্যা	10
1টি ,, ,, ,, ,,	8	2টি ,, ,, ,, ,,	12

21. যাদু বর্গক্ষেত্রের একটি উদাহরণ 18নং চিত্র—যেটার প্রত্যেকটি সারিতে মোট 18টি ফুটকি আছে।

www.pathagar.com

22 এখানে, উদাহরণ হিসেবে, 2 অন্তর সমেত দুটি প্রগতি দেখানো হচ্ছে :

ক) 0—0, 0—2, 0—4, 0—6, 4—4 (অথবা 3—5), 5—5 (অথবা 4—6),

খ) 0—1, 0—3 অথবা 1—2), 0—5 (অথবা 2—3), 1—6 (অথবা 3—4), 3—6 (অথবা 4—5), 5—6

মোট 23টি ছয়-গুটির গাণিতিক প্রগতি রয়েছে। শুরু করতে হবে যে-গুটিগুলি দিয়ে, সেগুলি হল :

ক) 1 অন্তর সমেত প্রগতির জন্যে—

0—0	1—1	2—1	2—2	3—2
0—1	2—0	3—0	3—1	2—4
1—0	0—3	0—4	1—4	3—5
0—2	1—2	1—3	2—3	3—4

খ) 2 অন্তর সমেত প্রগতি—

0—0 0—2 0—1

23. এই সমস্যাটির সমাধান করা যেতে পারে নিম্নলিখিত 44টি চালাচালির দ্বারা :

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1

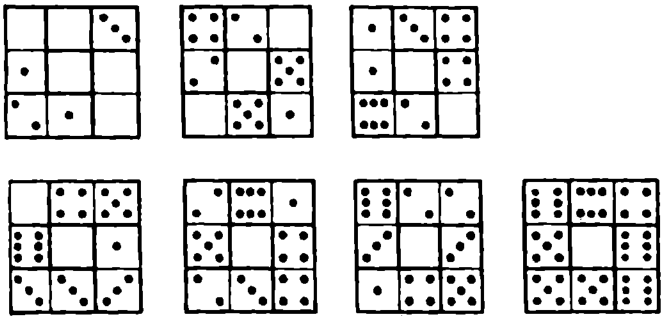
24. নিম্নলিখিত 39 বার চালাচালির দ্বারা এই সমস্যাটির সমাধান করা যেতে পারে :

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12

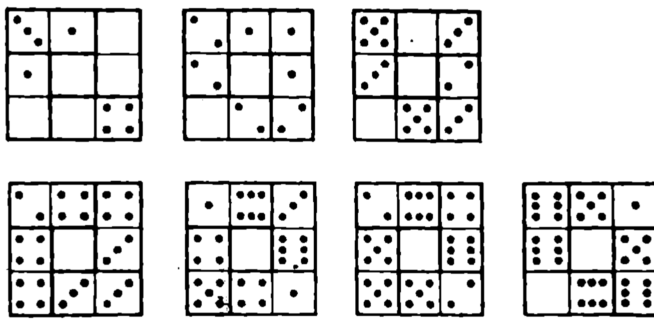
25. সমষ্টি 30 হবে—এমন একটি যাদু বর্গক্ষেত্র তৈরি করা যাবে নিম্নলিখিত চালাচালির মধ্যস্থতায় :

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3

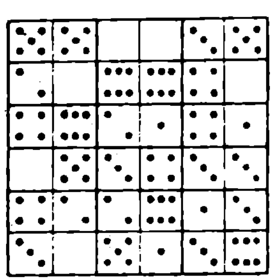
www.pathagar.com



চিত্র 16



চিত্র 17



চিত্র 18

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় তিন ॥

আরও এক ডজন ধাঁধা

26. সুতলি : "সে কী! আরও সুতলি চাই?" কাপড় ধোলাই বন্ধ রেখে ছেলেটির মা বলে উঠলেন, "কী ভেবেছিস তুই—আমার শরীরটাই পুরো সুতলি দিয়ে তৈরি? কেবলই বলতে শুনি, 'খানিকটা সুতলি দাও।' গতকাল তোকে আমি পুরো একটা সুতলির বল দিয়েছি। এতো সুতলি তোর দরকার হয় কিসে? কাল যেটা দিলাম সেটা দিয়ে কি করলি?"

"কি করলাম?" জবাব দিল ছেলেটি, "প্রথমে তুমি নিজেই সেটার অর্ধেকটা নিয়ে নিলে।"

"তা না নিলে ধোয়া জামা-কাপড়গুলো মেলব কিসে?"

"তারপর দাদা নিয়ে নিল যতোটা সুতলি বাকি ছিল তার অর্ধেকটা—খাঁড়িতে গিয়ে মাছ ধরবে বলে।"

"তা, বড়ো ভাইকে না দিলে চলবে কেন?"

"দিয়েছি তো। তারপর অল্পই বাকি ছিল। তার থেকে বাবা অর্ধেকটা নিলেন তাঁর ট্রাউজারের সাসপেন্ডার ঠিক করার জন্যে। তারপর যেটুকু বাকি ছিল তার পাঁচ ভাগের দুভাগ নিল বোন বিনুনি বাঁধবে বলে..."

"তাহলে বাকিটুকু দিয়ে কি করলি?"

"বাকিটুকু দিয়ে? মোটে 30 সেন্টিমিটার বাকি রয়েছে। এটুকু দিয়ে টেলিফোন খেলা যায় কি-না চেষ্টা করে দ্যাখো দিকি!"

গোড়ায় কতোটা সুতলি ছিল?

27. মোজা আর দস্তানা : একটি বাক্সে 10 জোড়া বাদামী রঙের আর 10 জোড়া কালো রঙের মোজা আছে। আরেকটি বাক্সে আছে একই সংখ্যক বাদামী রঙের আর কালো রঙের দস্তানা। একই রঙের এক জোড়া মোজা আর এক জোড়া দস্তানা বেছে নেবার জন্যে বাক্স দুটি থেকে একবারে কতোগুলি করে মোজা আর দস্তানা বের করে নিতে হবে?

28. চুলের পরমায়ু : মানুষের মাথায় গড়ে চুলের সংখ্যা কতো? প্রায় 1,50,000*। হিসেব কষে দেখা গেছে, একজন মানুষের মাথা থেকে প্রায় 3,000 চুল উঠে যায়।

---

* অনেকেই ভেবে অবাক হবেন যে, এই সংখ্যাটা আমরা পেলাম কিভাবে। আমাদের কি তাহলে চুলগুলো সব গুণে দেখতে হয়েছে? না। মানুষের মাথায় 1 বর্গ-সেন্টিমিটার জুড়ে কতোগুলো চুল আছে, সেটা গুনে দেখলেই যথেষ্ট। এই সংখ্যাটা, এবং মাথার চুলে ঢাকা

www.pathagar.com

এথেকে, মানুষের মাথার প্রত্যেকটি চুলের আয়ু—অবশ্যই গড় আয়ু—কতো, তা বলতে পারবেন কি ?

29. মজুরি : গত সপ্তাহে 'ওভারটাইম' বা বাড়তি কাজের সময় ধরে আমি মজুরি পেয়েছি 130 রুবল। ওই ওভারটাইমের জন্যে যা প্রাপ্য, আমার মূল মজুরি তার চেয়ে 100 রুবল বেশি। তাহলে, ওভারটাইম না করে আমি কতো আয় করি ?

30. স্কি করে যাওয়া : একজন লোক হিসেব করে দেখল যে, সে যদি ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার স্কি করে যায়, তাহলে একটা বিশেষ জায়গায় সে পৌঁছাবে বেলা 1টায় ; যদি ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার যায়, তাহলে সেই জায়গাটায় সে পৌঁছাবে সকাল 11টায়। তাহলে, ঠিক দুপুর 12টায় ওই জায়গায় পৌঁছাবার জন্যে তাকে কতো দ্রুতগতিতে স্কি করে যেতে হবে ?

31 দুই শ্রমিক : দুজন শ্রমিক—একজন বয়স্ক, আরেকজন তরুণ—একই বাড়িতে বাস করে আর একই কারখানায় কাজ করে। বাড়ি থেকে কারখানায় হেঁটে যেতে তরুণটির লাগে 20 মিনিট আর বয়স্কটির সময় লাগে 30 মিনিট। বয়স্ক শ্রমিকটি যদি তরুণ শ্রমিকটির চেয়ে 5 মিনিট আগে রওনা হন, তাহলে তরুণটি তাঁকে কখন ধরে ফেলবে ?

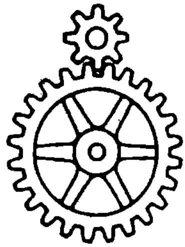
32. একটি প্রতিবেদন টাইপ করা : দুটি মেয়েকে একটি প্রতিবেদন টাইপ করতে বলা হয়েছে। যার অভিজ্ঞতা বেশি, সে পুরো প্রতিবেদনটাই দু ঘণ্টায় টাইপ করে ফেলতে পারে ; আর, অন্য জনের লাগে তিন ঘণ্টা। তারা প্রতিবেদনটাকে যদি এমনভাবে ভাগ করে নেয় যাতে সেটা সম্ভাব্য সবচেয়ে কম সময়ের মধ্যে সম্পূর্ণ করা যায়, তাহলে সেটা পুরোপুরি টাইপ করতে তাদের কতক্ষণ লাগবে ?

এ ধরনের সমস্যাগুলিকে সাধারণত এই ভাবে সমাধান করা হয় : প্রত্যেকে এক ঘণ্টায় কাজটার কতটা অংশ করছে, সেটা বের করে নিচ্ছি ; দুই অংশ যোগ করে, 1-কে যোগফলটা দিয়ে ভাগ করছি। এ ধরনের সমস্যা সমাধানের জন্যে নতুন কোনো পদ্ধতি কি আপনি ভেবে বের করতে পারেন ?

33. দুটি কগ-চাকা : আট দাঁতওলা একটি কগ-চাকা বা খাঁজ-কাটা চাকা আরেকটি চব্বিশ দাঁতওলা কগ-চাকার খাঁজে বসানো আছে (19নং চিত্র)। বড়ো চাকাটিকে এক পাক ঘুরে আসতে গেলে, ছোট চাকাটিকে নিজের অক্ষকে ঘিরে কতবার ঘুরতে হবে ?

অংশটুকুর আয়তন, জানার পর মোট সংখ্যাটা হিসেব করে বের করা কঠিন নয়। বনের মধ্যে গাছের সংখ্যা গোণার জন্যে বনবিজ্ঞানীরা যে-পদ্ধতি প্রয়োগ করেন, শারীরস্থান-বিজ্ঞানীরাও সেই একই পদ্ধতির সাহায্য নেন।

www.pathagar.com



চিত্র 19 : ছোট চাকাটিকে কতোবার ঘুরতে হবে ?

34. বয়স কতো ? : হেঁয়ালি করে কথা বলতে ভালোবাসে এমন একজনকে জিজ্ঞেস করা হল যে তার বয়স কতো। উত্তরটা বেশ মৌলিক :

"আজ থেকে তিন বছর পরে আমার বয়স যা হবে, সেটাকে তিন দিয়ে গুণ করো ; তারপর আজ থেকে তিন বছর আগে আমার যা বয়স ছিল, সেটাকেও তিন দিয়ে গুণ করো ; তারপর প্রথম গুণফলটা থেকে পরের গুণফলটা বিয়োগ করো। তাহলেই আমার বয়স জানতে পারবে।

35. আরেকটি বয়সের ধাঁধা : "ইভানভের বয়স কতো ?" এক বন্ধু আমাকে জিজ্ঞেস করেছিলেন সেদিন।

"ইভানভ ?" বললাম আমি, "আচ্ছা, দেখা যাক। আঠারো বছর আগে তার বয়স ছিল তার ছেলের বয়সের তিন গুণ।"

"কিন্তু এখন তো তার বয়স ছেলের বয়সের দ্বিগুণ মাত্র," বাধা দিয়ে বললেন বন্ধু।

"ঠিক। আর, সেই জন্যেই তাদের দুজনের বয়স বের করাটা কঠিন নয়।"

আচ্ছা, পাঠক বলুন তো ?

36. একটি দ্রব তৈরি করা : পরিমাপের মাত্রা চিহ্নিত একটি গেলাসে (মেজার গ্লাস বা গ্রাজুয়েটেড গ্লাস) কিছুটা হাইড্রোক্লোরিক অ্যাসিড আছে এবং ওই রকম আরেকটি গেলাসে আছে সম-পরিমাণ জল। একটা দ্রব তৈরি করার জন্যে আপনি প্রথম গেলাসটি থেকে 20 গ্রাম অ্যাসিড ঢাললেন দ্বিতীয় গেলাসে। তারপর দ্বিতীয় গেলাসের দ্রবটির দুই-তৃতীয়াংশ ঢেলে দিলেন প্রথম গেলাসটিতে। এবার, দ্বিতীয় গেলাসটিতে যতোটা তরল পদার্থ আছে, তার চার গুণ তরল পদার্থ আছে প্রথম গেলাসটিতে।

প্রথমে কতোটা অ্যাসিড আর কতোটা জল ছিল ?

37. কেনাকাটা : কতকগুলো 1-রুবল নোট আর কতকগুলো 20-কোপেক মুদ্রা মিলিয়ে আমার সঙ্গে ছিল প্রায় 15 রুবল। কেনাকাটা সেরে ফিরে আসার

www.pathagar.com

পরে দেখি, গোড়ায় আমার কাছে যতোগুলো 20-কোপেক মুদ্রা ছিল, এখন ততোগুলো 1-রুবল নোট রয়েছে এবং গোড়ায় যতোগুলো 1-রুবল নোট ছিল, ততোগুলি 20-কোপেক মুদ্রা রয়েছে। সংক্ষেপে বলতে গেলে, যে-পরিমাণ টাকা নিয়ে বেরিয়েছিলাম তার প্রায় এক-তৃতীয়াংশ টাকা নিয়ে ফিরে এসেছি।

আমি খরচ করেছি কতো?

26 থেকে 37 নং প্রশ্নের উত্তর

26. ছেলেটির মা অর্ধেক সুতলি নিয়ে নেবার পর স্বভাবতই $\frac{1}{2}$ থাকল। তার দাদা নেবার পরে থাকল $\frac{1}{4}$; বাবা নেবার পর রইল $\frac{1}{8}$; আর বোন নেবার পরে বাকি রইল $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$। 30 সেণ্টিমিটার যদি $\frac{3}{40}$ হয়, তাহলে গোড়ায় সুতলিটার দৈর্ঘ্য ছিল $30 : \frac{3}{40} = 400$ সে. মি. অথবা 4 মিটার।

27. তিনটি মোজা নিলেই যথেষ্ট কারণ এদের দুটি সব সময়ে একই রঙের হবে। দস্তানার বেলায় ব্যাপারটা এতো সহজ নয় কারণ তাদের মধ্যে যে শুধু রঙেরই পার্থক্য, তা নয়; সেগুলির অর্ধেক ডান হাতের আর বাকি অর্ধেক বাঁ হাতের জন্যে। এক্ষেত্রে আপনাকে অন্ততঃ 21টি দস্তানা নিতে হবে। এর চেয়ে কম যদি নেন, ধরুন 20টা, তাহলে সেগুলির সবই বাঁ হাতের জন্যে হতে পারে (দশটি বাদামী আর দশটি কালো)।

28. মাথার যে-চুলটি আজ সবচেয়ে নবীন, সেটাই সবার শেষে উঠে যাবে। কোনো-একজন মানুষের মাথায় যে 1,50,000 চুল আছে, তার মধ্যে থেকে প্রথম মাসে 3,000 চুল উঠে যাবে; প্রথম দুই মাসে 6,000 এবং প্রথম বছরে $3,000 \times 12 = 36,000$ চুল উঠে যাবে। সুতরাং সর্বশেষ যে-চুলটি গজিয়েছে সেটি উঠে যেতে লাগবে 4 বছরের সামান্য কিছু বেশি সময়। এই ভাবেই আমরা মানুষের চুলের গড় পরমায়ু নির্ণয় করেছি।

29. অনেকেই একটুও না ভেবেই বলে উঠতে পারেন 100। সেটা ভুল কারণ সেক্ষেত্রে মূল মজুরি হবে মাত্র 70 রুবল –100 নয়।

সমস্যাটির এই ভাবে সমাধান করতে হবে। আমরা জানি যে ওভারটাইমের সঙ্গে 100 যোগ করলে মূল মজুরি পাওয়া যাবে। অতএব, 130 রুবলের সঙ্গে যদি 100 যোগ করি, তাহলে আমরা দুটো মূল মজুরি পাচ্ছি। কিন্তু $130 + 100 = 230$। অর্থাৎ, দুটো মূল মজুরি 230 রুবলের সমান। সুতরাং ওভারটাইম বাদ দিয়ে, শুধু মজুরি দাঁড়াচ্ছে 115 রুবল এবং ওভারটাইম 15 রুবল।

যাচাই করা যাক: $115 - 15 = 100$। এবং এটাই হল এই সমস্যাটির মূল কথা।

30 এই সমস্যাটি খুব আগ্রহোদ্দীপক দুটি কারণে। প্রথমত, এ থেকে অনেকে

www.pathagar.com

সহজেই ভেবে বসবেন, যে-দ্রুতিটা আমরা চাচ্ছি সেটা 10 আর 15 কিলোমিটারের মধ্যক ফল—অর্থাৎ ঘণ্টায় 12·5 কি. মি.। এটা যে ভুল, তা আন্দাজ করাটা খুব কঠিন নয়। বাস্তবিক পক্ষে, স্কি-খেলোয়াড় যে-দূরত্বটা অতিক্রম করছে সেটা যদি a কি. মি. হয়, হয় তাহলে ঘণ্টায় 15 কি.মি. করে গেলে তার সেই দূরত্ব পার হবার জন্যে $\frac{a}{15}$ ঘণ্টা লাগবে, ঘণ্টায় 10 কি. মি. করে গেলে লাগবে $\frac{a}{10}$ ঘণ্টা এবং 12·5 কি. মি. করে গেলে লাগবে $\frac{a}{12\frac{1}{2}}$ ঘণ্টা অথবা $\frac{2a}{25}$ ঘণ্টা। এ থেকে, সমীকরণটা দাড়াচ্ছে :

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25}$$

কারণ এই পদগুলির প্রত্যেকটিই 1 ঘণ্টার সমান। প্রত্যেকটিকে a দিয়ে ভাগ করে আমরা পাচ্ছি।

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25}$$

অথবা, এই পাটীগাণিতিক সমীকরণ :

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

এই সমীকরণটি ভুল কারণ :

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$ অর্থাৎ, $\frac{4}{24}$; $\frac{4}{25}$ নয়।

সমস্যাটি আগ্রহোদ্দীপক হবার অন্য কারণটি হল এটা মুখে মুখে সমাধান করা যায়, বিনা সমীকরণেই।

কি ভাবে, তা দেখানো হচ্ছে : স্কি-খেলোয়াড় যদি ঘণ্টায় 15 কি. মি. যায় এবং আরো দু'ঘণ্টা বেশি দৌড়ায় (অর্থাৎ, সে যদি ঘণ্টায় 10 কি. মি. করে যেত, তাহলে তাকে যতোক্ষণ দৌড়াতে হত ততোক্ষণ), তাহলে সে বাড়তি 30 কি. মি. দূরত্ব পার হত। আমরা জানি, এক্ষেত্রে সে এক ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেশি যাচ্ছে। তাহলে তাকে স্কি করে দৌড়াতে হত 30 : 5 = 6 ঘণ্টা। এটাই ঘণ্টায় 15 কি. মি. করে দৌড়াবার কাল নির্ণয় করে দিচ্ছে : 6—2 = 4 ঘণ্টা। এবং এবার আর যে-দূরত্বটা অতিক্রম করা হয়েছে সেটা বের করা কঠিন নয় : 15 × 4 = 60 কি. মি.।

দুপুরে 12টায়—অর্থাৎ পাঁচ ঘণ্টায়—নির্দিষ্ট স্থানে পৌঁছাবার জন্যে তার কতোটা বেগে যেতে হবে, তা বের করা এখন খুবই সহজ : 60 : 5 = 12 কিলোমিটার।

উত্তরটা সঠিক কি-না, তা যাচাই করে দেখাটা মোটেই কঠিন নয়।

www.pathagar.com

31. এই সমস্যাটির নানা ভাবে সমাধান করা যায়—বিনা সমীকরণে এবং বিভিন্ন পদ্ধতিতে।

প্রথম পদ্ধতিটা এই রকম। পাঁচ মিনিটে তরুণ শ্রমিকটি $\frac{1}{4}$ পথ অতিক্রম করে এবং বয়স্ক শ্রমিকটি $\frac{1}{6}$ পথ পার হন—অর্থাৎ, তরুণ শ্রমিকের চেয়ে $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ পথ কম অতিক্রম করেন।

বয়স্ক শ্রমিকটি যেহেতু তরুণ শ্রমিকের চেয়ে $\frac{1}{6}$ পথ এগিয়ে আছেন, সেই হেতু দ্বিতীয় জন প্রথম জনকে ধরে ফেলবে $\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$ পাঁচ মিনিট অন্তর অথবা 10 মিনিট পরে।

আরেকটি পদ্ধতি এর চেয়েও সহজ। কারখানায় যেতে তরুণ শ্রমিকের চেয়ে বয়স্ক শ্রমিকের 10 মিনিট বেশি সময় লাগে। বয়স্কটি যদি 10 মিনিট আগে বাড়ি থেকে বেরোন, তাহলে দুজনেই একই সময়ে কারখানায় ঢুকতেন। বয়স্কটি যদি মাত্র 5 মিনিট আগে বাড়ি থেকে বেরোন, তাহলে তরুণটি কারখানা যাবার পথে মাঝখানে তাঁর নাগাল ধরে ফেলবে—অর্থাৎ 10 মিনিট বাদে যেহেতু পুরো পথটা যেতে তার 20 মিনিট সময় লাগে।

অন্য কতকগুলি গাণিতিক সমাধানও আছে।

32. এই সমস্যাটির সমাধানে একটি অভিনব পদ্ধতি হল এই: একই সময়ে কাজটাকে শেষ করার জন্যে টাইপিস্ট দুজন কি ভাবে সেটা ভাগ করে নেবে, সেটা বের করা যাক (স্পষ্টতই, এটাই সম্ভাব্য সবচেয়ে কম সময়ের মধ্যে কাজটাকে শেষ করার একমাত্র উপায়—অবশ্যই যদি তারা কুড়েমি করে সময় নষ্ট না করে) বেশি অভিজ্ঞ টাইপিস্ট যেহেতু অপর জনের চেয়ে $1\frac{1}{2}$ গুণ দ্রুত হারে কাজ করতে পারে, সেই হেতু এটা স্পষ্ট যে তার অংশ হবে $1\frac{1}{2}$ বেশি। সেক্ষেত্রে উভয়েই একই সঙ্গে কাজটা শেষ করবে। সুতরাং প্রথম জন নেবে প্রতিবেদনটির $\frac{3}{5}$ এবং দ্বিতীয় জন নেবে $\frac{2}{5}$।

সাধারণ ভাবে বলতে গেলে, এতেই সমস্যাটির সমাধান ঘটেছে। এখন শুধু বের করা যেতে পারে যে, প্রথম টাইপিস্ট তার অংশ সম্পূর্ণ করতে, অর্থাৎ প্রতিবেদনটির $\frac{3}{5}$ টাইপ করতে, কতোক্ষণ সময় নিচ্ছে। আমরা জানি যে সে 2 ঘণ্টায় পুরো কাজটা সেরে ফেলতে পারে। অতএব, $\frac{3}{5}$ সারা হবে $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ ঘণ্টায়। অন্য টাইপিস্ট মেয়েটিও তার অংশ অবশ্যই ওই সময়ের মধ্যেই শেষ করবে।

সুতরাং এরা দুজনে যে হ্রস্বতম সময়ে কাজটা শেষ করবে, তা হল 1 ঘণ্টা 12 মিনিট।

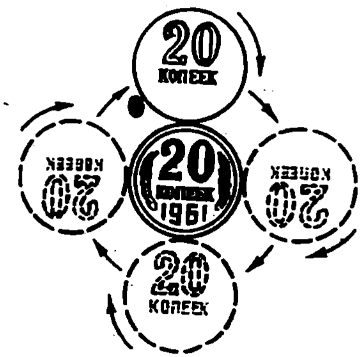
আরেকটি সমাধানও আছে। ছয় ঘণ্টায় প্রথম মেয়েটি প্রতিবেদনটিকে তিন বার টাইপ করতে পারে এবং দ্বিতীয় মেয়েটি পারে দু বার (অর্থাৎ ছয় ঘণ্টায়

www.pathagar.com

তারা প্রতিবেদনটিতে যতোগুলি পৃষ্ঠা আছে তার পাঁচ গুণ পৃষ্ঠা টাইপ করতে পারে)। তাহলে প্রতিবেদনটিকে টাইপ করতে তাদের লাগবে ছয় ঘণ্টার এক-পঞ্চমাংশ সময়, অথবা 6 : 5 ঘণ্টা =1 ঘণ্টা 12 মিনিট।

33. ছোট কগ-চাকাটা তিন বার ঘুরবে বলে যদি ভেবে থাকেন, তাহলে আপনার খুব ভুল হবে। চার বার ঘুরবে সেটা।

কেন, সেটা দেখার জন্যে একটা কাগজ নিন আর তার উপরে রাখুন দুটি সমান আকারের গোল মুদ্রা—দুটি 20-কোপেক মুদ্রা (কিংবা এক্ষেত্রে দুটি 25-নয়াপয়সার মুদ্রা) হলেই চলবে। তারপর নিচের মুদ্রাটিকে চেপে ধরে উপরের মুদ্রাটিকে সেটার চারিধারে ঘোরান। দেখে বিস্মিত হবেন যে, উপরের মুদ্রাটা যখন নিচের মুদ্রাটির তলায় এসে পৌঁছাচ্ছে, ততোক্ষণে সেটা পুরো এক পাক খেয়ে



চিত্র 20

স্থির মুদ্রাটিকে ঘিরে অন্য মুদ্রাটি ঘুরপাক খাবার সময়ে সেটা—একবার নয়—দুবার ঘুরছে

গেছে নিজের অক্ষকে ঘিরে। এটা দেখা যাবে মুদ্রাটির ওপরে ছাপানো সেটার মূল্য-সংখ্যার অবস্থান থেকেই সেটা দেখা যাবে। সেটা যখন নিচের মুদ্রাটিকে ঘিরে পুরো একটা পাক খেয়েছে, তখন সেটা নিজের অক্ষকে ঘিরে পাক খেয়েছে দুবার।

সাধারণ ভাবে বলতে গেলে, কোনো বস্তু যখন কোনো বৃত্তকে ঘিরে ঘোরে, তখন সেটা সব সময়ে যতোটা গোণা যায় তার চেয়ে একপাক বেশি ঘোরে। ঠিক এটা থেকেই এই ঘটনাটার ব্যাখ্যা পাওয়া যায় যে, সূর্যকে আবর্তন করার সময়ে পৃথিবী নিজের অক্ষকে ঘিরে শেষ ঘূর্ণনটা সম্পূর্ণ করে $365\frac{1}{4}$ দিনে নয়, $366\frac{1}{4}$ দিনে—যদি তার ঘূর্ণন সূর্যের সম্বন্ধপাতে নেয়, তারকাদের সম্বন্ধপাতে গোণা

www.pathagar.com

যায়। এবার আপনি বুঝবেন যে সৌর দিনগুলির চেয়ে নক্ষত্র দিনগুলি কেন ছোট হয়।

34. পাটিগণিতের হিসেবে এই সমস্যাটির সমাধান বেশ একটু জটিল। কিন্তু বীজগণিতের সাহায্য নিয়ে একটা সমীকরণ তৈরি করলে সেটা সহজ হয়ে দাঁড়াবে। ধরা যাক, ছেলেটির বয়স x। এখন থেকে তিন বছর পরে তার বয়েস হবে $x+3$ এবং তিন বছর আগে তার বয়স ছিল $x-3$। তাহলে আমরা এই সমীকরণটি পাচ্ছি:

$$3(x+3)-3(x-3)=x$$

এটা সমাধান করে আমরা পাচ্ছি $x=18$। হেঁয়ালি করে কথা বলতে যে ভালবাসে, সেই ছেলেটির বয়স 18 বছর।

মিলিয়ে নেওয়া যাক: আজ থেকে তিন বছর বাদে তার বয়স হবে 21; তিন বছর আগে তার বয়স ছিল 15। অন্তরটা দাঁড়াচ্ছে:

$$(3\times 21)-(3\times 15)=63-45=18$$

35. পূর্ববর্তী সমস্যাটির মতোই, এটাও সরল সমীকরণের দ্বারা সমাধান করা হচ্ছে: ছেলে যদি হয় x বছর বয়সী, তাহলে বাবার বয়স $2x$ বছর। 18 বছর আগে তাদের দুজনেরই বয়স ছিল 18 বছর কম: বাবার বয়স ছিল $2x-18$ বছর, আর ছেলের বয়স ছিল $x-18$ বছর। আমরা জানি যে তখন বাবার বয়েস ছিল ছেলের বয়সের তিন গুণ। অর্থাৎ,

$$3(x-18)=2x-18$$

এই সমীকরণটির সমাধান করে আমরা পাচ্ছি $x=36$। তাহলে ছেলের বয়স 36 বছর আর বাবার বয়স 72।

36. ধরা যাক, প্রথম মেজার গ্লাসটিতে ছিল x গ্রাম হাইড্রোক্লোরিক অ্যাসিড এবং দ্বিতীয় মেজার গ্লাসটিতেও x গ্রাম জল ছিল। প্রথম বার ঢালাঢালি করার পর প্রথম গেলাসে থাকল $(x-20)$ গ্রাম অ্যাসিড এবং দ্বিতীয় গেলাসে রইল $(x+20)$ গ্রাম জল ও অ্যাসিডের মিশ্রণ। দ্বিতীয় বার ঢালাঢালি করার পরে দ্বিতীয় গেলাসটিতে থাকছে $\frac{2}{3}(x+20)$ গ্রাম তরল পদার্থ এবং প্রথম গেলাসটিতে তরল পদার্থের পরিমাণ দাঁড়াচ্ছে:

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3}$$

যেহেতু এটা জানা আছে যে, সব শেষে দ্বিতীয় গেলাসে যা ছিল তার চেয়ে চতুর্গুণ বেশি তরল পদার্থ ছিল প্রথম গেলাসটিতে, সেইহেতু আমরা পেলাম:

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3}$$

www.pathagar.com

সুতরাং $x = 100$। অর্থাৎ, প্রত্যেকটি গেলাসেই 100 গ্রাম তরল পদার্থ ছিল।

37. ধরে নেওয়া যাক, গোড়ায় আমার কাছে ছিল x সংখ্যক রুবল আর y সংখ্যক 20-কোপেক মুদ্রা। কেনাকাটা করতে বেরুবার সময়ে আমার কাছে ছিল $(100x+20y)$ কোপেক। যখন ফিরলাম, তখন আমার কাছে আছে $(100y+20x)$ কোপেক।

এই শেষের পরিমাণটা, আমরা জানি, গোড়ায় যা ছিল তার এক-তৃতীয়াংশ। অতএব,

$$3(100y+20x) = 100x+20y$$

এটাকে সরল করে আমরা পাচ্ছি: $x = 7y$

y যদি 1 হয়, তাহলে x হবে 7। সেটাই যদি ধরে নিই, তাহলে আমার কেনাকাটা করতে বেরুবার সময়ে কাছে ছিল 7 রুবল 20 কোপেক। এটা ভুল। কারণ, বলে নেওয়া হয়েছে যে আমার কাছে ছিল মোট "প্রায় 15 রুবল।"

y-কে 2 ধরলে কি দাঁড়ায় দেখা যাক: তাহলে $x = 14$। গোড়ায় অর্থের পরিমাণটা ছিল 14 রুবল 40 কোপেক—যেটা সমস্যাটির শর্তগুলির সঙ্গে মিলছে।

যদি $y = 3$ ধরে নিই, তাহলে অর্থের পরিমাণটা হয়ে দাঁড়াবে বড়ো বেশি—21 রুবল 60 কোপেক।

অতএব, একমাত্র উপযোগী উত্তর হল 14 রুবল 40 কোপেক। কেনাকাটার পর আমার কাছে ছিল দুটি 1-রুবল নোট আর 14টি কুড়ি-কোপেক মুদ্রা, অর্থাৎ, $200+280 = 480$ কোপেক। এটা বাস্তবিকই গোড়ায় যা ছিল তার এক-তৃতীয়াংশ $(1,440 : 3 = 480)$।

অতএব, আমি যেসব জিনিস কিনেছি, তার দাম $1,440-480 = 960$, অর্থাৎ, 9 রুবল 60 কোপেক।

www.pathagar.com

।। অধ্যায় চার ।।

গোণাগুণি

38 গ্ণতে জানেন কি : তিন বছরের বেশি যার বয়স, এমন যে-কেউ এ প্রশ্ন শ্নে বোধহয় অপমানিত বোধ করবে। বাস্তবিক পক্ষে, 1,2,3,4···ইত্যাদি আওড়াতে কোনো দক্ষতারই দরকার হয় না। কিন্তু তব্, কখনও কখনও গোণাগ্ণি জিনিসটা যে আপনার কাছে' বেশ একটু জটিল বলে মনে হয়, সে বিষয়ে আমি নিশ্চিত। ব্যাপারটা অবশ্যই নির্ভর করে আপনাকে কি গ্ণতে হবে, তারই উপরে। যেমন, একটা বাক্সে ক'টা পেরেক আছে তা গোণা কঠিন নয়। কিন্তু, মনে কর্ন, পেরেক ছাড়াও বাক্সটাতে কিছ্ স্ক্রু আছে, এবং আপনাকে বলা হল—এই দ্টোর প্রত্যেকটায় কতোগ্লো করে আছে, তা বলতে হবে। এক্ষেত্রে আপনি কি করবেন ? পেরেক আর স্ক্রু আলাদা করে নিয়ে, তারপরে প্রত্যেকটা গ্ণবেন তো ?

মেয়েরা যখন ধোলাই-যন্ত্রে জামা-কাপড় সাফ করার জন্যে নিয়ে যান, তখন তাঁদের প্রায়ই এই ব্যাপারটার ম্খোম্খি হতে হয়। শার্ট, তোয়ালে, বালিশের ওয়াড় ইত্যাদি সব কিছ্ আলাদা ভাবে জড়ো করে প্রত্যেকটা স্ত্প গ্ণতে হয়। ব্যাপারটা ক্লান্তিকর।

আপনি যদি এই ভাবেই জিনিসপত্র গোণেন, তাহলে, কিভাবে গ্ণতে হয় তা আপনি জানেন না। এই পদ্ধতিটা অস্ববিধাজনক, বিরক্তিকর আর কোনো কোনো ক্ষেত্রে বাস্তবে সাধ্য নয়। স্ক্রু-পেরেক বা পোশাক-আশাক গোণার কাজটা তব্ অতোটা বিরক্তিকর না হতে পারে কারণ সেগ্লি সহজে আলাদা-আলদা করে নেওয়া যায়। কিন্তু মনে কর্ন, আপনি একজন বনরক্ষী : আপনাকে জিজ্ঞেস করা হল বনের প্রতি হেকটার* এলাকায় কতোগ্লো পাইন, ফার, বার্চ আর অ্যাস্পেন গাছ আছে। এখন, এক্ষেত্রে এদের বাছাই করা এবং জাত অন্সারে তাদের এক-একটি গ্রুপে শ্রেণীবদ্ধ করা অসম্ভব। কি করবেন আপনি—পাইন, বার্চ, ফার আর অ্যাস্পেন গাছগ্লো আলাদা-আলাদা গ্ণবেন ? সেটা করতে গেলে আপনাকে গোটা বন জ্ড়ে চারবার হেঁটে বেড়াতে হবে।

এটা করার একটা সহজতর উপায় আছে—এবং **একবারেই সেটা করা যেতে পারে।** পেরেক আর স্ক্রু নিয়ে দেখাব যে সেটা কি ভাবে করা যায় !

বাক্সের মধ্যে রাখা স্ক্রু আর পেরেকগ্লোকে বাছাই না করেই গোণার জন্যে

---

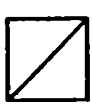
* 1 হেকটার = প্রায় $2\frac{1}{2}$ একর বা $7\frac{1}{2}$ বিঘা

www.pathagar.com

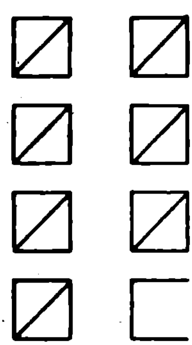
আপনার সবার আগে চাই একটা পেন্সিল আর এই ভাবে লাইন কাটা একটা কাগজ :

পেরেক	স্ক্রু

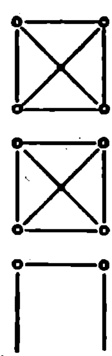
তারপর গুণতে শুরু করুন ; একটা ক'রে জিনিস বাক্স থেকে বের করে নিতে থাকুন ; সেটা যদি পেরেক হয়, তাহলে পেরেকের ঘরে একটা দাগ দিন। স্ক্রু-বেলাতেও তাই করুন এবং বাক্সটা খালি না হওয়া পর্যন্ত এই রকম করতে থাকুন। শেষ পর্যন্ত, বাক্সে যতোগুলো পেরেক ছিল, পেরেকের ঘরে ঠিক ততোগুলো দাগ পড়বে। স্ক্রু বেলাতেও তাই। এরপর আপনাকে শুধু ওই দাগগুলো যোগ করতে হবে।



চিত্র 21 : পাঁচটা করে দাগ টানতে হবে



চিত্র 22 : চতুর্ভুজ দিয়ে কিভাবে গুণতে হয়



চিত্র 23 : প্রতিটি চতুর্ভুজ 10 সংখ্যাটি বোঝাচ্ছে

www.pathagar.com

ওই দাগগুলো যোগ করা কাজটিও সহজ এবং দ্রুত করে তোলা যেতে পারে যদি ছোট ছোট সমচতুর্ভুজের আকারে দাগ কাটেন (21নং চিত্র) - যাতে প্রত্যেকটি সমচতুর্ভুজের চারটি বাহু আর কর্ণ 5 সংখ্যাটিকে বোঝাবে।

এ ধরনের সমচতুর্ভুজ জোড়ায় জোড়ায় বসানোই সবচেয়ে সুবিধাজনক। অর্থাৎ, প্রথম দশটি দাগ কাটার পর (অথবা, পাশাপাশি দুটি সমচতুর্ভুজ আঁকার পর) একাদশ দাগটি তার নিচে একটি নতুন সারিতে বসান। দ্বিতীয় সারিতে দুটি সমচতুর্ভুজ আঁকার পরে তৃতীয় সারিতে আসুন ; এবং এই ভাবে চলুক। সেক্ষেত্রে আপনার দেওয়া দাগগুলো দাঁড়াবে 22নং চিত্রে যেমনটি দেখানো হয়েছে।

এগুলি গোণা খুব সহজ। কারণ, আপনি সরাসরি দেখতে পাচ্ছেন যে প্রত্যেকটি 10-দাগের তিনটি সারি, একটি 5-দাগের সমচতুর্ভুজ এবং 3-দাগের একটি অসম্পূর্ণ চিত্র রয়েছে। অর্থাৎ, 30+5+3=38

অন্য ধরনের চিত্রও আপনি ব্যবহার করতে পারেন। যেমন চারটি কোণ, চারটি বাহু আর দুটি কর্ণ সমেত একটি পূর্ণ চতুর্ভুজ প্রায়ই ব্যবহার করা হয় 10 সংখ্যাটি বোঝাবার জন্যে (23নং চিত্র)।

বিভিন্ন জাতের গাছ গুণবার জন্যে আপনি একই নিয়ম অনুসরণ করবেন —শুধু, এক্ষেত্রে, আপনাকে দুটি সারির বদলে, ধরুন, চারটি সারি নিতে হবে। খাড়াখাড়ি সারির বদলে পাশাপাশি সারি আঁকাটাও বেশি সুবিধাজনক হবে। 24নং চিত্রটাকে একটা উদাহরণ হিসেবে ধরুন।

25নং চিত্রে দেখা যাচ্ছে—এই ফরমটা ভর্তি করার পর কেমন দেখাবে।

এর পর প্রতিটি সারির মোট সংখ্যা বের করা খুব সহজ :

পাইন······ 53

ফার··· ··· 79

বার্চ··· ··· 46

অ্যাসপেন···37

মেয়েরা তাদের কাপড়চোপড় ধোলাই করতে নিয়ে যাবার আগে এই ভাবে শ্রেণীবদ্ধ করার পদ্ধতি গ্রহণ করে প্রচুর সময় আর শ্রম বাঁচাতে পারেন।

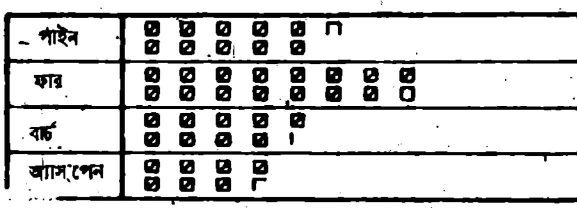
এবার আপনি জানেন —একখণ্ড জমির উপরে বিভিন্ন গুল্ম কি ভাবে গুণতে হবে। পরপর গুল্মগুলির নাম লিখে বিভিন্ন সারি এঁকে একটা ফরম তৈরি করুন। দু-একটি সারি খালি রাখতে পারেন—অন্য কোনো গুল্ম যদি আপনার চোখে পড়ে তাহলে সেগুলির নাম বসাবার জন্যে। তারপর গোণা শুরু করুন। 26নং চিত্রে একটি নমুনা ফরম দেওয়া হল।

তারপর বনের গাছ গোণার সময়ে যেভাবে এগিয়েছিলেন, ঠিক সেই ভাবেই অগ্রসর হোন।

www.pathagar.com

পাইন	
ফার	
বার্চ	
অ্যাস্পেন	

চিত্র 24 ঃ গাছ গোনার ফরম



চিত্র 25 ঃ ভর্তি করার পরে ফরমটাকে যেমন দেখাবে

ড্যান্ডেলিয়ন	
বাটারকাপ	
প্লেনটেন	
ইস্টারবেল	
শেফার্ডস্ পার্স	

চিত্র 26 ঃ ফুলগাছগুলো কিভাবে গুণতে হবে

www.pathagar.com

39. বনের মধ্যে গাছের সংখ্যা গোণা হয় কেন ? : সত্যিই তো, কেন ? সাধারণত শহরবাসীরা ভাবে, সেটা বাস্তবে সাধ্য নয়। লিও তলস্তয়ের "আনা কারেনিনা" উপন্যাসে, লেভিন আর ওব্‌লোন্‌স্কি-র মধ্যে একটা সংলাপ আছে। লেভিনকে মোটামুটি চাষীই বলা যেতে পারে আর ওব্‌লোন্‌স্কি তার একটা বন বিক্রি করে দিতে চলেছে।

লেভিন জিজ্ঞেস করছে ওব্‌লোন্‌স্কি-কে, "গাছগুলো গুণেছো ?"

"সে কী ! আমার গাছগুলো গুণে দেখব ?" অবাক হয়ে ওব্‌লোন্‌স্কি বলে, "সমুদ্রতীরে বালি গোণো, গ্রহগুলোর রশ্মি গুণে দ্যাখো—যদিও কোনো একজন মহাপ্রতিভাবান হয়তো…"

লেভিন তার কথায় বাধা দিয়ে বলেছে, "তা দ্যাখো, আমি তোমাকে বলতে পারি, রিয়াবিনিন-এর মহা প্রতিভা একাজে সফল হয়েছিল। কোনো ব্যবসাদার গুণতি না করে কখনও কিছু কেনে না।"

লোকে বনে গাছের সংখ্যা গোণে কতো বর্গ-মিটার কাঠ সেখানে আছে তা জানার জন্যে। সেটা করতে গিয়ে তারা সমস্ত গাছ গোণে না। গোণে শুধু একটা অংশ মাত্র, ধরা যাক, সিকি-হেক্টার কিংবা আধ-হেক্টার জায়গায় গাছের সংখ্যা। সেটা করার জন্যে ভালো ভাবে দেখে জেনে গাছ-গাছালির গড় ঘনত্ব আর তাদের গড় আয়তন সমেত একটা জায়গা বেছে নেয় তারা। এর জন্যে অবশ্যই অভিজ্ঞ চোখ থাকা চাই। প্রত্যেকটি জাতের কতোগুলো করে গাছ সেখানে আছে, শুধু তা জানাটাই যথেষ্ট নয়। তাদের গুঁড়ি কতোটা মোটা, তাও জানা দরকার : কতোগুলো 25 সে. মি., 30 সে. মি, 35 সে. মি. মোটা ইত্যাদি। তাহলে, আমাদের সরলীকৃত ফরমটায় আমরা যতোগুলো সারি টেনেছি, তার চেয়ে হয়তো বেশি সারি টানতে হবে সেক্ষেত্রে। এখানে আমরা যে পদ্ধতিটা ব্যাখ্যা করলাম, সেই পদ্ধতিতে না করে যদি সাধারণ পদ্ধতিতে গাছগুলো গুণতে লাগতাম, তাহলে বনের মধ্যে যে কতোবার আমাদের ঘোরাঘুরি করতে হত, তা সহজেই কল্পনা করতে পারবেন।

দেখতেই পাচ্ছেন, একই রকমের জিনিস যখন আনশাকে গুণতে হচ্ছে, তখন গোণার কাজটা সহজ সরল। তা না হলে, যে-পদ্ধতিটা এইমাত্র দেখালাম, সেই পদ্ধতিটাই আমাদের প্রয়োগ করতে হবে—এবং এ রকম একটা পদ্ধতি যে আছে, সে সম্বন্ধে অনেকেরই কোনো ধারণা নেই।

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় পাঁচ ॥

হোঁচট খাওয়ানো সংখ্যা

40 পাঁচ রুবলের বদলে একশো রুবল : মঞ্চের ওপর থেকে একজন যাদুকর একবার তাঁর দর্শকদের কাছে এই আকর্ষণীয় প্রস্তাবটি রাখলেন :

"আপনাদের যে কেউ 50-কোপেক, 20-কোপেক আর 5-কোপেক মুদ্রা মিলিয়ে মোট 20টি মুদ্রায় 5 রুবল আমাকে দিলেই আমি তাঁকে 100 রুবল দেব। পাঁচের বদলে একশো ! কেউ নেবেন ?"

প্রেক্ষাগৃহ নিস্তব্ধ। কিছু লোক কাগজ পেন্সিল বাগিয়ে বসল, স্পষ্টতই তারা হিসেব করতে লেগে গেছে যে তাদের সম্ভাবনা কতোখানি। কিন্তু কেউই যেন যাদুকরের কথাটা আক্ষরিক অর্থে নিতে ইচ্ছুক নয়।

"দেখতে পাচ্ছি, 100 রুবল পাবার জন্যে 5 রুবল দেওয়াটা আপনাদের কাছে বড়ো বেশি মনে হচ্ছে," বলে চলেছেন যাদুকর, "ঠিক আছে। আমি 20টি মুদ্রায় 3 রুবল নিয়ে, তার বদলে 100 রুবল দিতে প্রস্তুত। সারি দিয়ে দাঁড়ান !"

কিন্তু কেউই আর সারি দিয়ে দাঁড়াতে চায় না। দর্শকরা এই চট্-জল্দি অর্থোপার্জনের সুযোগ নিতে যেন নিরুৎসাহ বোধ করছে।

"কি হল ? এমন কি 3 রুবলও বড়ো বেশি মনে হচ্ছে আপনাদের। তা, আমি আরও এক রুবল কমিয়ে দিচ্ছি না হয়—2 রুবল, 20টি মুদ্রায়। এবার ?"

এর পরও কেউ এগিয়ে আসছে না। যাদুকর বলেই চলেছেন, "বোধহয় খুচরো নেই আপনাদের কাছে ? ঠিক আছে। আমি আপনাদের বিশ্বাস করছি। শুধু এক টুকরো কাগজে লিখে দিন প্রতিটি মূল্যমানের কতোগুলো করে মুদ্রা আমাকে দেবেন।"

41. এক হাজার : একই অংক আটবার ব্যবহার করে 1,000 লিখতে পারেন কি ?

সেটা করার সময়ে আপনি, অংকগুলো ছাড়াও যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগের চিহ্নগুলিও ব্যবহার করতে পারেন।

42. চব্বিশ : তিনটি 8 ব্যবহার করে 24 লেখা খুব সহজ : 8 + 8 + 8। তিনটি অন্য অনুরূপ অংক ব্যবহার করে আপনি সেটা করতে পারেন কি ? এই সমস্যাটির একাধিক সমাধান আছে।

www.pathagar.com

43. ত্রিশ : 30 সংখ্যাটি সহজেই তিনটি 5 ব্যবহার করে লেখা যায় : $5 \times 5 + 5$। অন্য কোনো একই অংক তিনবার ব্যবহার করে এটা করা অপেক্ষাকৃত কঠিন।

চেষ্টা করে দেখুন। গোটা কতক সমাধান বের করতে পারবেন।

44. যে অংকগুলির ঘর ফাঁকা রয়েছে : নিচের গুণটিতে অর্ধেকেরও বেশি অংকের ঘরে তারকা (*) চিহ্ন দেওয়া আছে :

```
        *  1  *
        3  *  2
      ---------
        *  3  *
  3  *  2  *
*  2  *  5
---------------
1  *  8  *  3  0
```

তারকা চিহ্নিত ঘরগুলিতে আপনি নির্দিষ্ট অংকগুলি বসাতে পারেন কি ?

45. অংকগুলি কি ? : আরেকটি একই ধরনের সমস্যা। নিচের এই গুণটিতে তারকা চিহ্নগুলির স্থানে নির্দিষ্ট অংকগুলি বসাতে হবে :

```
         *  *  5
         1  *  *
      ----------
      2  *  *  5
   1  3  *  0
   *  *  *
   -------------
   4  *  7  7  *
```

46. ভাগ : নিচের ভাগটিতে তারকা চিহ্নগুলি নির্দিষ্ট অংক দিয়ে পূরণ করুন :

```
325 | *  2  *  5  *  |  1  *  *
      *  *  *
      -----------
      *  0  *  *
      *  9  *  *
      --------------
            *  5  *
            *  5  *
      --------------
```

47. 11 দিয়ে ভাগ করা : কোনো অংকের পুনরাবৃত্তি না করে নয়টি অংক দিয়ে এমন একটি সংখ্যা লিখুন যেটাকে 11 দিয়ে ভাগ করা যায়।

এইরকম সংখ্যাগুলির মধ্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দুটি লিখুন।

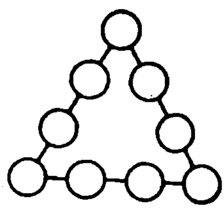
www.pathagar.com

48. মজার গুণ : নিচের এই উদাহরণটি খুঁটিয়ে লক্ষ্য করুন :

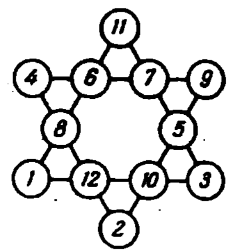
48×159=7632

আগ্রহ জাগাবার মতো ব্যাপারটা হল এই যে, নয়টি অংকের প্রত্যেকটাই ভিন্ন। এইরকম অন্য কতকগুলি উদাহরণ আপনি দিতে পারেন কি ? এইরকম আরও কিছু গুণ যদি থাকে, কতোগুলো আছে ?

49. সংখ্যার ত্রিভুজ : এই ত্রিভুজটির (27নং চিত্র) বৃত্তগুলির মধ্যে এমন ভাবে নয়টি অঙ্ক বসান (কোনো অংকের পুনরাবৃত্তি না করে) যাতে প্রত্যেকটি ভুজের যোগফল দাঁড়াবে 20 ।



চিত্র 27 বৃত্তের মধ্যে অঙ্কগুলি লিখুন



চিত্র 28 : যাদু তারকা

50. আরেকটি সংখ্যার ত্রিভুজ : ওই একই ত্রিভুজের (27নং চিত্র) বৃত্তগুলির মধ্যে, কোনো অংকের পুনরাবৃত্তি না করে, এমন ভাবে নয়টি অঙ্ক বসান যাতে এবারে প্রত্যেকটি ভুজের যোগফল দাঁড়াবে 17 ।

51. যাদু তারকা : ছয়-কোণ এই সংখ্যা তারকাটিকে (28নং চিত্র) বলা হয় "যাদু তারা"—প্রত্যেকটি সারির যোগফল একই :

$$4+6+7+9=26$$
$$4+8+12+2=26$$
$$9+5+10+2=26$$
$$11+6+8+1=26$$
$$11+7+5+3=26$$
$$1+12+10+3=26$$

কোণগুলিতে সংখ্যার যোগফল অবশ্য ভিন্ন :

$$4+11+9+3+2+1=30$$

আপনি কি বৃত্তগুলির মধ্যে এমন ভাবে সংখ্যাগুলিকে সাজিয়ে এই তারাটিকে নিখুঁত করে তুলতে পারেন, যাতে প্রত্যেকটি সারির এবং কোণগুলির যোগফল দাঁড়াবে 26 ?

www.pathagar.com

40 থেকে 51নং প্রশ্নের উত্তর :

40. তিনটি সমস্যারই সমাধান অসম্ভব। এগুলির সমাধানের জন্যে যাদুকর যেকোনো পরিমাণ অর্থ পুরস্কার হিসেবে ঘোষণা করতে পারতেন। সেটা প্রমাণ করার জন্যে বীজগণিতের সাহায্য নেওয়া যাক এবং তিনটিরই বিশ্লেষণ করা যাক :

পাঁচ রুবল দিতে হলে : মনে করা যাক এটা সম্ভব এবং এর জন্যে দরকার x সংখ্যক 50-কোপেক মুদ্রা, y সংখ্যক 20-কোপেক মুদ্রা এবং z সংখ্যক 5-কোপেক মুদ্রা। তাহলে আমরা এই সমীকরণটি পাচ্ছি :

$$50x+20y+5z=500 \text{ কোপেক (অথবা 5 রুবল)}$$

এটা 5 দিয়ে ভাগ করে আমরা পাচ্ছি :

$$10x+4y+z=100$$

তাছাড়াও, সমস্যাটির শর্ত অনুসারে, মুদ্রাগুলির মোট সংখ্যা হল 20 ; অতএব, আমাদের হাতে আরেকটি সমীকরণও আছে :

$$x+y+z=20$$

প্রথম সমীকরণটি থেকে দ্বিতীয়টি বাদ দিয়ে পাচ্ছি :

$$9x+3y=80$$

এটাকে 3 দিয়ে ভাগ করলে দাঁড়ায় :

$$3x+y=26\tfrac{2}{3}$$

কিন্তু $3x$, অর্থাৎ, 50-কোপেক মুদ্রার সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফলটা অবশ্যই হবে একটি পূর্ণ সংখ্যা। y, অর্থাৎ, 20-কোপেক মুদ্রার সংখ্যাও, তাই হবে। এই দুটি পূর্ণ সংখ্যার যোগফল কখনও ভগ্নাংক হতে পারে না। সুতরাং, সমস্যাটির সমাধান করা যেতে পারে বলে ধরে নেওয়াটা নিবুদ্ধিতা মাত্র। এটি সমাধানের অসাধ্য।

একই ভাবে পাঠক এ বিষয়ে নিঃসন্দেহ হতে পারেন যে "হ্রাস-মূল্যের" সমস্যাগুলিও একই রকম সমাধানের অতীত। প্রথম ক্ষেত্রে (3 রুবল) আমরা এই সমীকরণটি পাব :

$$3x+y=13\tfrac{1}{3}$$

আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে (2 রুবল) :

$$3x+y=3\tfrac{2}{3}$$

দেখতেই পাচ্ছেন, দুটোই ভগ্নাংক।

সুতরাং এই সমস্যাগুলির সমাধানের জন্যে মোটা টাকার পুরস্কার ঘোষণা করে যাদুকর বিন্দুমাত্র ঝুঁকি নেননি। এর জন্যে তাঁকে কখনোই কোনো মূল্য দিতে হবে না!

www.pathagar.com

ব্যাপারটা অন্য রকম দাঁড়াত যদি কাউকে 20টি মুদ্রায়—5, 3 বা 2 রুবল নয়—4 রুবল দিতে হত। সেক্ষেত্রে সমস্যাটির সমাধান করা সহজ হত এবং ভিন্ন ভিন্ন সাত রকমে সেটা করা যেত।*

41. $888+88+8+8+8=1{,}000$
অন্য কতকগুলি সমাধানও আছে।

42. দুটি সমাধান হল এই :
$22+2=24$; $3^3-3=24$

43. তিনটি সমাধান এখানে দেওয়া যাচ্ছে :
$6\times6-6=30$; $3^3+3=30$; $33-3=30$

44. নিচের এই পদ্ধতিটি ব্যবহার করে অনুপস্থিত অংকগুলি ক্রমে ক্রমে পুনরুদ্ধার করা হয়েছে।

সুবিধার জন্যে, প্রত্যেকটি লাইনের নম্বর দিয়ে নেওয়া যাক :

```
            *  1  *    ...I
            3  *  2    ...II
           ---------
            *  3  *    ...III
      3  *  2  *       ...IV
   *  2  *  5          ...V
 ---------------
 1  *  8  *  30        ...VI
```

আন্দাজ করা সহজ যে III লাইনের শেষ অংকটি 0 ; VI লাইনের শেষে যে 0 আছে, তা থেকেই এটা স্পষ্ট।

এর পর আমরা লাইন I-এর শেষ *টির অর্থ নির্দেশ করতে পারি : এটা এমন একটা অংক যেটাকে 2 দিয়ে গুণ করলে যে-সংখ্যা পাওয়া যাবে সেটার শেষে 0 আসছে এবং 3 দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত সংখ্যাটির শেষে 5 আসছে (V লাইনের সংখ্যাটি শেষ হচ্ছে 5 দিয়ে)। একটি মাত্র অংক দিয়েই এটা করা যায় : 5।

এটা স্পষ্ট যে IV লাইনের শেষ অংকটি 0 (III লাইনের আর VI লাইনের শেষ অংকটির আগের অংক দুটি তুলনা করুন)।

II লাইনের * চিহ্নটির পিছনে কোন্ অংকটি লুকিয়ে আছে, সেটা আন্দাজ করা কঠিন নয় : 8 ; কারণ, এটাই একমাত্র অংক যাকে 15 দিয়ে গুণ করলে এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যাবে যেটার শেষে থাকবে 20 (লাইন IV)।

সব শেষে, এটা পরিষ্কার যে, I লাইনের প্রথম *টি হল 4 ; কারণ, একমাত্র

---

* সম্ভাব্য সমাধানগুলির মধ্যে একটি এই : ছটি 50-কোপেক মুদ্রা, দুটি 20-কোপেক মুদ্রা আর বারোটি 5-কোপেক মুদ্রা।

www.pathagar.com

4-কেই 8 দিয়ে গুণ করলে এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যায় যেটার প্রথম অংকটি 3 (লাইন $\overline{IV}$)।

এর পর, বাকি অজ্ঞাত অংকগুলি উদ্ধার করা কঠিন হবে না: যে-দুটি গুণনীয়ক আমরা পুরোপুরি নির্ধারণ করতে পেরেছি, সে দুটি গুণ করলেই যথেষ্ট।

শেষ পর্যন্ত, আমরা নিম্নোক্ত এই গুণের উদাহরণটি পাচ্ছি:

```
   415
   382
  ----
   830
  3320
 1245
------
158530
```

45. এই সমস্যাটির সমাধানেও একই পদ্ধতি প্রযোজ্য। এক্ষেত্রে আমরা পাচ্ছি:

```
  325
  147
 ----
 2275
1300
325
-----
47775
```

46. সমস্ত নির্দিষ্ট সংখ্যাগুলিকে ফিরে পেয়ে সমস্যাটির সমাধান দাঁড়াচ্ছে এই:

```
325|52650    |162
   |325      |
    ----
    2015
    1950
    ----
     650
     650
    ----
```

47. এই সমস্যাটির সমাধানের জন্যে আমাদের জানতে হবে 11 দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য সংখ্যার বিশেষ নিয়মটি। কোনো-একটি সংখ্যা নিয়ে, ডান-দিক থেকে গুণে ওই সংখ্যাটির বিজোড় স্থানের অংকগুলি যোগ করুন; তারপর একই ভাবে জোড় স্থানের অংকগুলি যোগ করুন। এই দুটি যোগফলের মধ্যে যেটি বৃহত্তর সংখ্যা, সেটা থেকে অন্য সংখ্যাটি বিয়োগ করুন। এই বিয়োগ-

www.pathagar.com

ফলটি যদি 11 দ্বারা ভাজ্য হয়, কিংবা 0 হয়, তাহলে আদি সংখ্যাটি 11 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে।

যেমন, 2,3 6,58,904 সংখ্যাটি চেষ্টা করে দেখা যাক।

ডানদিক থেকে বিজোড় স্থানের অংকগুলির সংখ্যার যোগফল :

4+9+5+3=21

আর, জোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল :

0+8+6+2=16

বৃহত্তর সংখ্যাটি থেকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি বাদ দিয়ে আমরা পাচ্ছি: 21−16=5 —যে-সংখ্যাটিকে 11 দিয়ে ভাগ করা যায় না। তাহলে, প্রথমে যে-সংখ্যাটি ধরা হয়েছে, সেটা 11 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

আরেকটি সংখ্যা নিয়ে চেষ্টা করা যাক। ধরুন, 73,44,535 :

5+5+4+7=21

3+4+3 =10

21−10=11

যেহেতু 11-কে 11 দিয়ে ভাগ করা যায়, সেই হেতু পূর্ণ সংখ্যাটিও 11 দ্বারা বিভাজ্য।

এবারে, 11 দ্বারা বিভাজ্য কোনো সংখ্যা পেতে হলে, নয়টি অংককে আমাদের কি ভাবে বসাতে হবে, সেটা আন্দাজ করা সহজ। একটি উদাহরণ :

35,20,49,786

সংখ্যাটা যাচাই করে দেখা যাক :

6+7+4+2+3=22

8+9+0+5=22

এক্ষেত্রে অন্তর (22−22) দাঁড়াচ্ছে 0। সুতরাং যে-সংখ্যাটি আমরা ধরেছি, সেটি 11 দ্বারা বিভাজ্য।

এগুলির মধ্যে বৃহত্তম সংখ্যাটি হবে :

98,76,5. 413

এবং ক্ষুদ্রতম সংখ্যা। ি হবে :

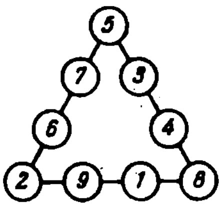
10,23,47,586

48 ধৈর্যশীল পাঠক এ ধরনের নয়টি উদাহরণ বের করতে পারবেন সেগুলি হল এই :

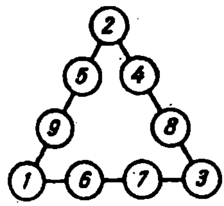
www.pathagar.com

12 × 483 = 5,796	48 × 159 = 7,632
42 × 138 = 5,796	28 × 157 = 4,396
18 × 297 = 5,346	4 × 1,738 = 6,952
27 × 198 = 5,346	4 × 1,963 = 7,852
39 × 186 = 7,254	

49. ও 50 সমাধান দুটি দেখানো হয়েছে 29নং ও 30নং চিত্রে।



চিত্র 29



চিত্র 30

প্রত্যেকটি সারির মাঝখানের দুটি অংক স্থানান্তরিত করে অন্যান্য সমাধান পাওয়া যাবে।

51. সংখ্যাগুলিকে যে কি ভাবে বসানো হয়েছে, তা দেখবার জন্যে নিম্নলিখিত অঙ্গীকারটি থেকে এগুনো যাক :

কোণগুলিতে সংখ্যার যোগফল 26 এবং "যাদু তারা"-টির সমস্ত সংখ্যার যোগফল 78। অতএব, ভিতরের ষড়্ভুজটির সংখ্যাগুলির যোগফল হল :

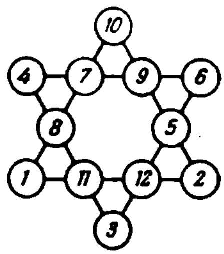
78 − 26 = 52

এর পর বড়ো ত্রিভুজগুলির একটিকে পরীক্ষা করা যাক। এর প্রত্যেকটি ভুজের সংখ্যার যোগফল 26। তিনটি ভুজের সংখ্যা যোগ করে পাচ্ছি : 26 × 3 = 78। কিন্তু এক্ষেত্রে কোণগুলির সংখ্যা প্রত্যেকটি দুবার করে গোণা হবে। যেহেতু, আমরা জানি, তিনটি ভিতরকার জোড়ার (অর্থাৎ, ভিতরকার ষড়্ভুজের) সংখ্যাগুলির যোগফল 52 হতেই হবে, সেই হেতু প্রত্যেকটি ত্রিভুজের কোণগুলির দ্বিগুণিত যোগফল হচ্ছে 78 - 52 = 26, অথবা প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে 13।

আমাদের অনুসন্ধানের ক্ষেত্রটা এবার সংকীর্ণ হয়ে আসছে। যেমন, আমরা জানি, 12 বা 11 কোনোটাই কোণের বৃত্তগুলির মধ্যে বসতে পারে না। তাহলে আমরা 10 দিয়ে চেষ্টা করতে পারি এবং তৎক্ষণাৎ এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে অন্য দুটি অংক নিশ্চয়ই হবে 1 এবং 2।

www.pathagar.com

এবার আমাদের শুধু পূর্বপৃষ্ঠায় সিদ্ধান্ত অনুযায়ী সংখ্যাগুলি বসালেই হল। শেষ পর্যন্ত আমরা যে বিন্যাসটি খুঁজছি, সেটা পেয়ে যাব। 31নং চিত্রে সেটা দেখানো হয়েছে।



চিত্র 31

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় ছয় ॥

রাক্ষুসে সব সংখ্যা

52. একটি লাভজনক চুক্তি : এই ব্যাপারটা কবে বা কোথায় ঘটেছিল, তা আমাদের জানা নেই। বোধহয় কোনোদিনই এরকম কোনো ঘটনা ঘটেনি। এটাই ঢের বেশী সম্ভবপর। কিন্তু সত্যি ঘটনা হোক বা উপকথাই হোক, গল্পটা খুব আগ্রহ জাগাবার মতো এবং শুনতে (বা পড়তে) বেশ ভালোই লাগবে।

1

একজন লাখপতি ধনী অত্যন্ত খুশি মনে বাড়ি ফিরলেন : একজন লোকের সঙ্গে তাঁর দেখা হয়েছে এবং, তিনি বললেন, ওই সাক্ষাৎটির মধ্যে প্রকাণ্ড একটা লাভের প্রতিশ্রুতি রয়েছে।

"কী সৌভাগ্য !" পরিবারের সবাইকে বললেন তিনি, "লোকে যা বলে, তা ঠিক : ধনীরাই সব ব্যাপারে সবচেয়ে ভাগ্যবান। অন্ততঃ আমার বেলায় তো তাই বলেই মনে হচ্ছে। এবং গোটা ব্যাপারটাই ঘটেছে সম্পূর্ণ অপ্রত্যাশিত ভাবে। বাড়ি ফেরার পথে অত্যন্ত সাধারণ চেহারার একজন লোকের সঙ্গে দেখা। বোধহয় লক্ষ্যই করতাম না মানুষটাকে। কিন্তু আমি ধনী লোক শুনে সে আমার কাছে একটা প্রস্তাব করে বসল। আর, ওই প্রস্তাবটা শুনে, সত্যি বলছি, আমার নিঃশ্বাস বন্ধ হয়ে গেল যেন।"

"লোকটা বলল, 'আসুন, দুজনের মধ্যে একটা চুক্তি হোক। এক মাস ধরে প্রত্যেকদিন আমি আপনাকে 1,00,000 রুবল দেব। অবশ্যই, আমিও তার বদলে কিছু চাই, কিন্তু সেটা খুবই সামান্য।' সে বলল, প্রথম দিনে আমায় তাকে দিতে হবে—পরিমাণটা অবিশ্বাস্য রকমের হাস্যকর—মাত্র এক কোপেক। নিজের কানকেই বিশ্বাস করতে পারিনি।"

"মাত্র এক কোপেক ?"—আমি জিজ্ঞেস করলাম তাকে।

"স্রেফ একটি কোপেক', সায় দিল সে, দ্বিতীয় 1,00,000 রুবলের জন্যে আপনাকে 2 কোপেক দিতে হবে।"

'তারপর ?' অধৈর্যভাবে জিজ্ঞেস করলাম আমি, 'তার পরে ?'

"তারপর, তৃতীয় 1,00,000 রুবলের জন্যে আপনি আমাকে দেবেন 4 কোপেক, চতুর্থ বারের জন্যে 8 কোপেক, পঞ্চম বারে 16 কোপেক। আর, এই ভাবে, প্রতিদিন আপনি আমাকে দেবেন আগের দিন যা দিয়েছেন তার দ্বিগুণ।"

www.pathagar.com

"তা, তারপরে কি করতে হবে ?"

"কিছু না। বাস, যা বললাম, তাই। এর বেশি কিছুটি চাইনে আমি।' শুধু, চুক্তিটা আপনাকে অবশ্যই মেনে চলতে হবে। প্রত্যেক দিন আমি এসে আপনাকে এক লক্ষ রুবল দিয়ে যাব এবং প্রতি দিনই আপনি যে-চুক্তিতে রাজি হয়েছেন সেই অনুযায়ী নির্দিষ্ট পরিমাণ আমাকে দেবেন। একমাত্র শর্ত—মাস শেষ হবার আগে আপনি পিছিয়ে যেতে পারবেন না।"

"ভাবো একবার! মাত্র কয়েক কোপেকের বদলে লোকটা আমাকে লক্ষ লক্ষ রুবল দিয়ে দিচ্ছে। লোকটা হয় জাল টাকার কারবারী, আর না-হয় পাগল। সে যাই হোক, চুক্তিটা দারুণ লাভজনক। এ সুযোগ হাতছাড়া করা যায় না।"

"'ঠিক আছে', বললাম আমি, 'টাকাটা আপনি নিয়ে আসুন। আপনি যা চাইছেন, তা আমি দেব আপনাকে। দেখবেন, আমাকে ঠকাবেন না যেন, জাল নোট আনবেন না।"

' "কিছু ভাববেন না,' বলল সে, 'কাল সকালেই আপনি আমার অপেক্ষায় থাকতে পারেন।" '

"এখন, আমার শুধু ভয় হচ্ছে যে, লোকটা আসবে না। বোধহয় সমঝে গেছে যে ভারি বোকার মতো একটা কাজ করে বসেছে। দেখা যাক। আগামী কাল আসতে তো খুব বেশি দেরি নেই।"

2

পরের দিন খুব সকালেই জানালায় ঘা পড়ল। সেই লোকটি।

"আপনার কোপেকটা হাতের কাছেই রেখেছেন তো?" জিজ্ঞেস করল সে, "আপনাকে যে কথা দিয়েছিলাম, সেই মতো টাকাটা আমি এনেছি।"

সত্যিই তাই! ঘরে ঢুকেই সে একটা নোটের বাণ্ডিল বের করে, এক লক্ষ রুবল—সত্যিই একেবারে আসল নোট—গুণে দিয়ে বলল, "চুক্তি মতো, এই টাকাটা নিন। এবার আমার কোপেকটা দিন।"

লাখপতি ভদ্রলোকের তখন বুক দুরু দুরু করছে—পাছে আগন্তুকটি মত বদলে ফেলে তার টাকাটা ফেরত চায়। কোনো রকমে একটি তামার মুদ্রা রাখলেন তিনি টেবিলের উপরে। আগন্তুক মুদ্রাটি নিয়ে, তালুতে রেখে সেটার ওজন দেখে, নিজের মনিব্যাগে পুরলেন।

"কাল ঠিক এই সময়ে আবার আসব। দুই কোপেক হাতের কাছে রাখতে ভুলবেন না যেন।"

ধনী লোকটি তাঁর সৌভাগ্যকে বিশ্বাস করতে পারছেন না: 1,00,000 রুবল একেবারে আসমান ফুঁড়ে এসে পড়ল! টাকাটা গুণে তিনি নিশ্চিন্ত হলেন যে

www.pathagar.com

পুরো টাকাটাই রয়েছে এবং কোনো জাল নোট নেই। তারপর তিনি টাকাটা সিন্দুকে রেখে দিয়ে, পরম সুখে পরের দিনের প্রত্যাশায় রইলেন।

চিত্র 32 : "সেফ এক কোপেক ....."

রাত্রিবেলায় তাঁর দুর্ভাবনা শুরু হল। লোকটা যদি কোনো ছদ্মবেশী ডাকাত-টাকাত হয়, তাহলে? হয়তো লাখপতি এই তিনি তাঁর ধনসম্পদ কোথায় রাখেন তা জেনে নিয়ে, পরে তাঁর যথাসর্বস্ব লুট করার মতলবেই লোকটা এসেছে?

বিছানা ছেড়ে উঠে পড়লেন ধনী লোকটি। আরও মজবুত করে দরজায় খিল লাগালেন, জানালার বাইরে বারবার খুঁটিয়ে লক্ষ্য করলেন। যতোবার কোনো আওয়াজ শোনেন ততোবারই লাফিয়ে ওঠেন এবং বহুক্ষণ ধরে তাঁর চোখে ঘুম এল না। সকাল বেলায় তাঁর জানালায় ঘা পড়ল : সেই লোকটি হাজির। আরও এক লক্ষ রুবল গুণে দিয়ে, প্রতিশ্রুতি অনুযায়ী দুই কোপেক নিয়ে মনিব্যাগে পুরে যাবার সময়ে বলে গেল : "আগামী কাল চার কোপেক হাতের কাছে রাখতে ভুলবেন না যেন।"

www.pathagar.com

ধনী লোকটির সুখ তো ভাষায় প্রকাশ করা যায় না—আরও 1,00,000 রুবল এসে গেল তাঁর পকেটে। এবং এবার আর আগন্তুকটিকে দেখে ডাকাতের মতো মনে হল না। বাস্তবিক পক্ষে, লাখপতিটি আর ভাবলেনই না যে লোকটার চেহারা সন্দেহজনক। সে শুধু তার কয়েকটি কোপেক মাত্র পেতে চায়। কী পাগল বলো দেখিনি! এ-রকম আরো কিছু লোক যদি এই দুনিয়ায় থাকত, তাহলে বুদ্ধিমানরা বরাবর দিব্যি সুখে স্বচ্ছন্দে থাকত···

তৃতীয় দিনেও আগন্তুকটি একবারে কাঁটায় কাঁটায় যথাসময়ে হাজির। লাখপতি তাঁর তৃতীয় লক্ষ-রুবল পেলেন—এবারে 4 কোপেকের বিনিময়ে।

পরের দিন আরও 1,00,000 রুবল—৪ কোপেকের বিনিময়ে।

পঞ্চম লক্ষ-রুবলের বদলে ধনী ভদ্রলোক দিলেন 16 কোপেক, এবং ষষ্ঠ লক্ষ-রুবলের বদলে দিলেন 32 কোপেক।

প্রথম সাত দিনে লাখপতি পেলেন 7,00,000 রুবল—যার বিনিময়ে তাঁকে দিতে হল নিতান্তই যৎসামান্য :

$$1+2+4+8+16+32+64=1$$ রুবল 27 কোপেক মাত্র।

লোভী মানুষটি এতে ভারী খুশি : তাঁর একমাত্র দুঃখ এই-যে, চুক্তিটা মাত্র এক মাসের জন্যে। অর্থাৎ, তিনি পাবেন মাত্র 30,00,000 রুবল। অজ্ঞাত পরিচয় লোকটির সঙ্গে নানা কথার ছলে চুক্তির মেয়াদটাকে আরো বাড়িয়ে নেবার চেষ্টা করলে কেমন হয় ? না, সেটা না করাই ভালো। তাহলে লোকটা হয়তো বুঝে ফেলবে যে সে স্রেফ মুফৎ এতোগুলো করে টাকা দিয়ে যাচ্ছে।

ইতিমধ্যে, ওই লোকটি প্রতি দিন সকালে আসছে তার এক লক্ষ রুবল নিয়ে। অষ্টম দিনে সে পেল 1 রুবল 28 কোপেক ; নবম দিনে—2·56 ; দশম দিনে—5·12 ; একাদশ দিনে—10·24 ; দ্বাদশ দিনে—20·48 ; ত্রয়োদশ দিনে—40·96 এবং চতুর্দশ দিনে—81·92।

ধনী লোকটি সঙ্গে সঙ্গেই তাঁর যা দেবার দিয়ে চলেছেন। তিনি তো 150 রুবলের কাছাকাছি সামান্য অর্থের বিনিময়ে এ পর্যন্ত 14,00,000 রুবল পেয়েছেন !

কিন্তু তাঁর আনন্দটা ক্ষণস্থায়ী হল : খুব শীঘ্রই তিনি দেখতে পেলেন যে, চুক্তিটাকে যতোটা লাভজনক বলে মনে হয়েছিল, ততোটা ঠিক নয়। 15 দিনের পর থেকে তাঁকে – কোপেক নয়—শত শত রুবল দিতে হচ্ছে এবং যা দিতে হচ্ছে তার পরিমাণটা খুব দ্রুত বেড়ে চলেছে। বাস্তবিক পক্ষে তাঁকে যা দিতে হচ্ছে, তা এই :

www.pathagar.com

পঞ্চদশ	1,00.000 রুবলের বিনিময়ে	···163·84
ষোড়শ	,, ,,	···327·68
সপ্তদশ	,, ,,	···655·36
অষ্টাদশ	,, ,,	···1,310·72
ঊনবিংশ	,, ,,	···2,621·44

তবু, এখনও পর্যন্ত তাঁকে ক্ষতি সইতে হচ্ছে না। একথা ঠিক যে তিনি 5,000 রুবলেরও বেশি দিয়েছেন। কিন্তু বিনিময়ে তিনি কি 18,00,000 রুবল পাননি ?

লাভটা কিন্তু প্রতিদিনই কমে যাচ্ছে—এবং প্রতিবারেই প্রকাণ্ড পরিমাণে।

এর পর ধনী লোকটিকে যা দিতে হল, এই :

বিংশ	1.00,000 রুবলের বিনিময়ে	··· 5,242·88
একবিংশ	,, ,, ,,	··· 10,485·76
দ্বাবিংশ	,, ,, ,,	··· 20,971·52
ত্রয়োবিংশ		··· 41,943·04
চতুর্বিংশ	,, ,, ,,	83,886·08
পঞ্চবিংশ	,, ,, ,,	···1,67,772·16
ষড়্‌বিংশ	,, ,,	···3,35,544·32
সপ্তবিংশ	,, ,, ,,	···6,71,088·64

এখন তাঁকে দিতে হচ্ছে—তিনি যা পাচ্ছেন, তার থেকে—ঢের বেশি। এবার তাঁর থামবার সময় এসেছে, কিন্তু চুক্তিটাতো তিনি লংঘন করতে পারেন না।

এদিকে ব্যাপারটা ক্রমেই আরও খারাপ হয়ে দাঁড়াচ্ছে। লাখপতি যখন বুঝলেন যে অজ্ঞাত পরিচয় ওই লোকটি তাঁকে নির্মম ভাবে বোকা বানিয়েছে, এবং তিনি যা পেয়েছেন তার চেয়ে ঢের বেশি তাঁকে দিতে হবে, তখন বড়ো বেশি দেরি হয়ে গেছে।

অষ্টাবিংশ দিনে ধনী লোকটিকে দশ লক্ষেরও বেশি দিতে হল, এবং শেষ দুটি কিস্তি দেবার পর তিনি যথাসর্বস্ব খোয়ালেন। এই শেষ দুদিনের পরিমাণটা দাঁড়াল অতি প্রকাণ্ড :

অষ্টাবিংশ	1,00,000 রুবলের বিনিময়ে	···13,42,177·28
ঊনত্রিংশ	,, ,,	······26,84,354·56
ত্রিংশ	,, ,, ,,	······53,68,709·12

www.pathagar.com

আগন্তুকটি শেষ বারের মতো চলে যাবার পর, লাখপতি হিসেব করতে বসলেন 30,00,000 রুবলের বিনিময়ে তাঁকে কতো দিতে হয়েছে। পরিমাণটা দাঁড়াল :

1,07,37,418 রুবল 23 কোপেক অথবা এক কোটি, সাত লক্ষ, সাঁইত্রিশ হাজার, চার-শো, আঠারো রুবল, তেইশ কোপেক। এক কোটি দশ লক্ষ রুবলের সামান্য কম। এবং সমস্ত ব্যাপারটার সূত্রপাত ঘটেছিল মাত্র এক কোপেক দিয়ে। ওই অজানা লোকটি যদি তাঁকে দৈনিক 3,00,000 রুবল করেও দিত, তাহলেও তার এক কোপেকও ক্ষতি হত না।

3

গল্পটা শেষ করার আগে আমি আপনাদের লাখপতির ক্ষতিটা হিসেব করার একটা আরও দ্রুত পদ্ধতি দেখাব—অর্থাৎ, $1+2+4+8+16+32+64+$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলি আরও তাড়াতাড়ি যোগ করার একটা পদ্ধতি।

এই সংখ্যাগুলির নিম্নলিখিত ধর্মটি লক্ষ্য করা কঠিন নয় :

$1=1$

$2=1+1$

$4=(1+2)+1$

$8=(1+2+4)+1$

$16=(1+2+4+8)+1$

$32=(1+2+4+8+16)+1$, ইত্যাদি।

আমরা দেখতে পাচ্ছি, প্রত্যেকটি সংখ্যা তার পূর্ববর্তী সংখ্যাগুলির যোগফলের চেয়ে 1 বেশি। সুতরাং,, আমাদের যদি, ধরা যাক, 1 থেকে 32,768 পর্যন্ত সমস্ত সংখ্যা যোগ করতে হয়, তাহলে আমরা শেষ সংখ্যাটির (32,768) সঙ্গে পূর্ববর্তী সমস্ত সংখ্যাগুলির যোগফল—অথবা, ভিন্ন ভাবে বলতে গেলে, 1-বাদ সেই একই সংখ্যাটি (32,768 – 1) — যোগ করছি। ফল দাঁড়াচ্ছে 65,535।

এই পদ্ধতিতে এগুলে লাখপতি ভদ্রলোকটি শেষ বার কতো দিয়েছেন তা জানলেই, তিনি মোট কতো দিয়েছেন সেটা আমরা বের করতে পারব। শেষ কিস্তি হিসেবে তিনি দিয়েছেন 53,68,709 রুবল 12 কোপেক। সুতরাং 53,68,709·12-র সঙ্গে 53, 68,709·11 যোগ করলেই আমরা যে-সংখ্যাটা চাচ্ছি সেটা পেয়ে যাচ্ছি :

1,07,37,418·23

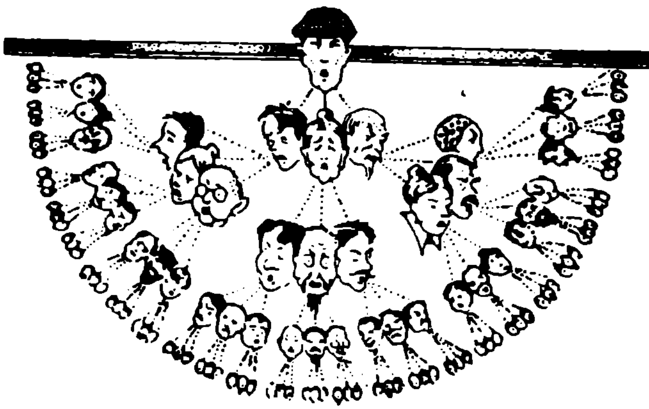
53 গুজব : গুজব যে কতো তাড়াতাড়ি ছড়িয়ে পড়ে, তা সত্যিই বিস্ময়কর। কখনও কখনও কোনো ঘটনা বা দুর্ঘটনার সাক্ষী হয়তো মাত্র কয়েকজন, কিন্তু দু ঘণ্টারও কম সময়ের মধ্যে সেটা নিয়ে সারা শহর জুড়ে আলোচনা হতে

www.pathagar.com

থাকে। এই অনন্যসাধারণ দ্রুত গতিকে বিস্ময়কর, এমন কি, হতবুদ্ধিকর বলে মনে হয়।

কিন্তু তা সত্ত্বেও, আপনি যদি গাণিতিক হিসেবের দিক থেকে সমস্ত ব্যাপারটা বিবেচনা করেন, তাহলে দেখবেন যে এর মধ্যে সত্যিই অবাক হবার মতো কিছু নেই—জিনিসটা দিনের মতোই স্পষ্ট হয়ে দাঁড়ায়।

নিচের এই ব্যাপারটা বিশ্লেষণ করে দেখা যাক।



চিত্র 33 : কি ভাবে গুজব ছড়ায়

1

রাজধানীর একজন অধিবাসী সকাল 8টায় একটা শহরে এল বেশ আগ্রহ জাগাবার মতো একটা খবর নিয়ে। সেই শহরের বাসিন্দার সংখ্যা প্রায় 50,000। যে-বাড়িতে সে উঠেছে, সেখানে মাত্র তিনজন লোককে সে খবরটা দিল। ধরা যাক, এতে 15 মিনিট সময় গেল।

তাহলে, সকাল 8টা 15 মিনিটে খবরটা জানে মাত্র চারজন লোক : আগন্তুকটি এবং তিনজন স্থানীয় বাসিন্দা।

এই তিনজনের প্রত্যেকে আরও তিনজনকে অবিলম্বে জানিয়ে দিল খবরটা। এতে আরও 15 মিনিট গেল। অর্থাৎ, আধ ঘণ্টার মধ্যে সেটা $4+(3\times3)=13$ জন লোকের কাছে জানা খবর।

এই শেষের ন'জন যারা খবরটা সদ্য শুনেছে, তারা আবার প্রত্যেকে নিজের

www.pathagar.com

নিজের তিনজন বন্ধুকে খবরটা জানাল। পোনে-ন'টার মধ্যে খবরটা জেনে গেছে $13+(3\times9)=40$ জন শহরবাসী।

এই একই হারে যদি লোকমুখে খবরটা ছড়িয়ে পড়তে থাকে—অর্থাৎ, যে খবরটা শুনেছে সে-ই পরবর্তী 15 মিনিটের মধ্যে সেটা আরও তিনজনকে জানিয়ে দিচ্ছে, তাহলে ফলটা দাঁড়াবে এই রকম :

সকাল 9টায় খবরটা জেনে যাবে $40+(3\times27)=121$ জন

9·15-তে খবরটা জেনে যাবে $121+(3\times81)=364$ জন

9·30-এ সেটা জানা হয়ে যাবে $364+(3\times243)=1,093$ জনের কাছে

অর্থাৎ, দেড় ঘণ্টার মধ্যেই প্রায় 1,100 জনের কাছে খবরটা জানা হয়ে যাবে। 50,000 লোকসংখ্যা সমেত একটা শহরের পক্ষে এটা খুব একটা বেশি কিছু বলে মনে হয় না। বাস্তবিক পক্ষে, কেউ কেউ মনে করতে পারেন : শহরসুদ্ধ সকলের কাছে খবরটা জানা হতে হতে অনেকখানি সময় লেগে যাবে। কতো দ্রুত গতিতে যে সেটা ছড়িয়ে পড়তে থাকবে, তা দেখা যাক :

সকাল 9টা 45 মিনিটে খবরটা জেনে যাবে $1,039+(3\times729)=3,280$ জন

10টায় খবরটা জানবে $3,280+(3\times2,187)=9,841$ জন

পরবর্তী 15 মিনিটে শহরের জনসংখ্যার অর্ধেকেরও বেশি লোকের কাছে খবরটা জানা হয়ে যাবে :

$9,841+(3\times6,591)=29,524$ জন

এবং, এর অর্থ, যে-খবরটা সকাল আটটায় মাত্র একজন লোক জানত, সেটা সারা শহরের লোক জেনে যাবে সাড়ে-দশটার মধ্যেই।

2

কি করে এটা হিসেব করা হয়, তা দেখা যাক। সমস্ত ব্যাপারটারই মোদ্দা জিনিসটা দাঁড়াচ্ছে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যোগ :

$1+3+(3\times3)+(3\times3\times3)+(3\times3\times3\times3)$ ইত্যাদি।

এই মোট সংখ্যাটি বের করার হয়তো আরও সহজ কোনো উপায় আছে, যেমনটি আমরা এর আগে $(1+2+4+8,$ ইত্যাদি$)$ কাজে লাগিয়েছি : আছে, যদি আমরা যে-সংখ্যাগুলি যোগ করছি সেগুলির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যকে বিবেচনার মধ্যে ধরি :

$$1=1$$
$$3=1\times2+1$$
$$9=(1+3)\times2+1$$
$$27=(1+3+9)\times2+1$$
$$81=(1+3+9+27)\times2+1,\text{ ইত্যাদি।}$$

www.pathagar.com

অর্থাৎ, প্রত্যেকটি সংখ্যা হল পূর্ববর্তী সংখ্যাগুলির মোট যোগফলের দ্বিগুণের সঙ্গে 1 যোগ করলে যা হয় তাই।

সুতরাং, 1 থেকে যে-কোনো সংখ্যা পর্যন্ত, আমাদের সমস্ত সংখ্যার যোগফল বের করার জন্যে যা করতে হবে তা এই: শেষের সংখ্যাটি থেকে 1 বাদ দিয়ে তার অর্ধেক করুন এবং ওই অর্ধেক সংখ্যাটি শেষের সংখ্যার সঙ্গে যোগ করুন। যেমন,

$$1+3+9+27+81+243+729$$

$=729+728$-এর অর্ধেক, অর্থাৎ $729+364$

$$=1,029$$

3

এক্ষেত্রে প্রত্যেকে শহরবাসী খবরটা দিচ্ছে মাত্র অন্য তিনজনকে। কিন্তু শহরবাসীরা যদি আরো বাচাল হত এবং খবরটা তিনজনের সঙ্গে ভাগাভাগি করে না নিয়ে যদি পাঁচজনের সঙ্গে, এমন কি, দশজনের সঙ্গে ভাগাভাগি করে নিত, তাহলে গুজবটা ঢের বেশি দ্রুত গতিতে ছড়িয়ে পড়ত। পাঁচজনের বেলায় ব্যাপারটা দাঁড়াত এই রকম:

সকাল 8টায় খবরটা জানে			...	1 জন
8টা 15 মিনিটে...		(1+5)	...	6 জন
8টা 30 মিঃ	...	6+(5×5)	...	31 জন
8টা 45 মিঃ	...	31+(25×5)	...	156 জন
9টায়	...	156+(125×5)	...	781 জন
9টা 15 মিঃ	...	781+(625×5)	...	3,906 জন
9টা 30 মিঃ	...	3,906+(3,125×5)	...	19,531 জন

সংক্ষেপে, 9টা 45 মিনিটের আগেই খবরটা 50,000 বাসিন্দার প্রত্যেকের কাছে জানা হয়ে যাবে।

প্রত্যেকে যদি অপর দশজনের সঙ্গে খবরটা ভাগাভাগি করে নিত, তাহলে সেটা ঢের বেশি দ্রুত হারে ছড়িয়ে পড়ত। এখানে আমরা সেই অতি-দ্রুত হারে বেড়ে চলা সংখ্যাগুলি পাচ্ছি:

সকাল 8টায় খবরটা জানে			...	1 জন
8টা 15 মিঃ	.	1+10	...	11 জন
8টা 30 মিঃ	..	11+100	...	111 জন
8টা 45 মিঃ	..	111+10,00	...	1,111 জন
9টায়	...	1,111+10,000	...	11,111 জন

www.pathagar.com

পরবর্তী সংখ্যাটি স্পষ্টতই 1,11,111 এবং তা থেকেই দেখা যাচ্ছে যে সকাল 9টার অল্প কিছুক্ষণ পরেই গোটা শহর খবরটা শুনেছে। এক্ষেত্রে, সারা শহরে খবরটা ছড়িয়ে পড়তে সময় লাগছে এক ঘণ্টার সামান্য কিছু বেশি।

54. বাইসাইকেল-জুয়াচুরি : বিপ্লবের আগে রাশিয়ায় এমন সব ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠান ছিল যারা অত্যন্ত সাধারণ মানের পণ্য বিক্রি করার জন্যে অভিনব সব পদ্ধতির আশ্রয় নিত। সমস্ত ব্যাপারটার সূত্রপাত হত জনপ্রিয় সংবাদপত্র-পত্রিকাগুলিতে প্রকাশিত এই ধরনের কোনো বিজ্ঞাপন থেকে :

> **10 রুবলের বিনিময়ে একটি বাই-সাইকেল**
> মাত্র 1 রুবল দিয়ে আপনি
> একটি বাইসাইকেলের মালিক
> হতে পারেন
> অবিলম্বে এই বিরল সুযোগ গ্রহণ করুন
> **50 রুবলের বদলে 10 রুবল**
> **আবেদন করলেই বিনা মূল্যে শর্তাদি**
> **পাঠানো হবে।**

বলা বাহুল্য, বহু লোকেই এ ধরনের টোপ গিলে শর্তাদি জানার জন্যে লিখত। উত্তরে তারা একটা বিস্তারিত বিবরণ পেত।

ব্যক্তিটি তার প্রেরিত 10 রুবলের বিনিময়ে যা পেত, সেটা বাইসাইকেল নয়। পেত চারটি কুপন। ওই কুপনগুলি তাকে প্রত্যেকটি 10 রুবল দামে তার চারজন বন্ধুকে বিক্রি করতে বলা হত। এই ভাবে তার সংগৃহীত 40 রুবল সে কোম্পানিকে পাঠিয়ে দিত এবং তারপর কোম্পানিটি তাকে পাঠিয়ে দিত তার বাইসাইকেলটি। এই ভাবে, ওই ব্যক্তিটি নিজে আসলে মাত্র 10 রুবলই খরচ করেছে। বাকি 40 রুবল এসেছে তার বন্ধুদের পকেট থেকে। একথা ঠিক যে, এই 10 রুবল দেওয়া ছাড়াও, ক্রেতাটিকে ওই চারটি কুপন কেনার মতো লোকের সন্ধানে বেশ একটু ঝামেলা পোয়াতে হয়েছে, কিন্তু সেজন্যে তার কোনো খরচ তো হয়নি।

এই কুপনগুলি কি ? 10 রুবল দিয়ে এই কুপন কিনে ক্রেতা কি সুযোগ পাচ্ছে ? এই কুপনটির বিনিময়ে সে একই রকম আরও পাঁচটি কুপন পাচ্ছে কোম্পানির কাছ থেকে—যেগুলির প্রত্যেকটি তাকে 10 রুবল দামে আরও পাঁচ-জনকে বিক্রি করতে হচ্ছে। অন্য ভাবে বলতে গেলে, তাকে 50 রুবল সংগ্রহ

www.pathagar.com

করতে হচ্ছে একটা বাইসাইকেল পাবার জন্যে—যেটার জন্যে সে নিজে বাস্তবিক পক্ষে মাত্র 10 রুবল দিয়েছে—অর্থাৎ, যে-দশ রুবল দিয়ে সে প্রথম কুপনটা কিনেছে। নতুন যেসব লোকের হাতে ওই কুপনগুলি গেল, তারা আবার প্রত্যেকে পাঁচটা করে কুপন পেল একই ভাবে পরিবেশন করার জন্যে। এই ভাবেই চলতে থাকবে।

প্রথম দৃষ্টিতে মনে হবে, গোটা জিনিসটার মধ্যে জুয়াচুরির কোনো ব্যাপার নেই। বিজ্ঞাপনদাতা তার কথা রেখেছে: ক্রেতা বাস্তবিকই তার বাইসাইকেলের জন্যে মাত্র 10 রুবল দামই দিয়েছে। ব্যবসায়ী প্রতিষ্ঠানটিরও কোনো আর্থিক ক্ষতি হচ্ছে না—সেটা তার জিনিস বিক্রি করেছে পুরো দামে।

কিন্তু তবু, ব্যাপারটা স্পষ্টতই জুয়াচুরি। কারণ, রাশিয়ায় একে যা বলা হয়েছে, এই "হিমানী-সম্প্রপাত"* বহু লোকের ক্ষতির কারণ হয়েছে—যেসব লোক তাদের কেনা কুপনগুলি বিক্রি করে উঠতে পারেনি। এরাই ব্যবসায়ী প্রতিষ্ঠানটিকে বাড়তি অর্থ জুগিয়েছে। কিছুদিনের মধ্যেই এমন একটা সময় এসেছে যখন কুপনের মালিকদের পক্ষে ওই কুপনগুলি বিক্রি করা অসম্ভব হয়ে দাঁড়িয়েছে। এরকম যে ঘটতে বাধ্য, তা আপনি একটা কাগজ আর পেন্সিল নিয়ে বসে হিসেব করলেই দেখতে পাবেন—কুপনের মালিকদের সংখ্যা কতো দ্রুত হারে বেড়ে চলেছে।

ব্যবসায়ী প্রতিষ্ঠানের কাছ থেকে যারা সরাসরি কুপন পেয়েছিল, সেই প্রথম গ্রুপের ক্রেতারা সাধারণত অন্যান্য ক্রেতাদের পেতে খুব একটা অসুবিধেয় পড়েনি। এই গ্রুপের প্রত্যেকেই চারজন নতুন যোগদানকারীকে চুক্তিটার মধ্যে টেনে আনতে পেরেছে।

পরবর্তীদের নিজের নিজের কুপনগুলি গছাতে হয়েছে আরও 20 জনকে (4 × 5) এবং তা করতে গিয়ে এই কুপন কেনার সুবিধা সম্বন্ধে এদের মনে দৃঢ় প্রত্যয় জাগাতে হয়েছে। মনে করা যাক, তারা এ কাজে সফল হয়েছে এবং আরো 20 জন নতুন যোগদানকারীকে দলে টানা গেছে।

"হিমানী-সম্প্রপাতের" বেগ বেড়েই চলেছে: কুপনের নতুন মালিক এই বিশজনকে সেগুলি পরিবেশন করতে হবে অন্য 20 × 5 = 100 জনের কাছে।

এ পর্যন্ত কুপনের আদি মালিকদের প্রত্যেকে এই ব্যাপারটার মধ্যে টেনে এনেছে 1 + 4 + 20 + 100 = 125 জনকে, এবং এদের মধ্যে 25 জন বাইসাইকেল পেয়েছে আর অন্য 100 জনকে একটা করে বাইসাইকেল পাবার আশা দেওয়া হয়েছে—যে আশায় তাদের প্রত্যেকে 10 রুবল দিয়েছে।

---

* তুষারে ঢাকা পাহাড়ের ঢাল বেয়ে নেমে আসা বরফের স্তূপ—গড়িয়ে নামার সময়ে যেটার আয়তন প্রতি মুহূর্তে অত্যন্ত দ্রুত বেড়ে চলে।

www.pathagar.com

"হিমানী-সম্প্রপাত"টি এখন বন্ধুজনের একটা ছোট মহল ভেঙে বেরিয়ে এসে সারা শহরে ছড়িয়ে পড়েছে—যেখানে নতুন কুপন-ক্রেতা পাওয়াটা ক্রমাগত কঠিন হয়ে দাঁড়াচ্ছে। এই শেষের 100 জন ক্রেতাকে নিজেদের কুপনগুলি বিক্রি করতে হবে 500 জন নতুন শিকারকে, এবং এই 500 জনকে আবার আরও 2,500 জনকে দলে টানতে হবে। শহরে কুপনের বন্যা বয়ে চলেছে, এবং সেগুলি কিনতে ইচ্ছুক—এমন লোক খুঁজে পাওয়া সত্যিই বড়ো কঠিন হয়ে দাঁড়াচ্ছে।

দেখতে পাবেন, যে-ভাবে গুজব ছড়ায় (পূর্ববর্তী 53নং উদাহরণটি দেখুন), ঠিক সেই ভাবেই এই "দাঁও মারা"র ব্যাপারটার মধ্যে টেনে আনা লোকের সংখ্যা বেড়ে চলেছে। সংখ্যার পিরামিডটা এই দাঁড়াচ্ছে :

1
4
20
100
500
2,500
12,500
62,500

শহরটা যদি বড়ো হয় আর বাইসাইকেল-আরোহী লোকের সংখ্যা হয় 62,500, তাহলে অষ্টম দফার পরে এই হিমানী-সম্প্রপাতের কোনো অস্তিত্বই থাকবে না। কিন্তু বাইসাইকেল পাবে মাত্র এক-পঞ্চমাংশ; বাকি লোকদের হাতে শুধু কুপন থেকে যাবে—যেসব কুপন অন্যকে গছাবার বিন্দুমাত্র সম্ভাবনা নেই।

আরও বেশি জনবহুল কোনো শহরে, এমন কি, দশ লক্ষ জনসংখ্যা সমেত কোনো আধুনিক রাজধানীতেও, আর মাত্র কয়েক দফা পরেই ব্যাপারটার সমাপ্তি ঘটবে। কারণ, ওই সংখ্যার পিরামিড বেড়ে যাবে অবিশ্বাস্য রকমের দ্রুতগতিতে। নবম দফা থেকে সংখ্যাগুলি দাঁড়াচ্ছে এই রকম :

3,12,500
15,62,500
78,12,500
3,90,62,500

www.pathagar.com

দেখতেই পাচ্ছেন, ফান্দটা দ্বাদশ দফাতেই একটা গোটা দেশের জনসংখ্যাকে তার জালে জড়িয়ে ফেলবে এবং জুয়াচুরিটার উদ্যোক্তাদের দ্বারা পাঁচ ভাগের চার ভাগ মানুষই প্রতারিত হবে।

তারা কতোখানি লাভবান হচ্ছে দেখা যাক। জনসাধারণের এক-পঞ্চমাংশ যে-জিনিস কিনেছে, তার জন্যে বাকি চার-পঞ্চমাংশকে মূল্য দিতে বাধ্য করেছে তারা—অর্থাৎ, এই শেষোক্তরাই প্রথমোক্তদের জন্যে টাকা জুগিয়েছে।

তার ওপরে, তারা স্বেচ্ছামূলক 'সেল্‌স্‌ম্যান'দের এক বিরাট বাহিনী পেয়েছে—অত্যন্ত উৎসাহী সেলসম্যান। ঘটনাটিকে একজন রুশ লেখক ন্যায়সঙ্গত ভাবেই "পারস্পরিক প্রতারণার হিমানী-সম্প্রপাত" বলে অভিহিত করেছিলেন। এবং সমস্ত ব্যাপারটা সম্বন্ধে শুধু এই বলা যায় যে, প্রতারণার বিরুদ্ধে নিজেদের রক্ষা করার জন্যে কি ভাবে হিসেব করতে হয়, সেটা যারা জানে না, সাধারণত তারাই ক্ষতিগ্রস্ত হয়।

55. পুরস্কার: কিংবদন্তী অনুযায়ী, এই ঘটনাটা ঘটেছিল প্রাচীন রোমে।*

রোমান সেনাপতি টেরেন্‌টিউস এক বিজয়-অভিযানের শেষে, শত্রুজয়ের চিহ্ন হিসেবে নানা রকম স্মারক নিয়ে, দেশে ফিরলেন এবং রোম-সম্রাটের সাক্ষাৎ-প্রার্থী হলেন।

সম্রাট অত্যন্ত সহৃদয়তার সঙ্গে তাঁকে স্বাগত জানালেন, সাম্রাজ্যের জন্যে তিনি যা করেছেন তার জন্যে ধন্যবাদ দিলেন এবং তাঁকে সেনেট-এর† সদস্য করা হবে বলে প্রতিশ্রুতি দিলেন: সেটাই হবে তাঁর মর্যাদার উপযোগী। কিন্তু টেরেন্‌টিউস এ পুরস্কার চান না।

"আপনার বলবীর্য বাড়িয়ে তোলার জন্যে, আপনার নামকে গৌরবোজ্জ্বল করে তোলার জন্যে আমি বহু যুদ্ধ জয় করেছি," বললেন তিনি, "মৃত্যুভয়ে আমি কখনও ভীত হইনি, আমার যদি একাধিক জীবন হত, তাহলে আপনার জন্যে আমি তা স্বেচ্ছায় বিসর্জন দিতাম। কিন্তু এখন আমি বিগত যৌবন এবং আমার ধমনীর রক্ত তার তাপ হারিয়েছে। এখন আমার অবসর গ্রহণ করে পিতৃপুরুষের গৃহে বাস করার এবং বাকি জীবনটুকু উপভোগ করার সময় এসেছে।"

"আপনি তাহলে কি চান, টেরেনটিউস?" জিজ্ঞেস করলেন সম্রাট।

* ইংল্যান্ডে একটি ব্যক্তিগত গ্রন্থাগারে রক্ষিত একটি ল্যাটিন পাণ্ডুলিপি থেকে স্বচ্ছন্দ অনুবাদ।
† বিশিষ্ট জ্ঞানী গুণী বিচক্ষণ ব্যক্তিদের নিয়ে গঠিত প্রাচীন রোমের শাসক সভা।

www.pathagar.com

"আপনার অনুগ্রহ প্রার্থনা করি, হে মহামহিম সীজার! প্রায় সারা জীবনই আমার যুদ্ধবিগ্রহে কেটেছে, রক্তে সিক্ত করেছি আমার তরবারি, কিন্তু ধনসম্পদ গড়ে তোলার সময় পাইনি আমি। আমি দরিদ্র..."

"বলুন, বীর টেরেন্‌টিউস," সম্রাট তাঁকে বিশেষ ভাবে অনুরোধ জানালেন।

উৎসাহ পেয়ে সেনাধ্যক্ষ বলে চললেন, "আপনার সেবককে যদি পুরস্কৃত করতে চান, তাহলে আপনার মহানুভবতা আমার শেষ দিনগুলি আমাকে শান্তি ও প্রাচুর্যের মধ্যে কাটাতে সাহায্য করুক। আমি সর্বশক্তিমান সেনেটের সম্মান বা কোনো উচ্চপদ চাইনে। বাকি জীবনটা শান্তিতে কাটাবার জন্যে আমি অবসর গ্রহণ করতে চাই। হে সীজার, বাকি দিনগুলি স্বাচ্ছন্দ্যের মধ্যে কাটাবার মতো যথেষ্ট পরিমাণে অর্থ আপনি আমাকে দিন।"

এখন, কিংবদন্তী অনুযায়ী, সম্রাট খুব একটা উদার প্রকৃতির লোক ছিলেন না। বাস্তবিক পক্ষে, তিনি বড়োই কৃপণ ছিলেন, এবং টাকা খরচ করতে তাঁর বুকে বাজত। সেনাপতির কথার জবাব দেবার আগে তিনি কয়েক মুহূর্ত ভেবে নিলেন।

শেষ পর্যন্ত তিনি জিজ্ঞেস করলেন, "কি পরিমাণ অর্থ হলে আপনার উপযুক্ত হবে বলে মনে করেন?"

"দশ লক্ষ দিনার, মহানুভব সীজার।"

সম্রাট আর-একবার চুপ করে গেলেন। সেনাধ্যক্ষ মাথা নিচু করে উত্তরের অপেক্ষায় রইলেন।

"বীর টেরেন্‌টিউস," শেষ পর্যন্ত সম্রাট বললেন, "আপনি একজন মহান সেনানায়ক, আপনার গৌরবোজ্জ্বল সব কীর্তি যথার্থই যথোপযুক্ত ভাবে পুরস্কৃত হবার যোগ্য। আমি আপনাকে ধনসম্পদ দেব। আগামী কাল দ্বিপ্রহরে আপনি আমার সিদ্ধান্ত জানতে পারবেন।"

টেরেন্‌টিউস মাথা নুইয়ে, বিদায় নিলেন।

২

পরের দিন টেরেন্‌টিউস আরেকবার রাজপ্রাসাদে এলেন।

"স্বাগতম, বীর টেরেনটিউস!" বললেন সম্রাট।

"হে সীজার, আপনার সিদ্ধান্ত জানার জন্যে এসেছি। আপনি মহানুভবতার সঙ্গে আমাকে পুরস্কৃত করার প্রতিশ্রুতি দিয়েছেন।"

"হ্যাঁ," বললেন সম্রাট, "আপনার মতো একজন মহৎ যোদ্ধাকে নিতান্ত অকিঞ্চিৎকর পুরস্কার দিতে আমি অনিচ্ছুক। যা বলি, শুনুন। আমার

www.pathagar.com

কোষাগারে দশ লক্ষ দিনার মূল্যের 50 লক্ষ পিত্তলের মুদ্রা আছে। এবার, মন দিয়ে শুনুন: আপনি আমার কোষাগারে গিয়ে একটি মুদ্রা নিয়ে এখানে আসবেন; পরের দিন আপনি আবার কোষাগারে যাবেন এবং প্রথম মুদ্রাটির দ্বিগুণ মূল্যের আরেকটি মুদ্রা নিয়ে এসে, সেটা প্রথমটির পাশে রাখবেন। তৃতীয় দিনে আপনি পাবেন প্রথম মুদ্রাটির চারগুণ মূল্যের একটি মুদ্রা, চতুর্থ দিনে আট গুণ, পঞ্চম দিনে ষোল গুণ, ইত্যাদি। আপনার জন্যে প্রয়োজনীয় মূল্যের মুদ্রা প্রতিদিন তৈরি করে রাখার জন্যে আমি টাঁকশালকে হুকুম দিয়ে রাখব। এবং যতোদিন আপনার সে শক্তি থাকবে ততোদিন আপনি আমার কোষাগার থেকে মুদ্রাগুলি নিয়ে আসতে পারেন। কিন্তু আপনাকে নিজেই এই কাজটা করতে হবে—কোনো সাহায্য না নিয়ে। তারপর আপনি যখন মুদ্রাটিকে আর তুলে বয়ে আনতে পারবেন না, তখন আপনাকে থেমে যেতে হবে। তখনই আমাদের চুক্তি শেষ হয়ে যাবে, কিন্তু যতোগুলি মুদ্রা আপনি নিয়ে আসবেন, সে সমস্তই পুরস্কার হিসেবে আপনি নেবেন।"

লোভার্ত মনে টেরেন্‌টিউস সম্রাটের কথা শুনলেন। কল্পনার চোখে দেখলেন কী বিরাট সংখ্যক মুদ্রা তিনি কোষাগার থেকে নিয়ে আসবেন।

"হে সীজার, আপনার মহানুভবতার জন্যে আমি কৃতজ্ঞ", সানন্দে বললেন তিনি, আপনার পুরস্কার সত্যিই অপূর্ব!"

3

অতএব, টেরেন্‌টিউস শুরু করলেন সম্রাটের দরবার কক্ষের কাছেই খাজাঞ্চিখানায় তাঁর দৈনিক তীর্থযাত্রা, এবং প্রথম কয়েকটি মুদ্রা নিয়ে আসাটা কঠিন হল না।

প্রথম দিন টেরেন্‌টিউস নিলেন ছোট একটি মুদ্রা—যেটার ব্যাস 21 মিলিমিটার এবং ওজন 5 গ্রাম।

দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ মুদ্রাটি বয়ে আনাও বেশ সহজ। কারণ, সেগুলির ওজন যথাক্রমে মাত্র 10, 20, 40, 80 আর 160 গ্রাম।

সপ্তম মুদ্রাটির ওজন 320 গ্রাম এবং ব্যাস $8\frac{1}{2}$ সেন্টিমিটার (অথবা, অত্যন্ত সঠিক ভাবে বলতে গেলে, 84 মি. মি.*)।

অষ্টম দিনে টেরেন্‌টিউসকে 128টি মৌলিক মুদ্রার সমমূল্যের একটি মুদ্রা নিয়ে আসতে হল। সেটার ওজন 640 গ্রাম এবং ব্যাস প্রায় $10\frac{1}{2}$ সে. মি.।

---

* মুদ্রাটি যদি সাধারণ মুদ্রার চেয়ে 64 গুণ ভারী হয়, তাহলে ব্যাস ও বেধের দিক থেকে সেটা হবে মাত্র চার গুণ। কারণ, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$। কাহিনীটিতে এর পরের মুদ্রাগুলির আয়তন হিসেব করার সময়ে এটা মনে রাখা চাই।

www.pathagar.com

নবম দিনে তিনি সম্রাটের সামনে নিয়ে এলেন প্রথম মুদ্রাটির 256 গুণ মূল্যের একটি মুদ্রা যেটার ওজন 1·280 কিলোগ্রামের চেয়ে বেশি এবং ব্যাস 13 সে. মি.।

দ্বাদশ দিনে মুদ্রাটির ব্যাস দাঁড়িয়েছে প্রায় 27 সে. মি. এবং ওজন 10·250 কিলোগ্রাম।

সম্রাট তাঁকে প্রতিদিনই অত্যন্ত সাদর সংবর্ধনা জানান; এখন তাঁর পক্ষে জয়ের আনন্দ গোপন করাটা ক্রমেই কঠিন হয়ে দাঁড়াচ্ছে। তিনি দেখতে পাচ্ছেন, টেরেন্‌টিউস মাত্র বারো বার তার খাজাঞ্চিখানায় গেছেন এবং মাত্র 2,000 পেতলের মুদ্রার যৎসামান্য বেশি নিয়ে এসেছেন।

ত্রয়োদশ দিনে টেরেন্‌টিউস যে মুদ্রাটি পেলেন, সেটার দাম 4,096 মৌলিক মুদ্রার সমান এবং সেটার ব্যাস 34 সে. মি. আর ওজন 20·5 কিলোগ্রাম। পরের দিনের মুদ্রাটি আরও ভারী, আরও বড়ো: ওজন 41 কিলোগ্রাম, ব্যাস 42 সে. মি.।

সম্রাট কোনোরকমে হাসি চেপে জিজ্ঞেস করলেন, "প্রিয় বীর টেরেন্‌টিউস, আপনি ক্লান্তি বোধ করছেন না তো?"

"আজ্ঞে না, সীজার", ভুরু কুঁচকে আর কপালের ঘাম মুছে উত্তর দিলেন সেনাপতি।

তারপর এল পঞ্চদশ দিন। বোঝাটা প্রতিদিনই বেড়ে চলেছে এবং এদিন টেরেন্‌টিউস দরবার কক্ষে অতি ধীরে ধীরে যে মুদ্রাটিকে বয়ে নিয়ে এলেন, সেটার মূল্য 16,384 মৌলিক মুদ্রার সমান, ব্যাস 53 সে. মি. আর ওজন 80 কিলোগ্রাম—একজন দীর্ঘদেহী যোদ্ধার ওজনের সমান।

ষোড়শ দিনে বোঝাটা পিঠে চাপিয়ে বয়ে আনার সময়ে সেনাপতির পা দুটো কাঁপছে। মুদ্রাটির দাম 32,768 মৌলিক মুদ্রার সমান, ওজন 164 কিলোগ্রাম, ব্যাস 67 সে. মি.।

টেরেন্‌টিউস ঘন ঘন নিঃশ্বাস ফেলতে ফেলতে রাজসভা-কক্ষে এলেন, দেখেই বোঝা যাচ্ছে তিনি অত্যন্ত ক্লান্ত। সম্রাট মৃদু হাস্যে তাঁকে সুপ্রভাত জানালেন·········

পরের দিন যখন সেনাধ্যক্ষ সেখানে এলেন, সেদিন তাঁকে উচ্চ হাস্যে অভ্যর্থনা জানানো হল। এখন আর তিনি মুদ্রাটি বয়ে আনতে পারছেন না, গড়িয়ে গড়িয়ে ঠেলে নিয়ে আসতে হচ্ছে। সেটার ব্যাস 84 সে. মি. ওজন 328 কিলোগ্রাম এবং দামে 65,536টি মূল মুদ্রার সমান।

নিজের সম্পদ বাড়িয়ে তোলার দিক থেকে অষ্টাদশ দিনটিই তাঁর শেষ দিন।

www.pathagar.com

www.pathagar.com

www.pathagar.com

কোষাগারে যাওয়া এবং সেখান থেকে দরবার কক্ষে তাঁর আসা শেষ হল। এদিন তাঁকে বয়ে আনতে হয়েছে 1, 31,072 মূল মুদ্রার সমান দামের একটি মুদ্রা— যেটার ব্যাস এক মিটারেরও বেশি এবং ওজন 655 কিলোগ্রাম। নিজের বর্শাটাকে ঠেলানী লিভার হিসেবে কাজে লাগিয়ে তিনি মুদ্রাটিকে গড়িয়ে নিয়ে এলেন। সম্রাটের পায়ের কাছে সেটা ধপ্ করে পড়ল এসে

টেরেন্‌টিউস সম্পূর্ণ হতবল হয়ে পড়েছেন।

"চের হয়েছে……" হাঁপাতে হাঁপাতে বললেন তিনি।

সম্রাট খুশির উচ্ছ্বাসে হাসি সামলাতে পারছেন না। সেনাপতিকে বোকা

চিত্র 34 : সপ্তদশ মুদ্রাটি

বানিয়েছেন তিনি। এর পর তিনি কোষাধ্যক্ষকে হিসেব কষার নির্দেশ দিলেন —রাজকোষ থেকে টেরেন্‌টিউস কি পরিমাণ অর্থ নিয়েছেন। কোষাধ্যক্ষ তাই করলেন :

"আপনার বদান্যতার কল্যাণে, হে সীজার, বীর টেরেন্‌টিউস পুরস্কার হিসেবে পেয়েছেন 2,62,143 পিতলের মুদ্রা।"

তাহলে, কঞ্জুষ সম্রাট সেনাপতিকে দিয়েছেন তিনি যা চেয়েছিলেন সেই দশ লক্ষ দিনারের বিশ ভাগের প্রায় এক ভাগ।

*　　　*　　　*

কোষাধ্যক্ষের হিসেবটাকে, এবং সেই সঙ্গে মুদ্রাগুলির ওজনকে, মিলিয়ে দেখা যাক।

www.pathagar.com

সবগুলিতেই আপনার ইচ্ছে মতো গমের দানা আপনি পাবেন: প্রত্যেকটি চৌকোণাতেই আগেরটির দ্বিগুণ। কিন্তু, জেনে রাখুন, আপনার অনুরোধ আমার বদান্যতার উপযুক্ত নয়। এহেন তুচ্ছ পুরস্কার চেয়ে আপনি আমার প্রতি অসম্মান দেখিয়েছেন। একজন শিক্ষক হিসেবে সত্যিই আপনার বাদশার অনুগ্রহকে সম্মানিত করার আরো ভালো উদাহরণ আপনি দেখাতে পারতেন। যান! আমার হুকুমবরদাররা আপনার গমের বস্তা এনে দিচ্ছে।"

চিসসা মৃদু হেসে বিদায় নিলেন। তারপর প্রাসাদের প্রবেশপথের পাশে তাঁর পুরস্কারের অপেক্ষায় দাঁড়িয়ে রইলেন।

চিত্র 35: "দ্বিতীয় চৌকোণাটিতে দুটি"

2

খেতে বসে বাদশার মনে পড়ল চিস্সাকে। জানতে চাইলেন ওই "নিরেট-মাথা" উদ্ভাবকটিকে তার অতি তুচ্ছ পুরস্কার দেওয়া হয়েছে কি-না।

তাঁকে বলা হল, "হুজুর, আপনার হুকুম তামিল করা হচ্ছে। আপনার জ্ঞানী-গুণীরা হিসেব কষছেন তাঁর প্রাপ্য গমের দানার সংখ্যা কতো দাঁড়াবে।"

ভ্রূকুঞ্চিত করলেন বাদশা। তাঁর হুকুম পালন করতে এতো দেরি হওয়ার ব্যাপারটায় তিনি অভ্যস্ত নন।

রাত্রে শুতে যাবার আগে তিনি আরেকবার জানতে চাইলেন চিস্সাকে তার গমের বস্তাটা দেওয়া হয়েছে কি-না।

www.pathagar.com

"মালিক", উত্তর দিলেন তাঁর উজীর "আপনার গণিতজ্ঞরা অবিরাম কাজ করে চলেছেন। ভোর হবার আগেই হিসেব কষা হয়ে যাবে বলে আশা করছেন তাঁরা।"

"এতো ঢিমে তালে চলছে কেন ওরা?" রাগত স্বরে কৈফিয়ত চাইলেন বাদশা, "আমি জেগে ওঠার আগেই চিস্‌সাকে যেন অবশ্যই শেষ গমের দানাটি পর্যন্ত তার পুরো পাওনা মিটিয়ে দেওয়া হয়। আমি দ্বিতীয়বার হুকুম দিইনে!"

সকাল বেলায় বাদশাকে বলা হল যে দরবারের প্রধান গণিতবিদ তাঁর সাক্ষাৎপ্রার্থী।

বাদশা তাঁকে আসতে দেবার নির্দেশ দিলেন। বাদশা শেহ্‌রাম বললেন, "আপনি কি জন্যে এসেছেন তা বলার আগেই আমি জানতে চাই, চিস্‌সা যে ভিক্ষুকসুলভ পুরস্কার চেয়েছে, তা তাকে দেওয়া হয়েছে কি-না।"

"সে কথা বলার জন্যেই আমি এতো সকালে আপনার দৃষ্টির সামনে এসে দাঁড়াতে সাহসী হয়েছি" বললেন জ্ঞানবৃদ্ধ, "চিস্‌সা যা চেয়েছেন, গমের দানার সেই সংখ্যাটি হিসেব কষে বের করার জন্যে আমরা খুব নিখুঁত ভাবে কাজ করেছি। ওই সংখ্যাটি বাস্তবিকই বিশাল…"

"যতোই বিশাল হোক," বাদশা অধৈর্যের সঙ্গে বাধা দিয়ে বসলেন, "আমার শস্যভাণ্ডার থেকে তা সহজেই দেওয়া যেতে পারে। তাকে ওই পুরস্কার দেবার প্রতিশ্রুতি দেওয়া হয়েছে এবং দিতেই হবে!"

"চিস্‌সার ইচ্ছা পূরণ করার ক্ষমতা আপনার নেই, জাঁহাপনা। চিস্‌সা যে-পরিমাণ দানা চেয়েছেন, আপনার শস্যভাণ্ডারে সে-পরিমাণ গম নেই। আপনার সারা রাজ্যে অতো গম নেই। বাস্তবিক পক্ষে, সারা দুনিয়ায় নেই। এবং, আপনি যদি আপনার কথা রাখতে চান, তাহলে আপনাকে হুকুম দিতে হবে সারা দুনিয়ার সমস্ত জমিকে গমের ক্ষেতে পরিণত করার জন্যে, সমস্ত সমুদ্র-মহাসাগরের জল ছেঁচে ফেলার জন্যে, সুদূর উত্তরাঞ্চলের সমস্ত বরফ-তুষার গলিয়ে ফেলার জন্যে। এবং ওই সমস্ত জমিতে যদি গম ফলানো হয়, তাহলে হয়তো বা চিস্‌সাকে দেবার মতো যথেষ্ট গমের দানা পাওয়া যেতে পারে।"

বাদশা বিস্ময়স্তম্ভিত হয়ে বিচক্ষণ বৃদ্ধের কথাগুলি শুনলেন।

শেষ পর্যন্ত চিন্তিত ভাবে বললেন তিনি, "এই বিশাল সংখ্যাটি বলুন।"

"মালিক" উত্তর দিলেন বিজ্ঞ ব্যক্তিটি, "ওই সংখ্যাটি হল 1, 84, 46, 74, 40, 73, 70, 95, 51, 615"

www.pathagar.com

3

কিংবদন্তীটি হল এই। সত্যিই এরকমটি ঘটেছিল কি-না, আমরা জানিনে; কিন্তু পুরস্কারটি যে এই রকম একটা সংখ্যায় দাঁড়াবে, সেটা দেখে নেওয়াটা খুব কঠিন নয়: একটু ধৈর্যের সঙ্গে আমরা নিজেরাই সেটা হিসেব করতে পারি। এক থেকে শুরু করে আমাদের যোগ করতে হবে এই সংখ্যাগুলি: 1, 2, 4, 8 ইত্যাদি। 2-এর 63তম ঘাতের (2^{63}) ফল যা দাঁড়াবে, তা থেকে আমরা দেখতে পাব—দাবা খেলার উদ্ভাবকের 64তম ঘরটির জন্যে কি পরিমাণ গম পাবার কথা। 52নং সমস্যাটির সমাধানে যে-সংখ্যাবিন্যাসটি দেখানো হয়েছে, সেই একই বিন্যাস অনুসরণে, আমরা যদি 2^{64} কতো হয় তা বের করে নিয়ে তা থেকে 1 বাদ দিই, তাহলে সহজেই গমের দানার সংখ্যাটি পেয়ে যাব।

অর্থাৎ, আমাদের পর-পর 64টি 2 গুণ করতে হবে: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × ···ইত্যাদি 64 বার।

হিসেবের সুবিধের জন্যে আমরা এই 64টি গুণনীয়ককে 7টি গ্রুপে ভাগ করে নেব—প্রথম 6টি গ্রুপের প্রত্যেকটিতে 10টি করে 2 থাকবে এবং শেষের সপ্তম গ্রুপে থাকবে 4টি 2। দশটি 2-এর গুণফল হল 1,024 এবং চারটি 2-এর গুণফল হল 16। সুতরাং, আমরা যে-সংখ্যাটি বের করতে চাই, তা হল: 1,024 × 1,024 × 1,024 × 1,024 × 1,024 × 1,024 × 16

এখন, 1,024কে 1,024 দিয়ে গুণ করে আমরা পাচ্ছি 10, 48, 576।

এবার, আমাদের বের করতে হবে এই গুণফলটি: 10, 48, 576 × 10,48,576 × 10, 48 576 × 16

এবং সেই গুণফল থেকে 1 বিয়োগ করলেই আমরা গমের দানার সংখ্যা পেয়ে যাব: 1,84,46,74,40,73,70,95,51,616

এই বিপুল সংখ্যাটি যে সত্যিই কতো বড়ো, সে সম্বন্ধে একটা স্পষ্ট ছবি পাবার জন্যে আপনি শুধু এমন একটা শস্যের গোলা কল্পনা করুন যেটা ওই সমস্ত গমকে মজুদ করে রাখার জন্যে দরকার হবে। সকলেই জানেন, এক ঘন-মিটার গমের মধ্যে থাকে 1,50,00,000 দানা।

সুতরাং, দাবা খেলার উদ্ভাবক যে পুরস্কার চেয়েছেন, সেটার জন্যে প্রায় 1,20,00,00,00,00,000 ঘন-মিটার বা 12,000 ঘন-কিলোমিটার মাপের শস্য-ভাণ্ডার দরকার হবে। আমরা যদি 4 মিটার উঁচু, 10 মিটার চওড়া একটা শস্যের গোলা তৈরি করি, তাহলে সেটার দৈর্ঘ্য হওয়া চাই: 30,00,00,000 কিলোমিটার, অর্থাৎ পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্বের দ্বিগুণ।

চিস্সার অনুরোধ রাখতে বাদশা অপারগ হয়েছিলেন। কিন্তু তিনি যদি

www.pathagar.com

অঙ্কে পটু হতেন তাহলে সহজেই এরকম এক বিশাল পুরস্কারের প্রতিশ্রুতি দেওয়াটাকে এড়িয়ে যেতে পারতেন—তাঁর শুধু এই প্রস্তাবটাই দেওয়া উচিত ছিল যে, চিস্‌সাকে নিজে ওই গমের দানাগুলোকে একটা-একটা করে গুণে নিতে হবে।

বাস্তবিকপক্ষে, চিস্‌সা যদি সারা দিন রাত ধরে, মুহূর্তের জন্যেও না থেমে, দানা গুণে যেতেন এবং প্রতিটি দানা গোণার জন্যে যদি এক সেকেণ্ড করে সময় নিতেন, তাহলে প্রথম দিন তিনি 86,400 দানা গুণে উঠতে পারতেন। দশ লক্ষ গমের দানা গুণতে তাঁর যে-সময় লাগত তা 10 দিনের কম নয়। এক ঘন-মিটার গমের দানা গুণতে তাঁর প্রায় ছয় মাস লেগে যেত—এতে তিনি 27 'বুশেল'* গম পেতেন। কোনোরকম বিরতি না দিয়ে, একটানা 10 বছর ধরে গুণে গেলে তিনি প্রায় 550 বুশেল্ গুণতে পারতেন। দেখতেই পাচ্ছেন, চিস্‌সা যদি তাঁর জীবনের বাকি ক'বছর শুধু গমের দানা গুণতি করেই কাটিয়ে দিতেন, তাহলেও তিনি পেতেন পুরস্কারের একটা অতি তুচ্ছ অংশ মাত্র।

57. দ্রুত বংশবৃদ্ধি : পেকে ওঠা একটি পপি বা পোস্ত ফল ক্ষুদে ক্ষুদে দানায় ভরা; এই প্রত্যেকটি দানাবীজ থেকে একটি করে গাছ গজাতে পারে। আমরা যতোগুলো বীজ বুনেছি তার প্রত্যেকটি থেকে যদি একটা করে গাছ গজায়, তাহলে পপি গাছের সংখ্যা কতো দাঁড়াবে? এটা বের করার জন্যে আমাদের অবশ্যই জানতে হবে—প্রত্যেকটি পপিতে কতোগুলো করে বীজদানা রয়েছে। কাজটা হয়তো খুব ক্লান্তিকর, কিন্তু ফলটা এতো আগ্রহ জাগাবার মতো যে, ধৈর্য ধরে কাজটা খুঁটিয়ে করলে পরিশ্রমটুকু সার্থক হবে। প্রথমতঃ, আপনি জেনে নেবেন যে, প্রত্যেকটি পপিতে গড়ে 3,000 বীজদানা আছে।

তারপর? লক্ষ্য করবেন—আমাদের ওই পপি গাছটির চারপাশে যদি যথেষ্ট ফসল ফলাবার মতো জমি থাকে, তাহলে প্রত্যেকটি বীজ থেকে একটি করে গাছ গজাবে এবং পরবর্তী গ্রীষ্মকালে আমরা পাব 3,000 পপি গাছ। মাত্র একটি পপি থেকে পুরো একটি পপি ক্ষেত।

এরপর কি হচ্ছে দেখা যাক। এই 3,000 গাছের প্রত্যেকটিতে অন্ততঃ একটি করে (অধিকাংশ ক্ষেত্রেই তার বেশি), 3,000 বীজদানা সমেত, পপি ধরবে। এগুলির প্রত্যেকটি থেকে আরও 3,000 নতুন গাছ গজাবে। সুতরাং, দ্বিতীয় বছরের শেষে আমাদের পপি গাছের সংখ্যা দাঁড়াবে অন্ততঃ $3{,}000 \times 3{,}000 = 90{,}00{,}000$।

---

*আমাদের 'কুনকে'র মতো, কিন্তু মাপে আলাদা। একটি আট-গ্যালন পাত্রে যতো শস্য ধরে, সেই শস্যের পরিমাণ এক বুশেল।—অনুবাদক।

www.pathagar.com

সহজেই হিসেব করা যায় যে তৃতীয় বছরের শেষে আমাদের একটি মাত্র আদি পপির বংশধরের সংখ্যা দাঁড়াবে : 90,00,000 × 3,000 = 27,00,00,00,000

পঞ্চম বছরের শেষে পৃথিবীর বুকে আমাদের এই পপিগুলোর জন্যে যথেষ্ট জায়গা থাকবে না। কারণ, তখন সংখ্যাটি দাঁড়াবে : 8,10,00,00 00,00,000 × 3,000 = 2,43,00,00,00,00,00,00,000।

পৃথিবীর সমগ্র স্থলভাগের—অর্থাৎ, সমস্ত মহাদেশের আর দ্বীপের—আয়তন 13,50,00,000 বর্গ-কিলোমিটার বা 13,50,00,00,00,00,000 বর্গ-মিটার। এবং এটা হল, ততোদিনে যতো পপি গাছ গজিয়েছে, তার প্রায় 2,000 ভাগের এক ভাগ।

দেখতে পাচ্ছেন, সমস্ত পপি বীজ থেকে যদি গাছ হয়, তাহলে একটি পপির বংশধররা পাঁচ বছরের মধ্যেই—প্রতি বর্গ-মিটারে 2,000 পপি গাছ সমেত—ভূগোলকের সমস্ত স্থলভাগকে আচ্ছন্ন করে ফেলবে। ওই ক্ষুদে পপি বীজদানাটির মধ্যে সত্যিই একটি রাক্ষুসে সংখ্যা লুকিয়ে আছে, তাই নয় কি?

আরও কম বীজ উৎপন্ন হয়—এমন কোনো গাছ নিয়ে আমরা এই একই ব্যাপার চেষ্টা করে দেখতে পারি। ফলটা দাঁড়াবে একই—শুধু এক্ষেত্রে এর বংশধররা ভূপৃষ্ঠের পুরোটা আচ্ছন্ন করে ফেলতে সময় নেবে পাঁচ বছরের সামান্য কিছু বেশি। যেমন, একটা ড্যান্ডেলিয়ন নিন যেটা গড়ে বছরে 100টি বীজ* উৎপাদন করে। এই সমস্ত বীজ থেকে যদি গাছ গজাত, তাহলে আমরা পেতাম :

প্রথম বছরের শেষে			1টি গাছ
দ্বিতীয়	,,	,,	100 ,,
তৃতীয়	,,	,,	10,000 ,,
চতুর্থ	,,	,,	10,00,000 ,,
পঞ্চম	,,	,,	10,00,00,000 ,,
ষষ্ঠ	,,	,,	10,00,00,00,000 ,,
সপ্তম	,,	,,	10,00,00,00,00,000 ,,
অষ্টম	,,	,,	10,00,00,00,00,00,000 ,,
নবম	,,	,,	10,00,00,00,00,00,00,000 ,,

ভূগোলকের সমস্ত স্থলভাগে যতো বর্গ-মিটার জায়গা আছে, এ হল তার 70 গুণ বেশি।

* এমন ড্যান্ডেলিয়নও আছে যা বছরে 200 পর্যন্ত বীজ উৎপাদন করে যদিও এগুলি বিরল।

www.pathagar.com

সুতরাং নবম বছরের শেষে সমস্ত মহাদেশই ড্যান্ডেলিয়নে ছেয়ে যাবে—প্রতি বর্গ-মিটারে 70টি করে।

তাহলে, এরকমটি সত্যিই ঘটছে না কেন? কারণটা সহজ: বীজ-দানাগুলির একটা বিপুল সংখ্যাগরিষ্ঠ অংশ নতুন চারা হিসেবে শিকড় মেলার আগেই বিনষ্ট হয়ে যায়—হয় তারা অনুর্বর জমিতে পড়ে; শিকড় মেললেও অন্যান্য গাছের দ্বারা চাপা পড়ে যায় কিংবা পশু পাখির দ্বারা ধ্বংস হয়ে যায়। বীজ আর গাছের এই ব্যাপক ধ্বংসকাণ্ড যদি না ঘটত, তাহলে তাদের প্রত্যেকে দেখতে দেখতে আমাদের এই গ্রহকে আচ্ছন্ন করে ফেলত।

শুধু উদ্ভিদের ক্ষেত্রেই নয়, জীবজন্তুর ক্ষেত্রেও এটা প্রযোজ্য। এদের যদি মৃত্যু না হত, পৃথিবীটা, আজ হোক কাল হোক, মাত্র একজোড়া জন্তুর বংশধরদের অত্যধিক ভীড়ে আক্রান্ত হয়ে উঠত। মৃত্যু যদি প্রাণীর সংখ্যাবৃদ্ধির পথে অন্তরায় না হত, তাহলে যে কি ঘটত, তার একটা সুস্পষ্ট প্রমাণ হল ঝাঁক-ঝাঁক পঙ্গপাল—যেগুলি এক-একটি বিরাট এলাকাকে আচ্ছন্ন করে ফেলে। অল্প-বিস্তর বিশ বছরের মধ্যে আমাদের মহাদেশগুলি সমস্তই বন-জঙ্গলে আর স্তেপভূমিতে ছেয়ে যেত আর তার মধ্যে কোটি কোটি প্রাণী প্রাণধারণের জায়গাটুকুর জন্যে পরস্পরের সঙ্গে লড়াই করত। মহাসাগরগুলিতে এতো মাছ কিলবিল করত যে জাহাজ চলাচলের কোনো প্রশ্নই উঠত না এবং আকাশে উড়ন্ত অসংখ্য পাখি আর পতঙ্গের দরুন আমরা দিনের আলো প্রায় দেখতেই পেতাম না।

উদাহরণ হিসেবে, সাধারণ মাছির কথাই ধরা যাক। এদের প্রচণ্ড প্রজনন-ক্ষমতা স্তম্ভিত করে দেবার মতো। মনে করা যাক, প্রত্যেক স্ত্রী-মাছি 120টি ডিম পাড়ে এবং গ্রীষ্মকালের মধ্যে এই 120টি ডিম থেকে বংশানুক্রমে সাত প্রজন্ম মাছি সৃষ্টি হবে যার অর্ধেক স্ত্রী-মাছি। মনে করা যাক, প্রথম ডিমগুলি পাড়া হল এপ্রিল 15 তারিখে এবং এইসব ডিম ফুটে বেরিয়ে আসা স্ত্রী-মাছিগুলি (ডিম পাড়ার দিন থেকে) বিশ দিনের মধ্যে যথেষ্ট বড়োসড়ো হয়ে নিজেরাই ডিম পাড়ার উপযুক্ত হয়ে উঠেছে। ব্যাপারটা দাঁড়াবে এই রকম:

এপ্রিল 15 তারিখে স্ত্রী-মাছিটি 120টি ডিম পাড়ল; মে-র শুরুতে 120টি মাছি ডিম ফুটে বেরুবে—যেগুলির মধ্যে 60টি স্ত্রী-মাছি।

মে 5 তারিখে প্রত্যেকটি স্ত্রী-মাছি 120টি করে ডিম পাড়ল এবং এই মাসের মাঝামাঝি $60 \times 120 = 7,200$ মাছি বেরুবে ডিম ফুটে—যেগুলির মধ্যে 3,600 স্ত্রী-মাছি।

মে 25 তারিখে এই 3,600 স্ত্রী-মাছির প্রত্যেকে 120টি করে ডিম পাড়ছে এবং জুন মাসের শুরুতে জন্ম নিচ্ছে $3,600 \times 120 = 4,32,000$ মাছি। এদের মধ্যে 2,16,000 স্ত্রী-মাছি।

www.pathagar.com

জুন 14 তারিখে এই স্ত্রী-মাছিগুলির প্রত্যেকে 120টি করে ডিম পাড়বে এবং মাসের শেষে ডিম ফুটে বেরুবে 2,59,20,000 মাছি—যার মধ্যে আছে 1,29,60,000 স্ত্রী-মাছি।

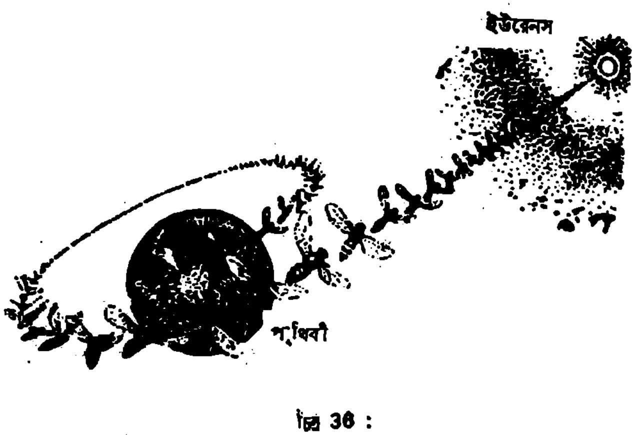
জুলাই 5 তারিখে এই 1,29,60,000 স্ত্রী-মাছি প্রত্যেকে 120টি করে ডিম পাড়বে, যার ফলে 1,55,52,00,000 মাছি জন্মাবে (77,76,00,000 স্ত্রী-মাছি)।

জুলাই 25 তারিখে মাছির সংখ্যা দাঁড়াবে 93,31,20,00,000—যাদের মধ্যে 46,65,60,00,000 স্ত্রী-মাছি।

আগস্ট 13 তারিখে সংখ্যাটা দাঁড়াচ্ছে 55,98,72,00,00,000। এদের মধ্যে স্ত্রী-মাছির সংখ্যা 27,99,36,00,00,000।

সেপ্টেম্বর 1 তারিখে 35,59,23,20,00,00,000 মাছি ডিম ফুটে বেরুবে।

এ সম্বন্ধে যদি কোনো ব্যবস্থা না নেওয়া হয় এবং একটাও মাছি যদি মারা না পড়ে, তাহলে মাত্র একটি গ্রীষ্মকাল জুড়ে জন্মাতে পারে এই যে মাছির দল, এদের বিপুল সংখ্যা সম্বন্ধে একটা আরো স্পষ্ট ছবি পাবার জন্যে দেখা যাক কি দাঁড়াবে যদি এরা পর-পর সারি বেঁধে একটা লাইন তৈরি করে। একটি মাছির দৈর্ঘ্য 5 মিলিমিটার আর এই লাইনটি দাঁড়াবে



চিত্র 36 :
মাত্র একটি গ্রীষ্মকালের মধ্যেই একটি মাছির বংশধররা লাইন বেঁধে দাঁড়ালে পৃথিবী থেকে ইউরেনসে গিয়ে পেঁছাবে

2,50,00,00,000 কিলোমিটার দীর্ঘ, অর্থাৎ পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্বের 18 গুণ বেশি (অথবা, পৃথিবী থেকে বহু দূরের গ্রহগুলির অন্যতম ইউরেনস-এর দূরত্বের প্রায় সমান)।

www.pathagar.com

উপসংহারে, জীবজন্তুর অনন্যসাধারণ দ্রুত হারে বংশবৃদ্ধি সংক্রান্ত কিছু তথ্য এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে।

আমেরিকায় আদিতে **চড়ুইপাখি** ছিল না। শস্যের পক্ষে ক্ষতিকর কীটপতঙ্গ ধ্বংস করায় সুনির্দিষ্ট উদ্দেশ্য নিয়েই তাদের মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে নিয়ে আসা হয়। আমরা জানি, চড়ুইপাখি সর্বভুক শুঁয়োপোকা আর কীটপতঙ্গ খেয়ে বাঁচে। মনে হয় চড়ুইপাখিদের দেশটাকে খুব ভালো লেগে গিয়েছিল—তাদের ধ্বংস করার মতো কোনো জন্তু বা শিকারী পাখি সে দেশে ছিল না এবং তারা অতি দ্রুত হারে বংশবৃদ্ধি ঘটাতে থাকে। শস্যনাশক কীটপতঙ্গের সংখ্যা ক্রমেই কমে আসতে লাগল, কিন্তু চড়ুইদের সংখ্যা বেড়ে চলল প্রচণ্ড দ্রুত হারে। শেষ পর্যন্ত, তাদের জন্যে আর যথেষ্ট পরিমাণে কীটতপঙ্গ না থাকায়, তারা ফসল ধ্বংস করতে শুরু করে দিল।*

তখন চড়ুইপাখিদের বিরুদ্ধে রীতিমত যুদ্ধ ঘোষণা করা হল এবং দেখা গেল—সেটা এতোই ব্যয়বহুল যে পরে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে যে-কোনো জন্তুর আমদানি নিষিদ্ধ করে আইন বিধিবদ্ধ করতে হয়েছিল।

আরেকটি উদাহরণ: ইউরোপীয়রা যখন অস্ট্রেলিয়া আবিষ্কার করে তখন সেখানে **খরগোশ** ছিল না। অষ্টাদশ শতাব্দীর শেষের দিকে সেখানে প্রথম কয়েকটি খরগোশ আনা হয় এবং যেহেতু খরগোশ মেরে খাবার মতো কোনো শিকারী জন্তু ছিল না, সেইহেতু তাদের বংশবৃদ্ধি ঘটে চলে প্রচণ্ড দ্রুত হারে। অল্পদিনের মধ্যেই বিরাট বিরাট খরগোশের পাল অস্ট্রেলিয়া ছেয়ে ফেলে এবং ফসল ধ্বংস করতে থাকে। দেশজুড়ে এক সর্বনেশে অবস্থা দেখা দেয় এবং এদের ধ্বংস করার জন্যে বিপুল পরিমাণ অর্থ ব্যয় করা হতে থাকে।

জনসাধারণ দৃঢ়প্রতিজ্ঞ হয়ে ব্যবস্থা অবলম্বন করেছিল বলেই এই মহা বিপর্যয়কে রোধ করা গিয়েছিল। পরে ক্যালিফোর্নিয়াতেও মোটামুটি এই রকম ঘটনা ঘটেছিল।

তৃতীয় ঘটনাটি ঘটে জ্যামেইকায়। সেখানে ছিল প্রচুর সংখ্যায় বিষধর সাপ। এদের ধ্বংস করার জন্যে সাপের ঘোর শত্রু হিসেবে পরিচিত **কেরানী পাখি** (secretory bird) আনার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়। অল্পকালের মধ্যেই সাপের সংখ্যা যে কমে গেল, তা ঠিক। কিন্তু, এর ফলে, সাপরা যাদের গিলে খেত, সেই মেঠো ইঁদুরদের সংখ্যা বেড়ে যেতে শুরু করল। এই ইঁদুররা আখ ক্ষেতের এতো বেশি ক্ষতি করে যে এদের বংশলোপ ঘটাবার জন্যে চাষীদের যুদ্ধ ঘোষণা করতে হয়। তারা নিয়ে এল চারজোড়া ভারতীয় **বেজী**—যাদের ইঁদুরেরা শত্রু বলে

* হাওয়াইতে এরা অন্য সমস্ত ছোট ছোট পাখিকে হটিয়ে দিয়েছিল।

www.pathagar.com

সবাই জানে। এই বেজীদের অবাধে বংশবৃদ্ধি ঘটাতে দেওয়া হল এবং অল্পকালের মধ্যেই দ্বীপটি ভরে গেল বেজীতে। বছর দশেকের মধ্যে এরা প্রায় সমস্ত ইঁদুরেই ধ্বংস করল বটে, কিন্তু তা করতে গিয়ে তারা সর্বভুক হয়ে দাঁড়াল—শিশুদের, কুকুরছানা আর সদ্যোজাত শুয়োরছানাদের, মুরগিছানাদের তারা আক্রমণ করতে শুরু করল, ডিম ধ্বংস করে দিতে লাগল। সংখ্যা-বৃদ্ধি ঘটার সঙ্গে সঙ্গে এরা ছেয়ে ফেলল সমস্ত গমের ক্ষেত, আখের ক্ষেত আর ফলবাগিচা। দ্বীপবাসীদের এবার তাদের ভূতপূর্ব মিত্রদের বিরুদ্ধে দাঁড়াতে হল, কিন্তু ক্ষতিটাকে রোধ করার ব্যাপারে মাত্র আংশিক সাফল্য অর্জন করতে পেরেছিল তারা।

58. বিনি পয়সার ভোজ : দশজন তরুণ, তাদের মাধ্যমিক স্কুল থেকে পাস করে বেরুনো উপলক্ষে, একটা রেস্তরাঁয় গিয়ে খাওয়াদাওয়া করে আনন্দ করবে বলে স্থির করল। একসঙ্গে জড়ো হবার পর প্রথম পদটি যখন পরিবেশন করা হয়েছে, তখন তারা কে কোন্ চেয়ারে বসবে তাই নিয়ে তর্ক শুরু করে দিল। কেউ প্রস্তাব করল নামের আদ্যাক্ষর অনুযায়ী বর্ণানুক্রমিক ভাবে বসা হোক; কেউ প্রস্তাব করল : বয়েস অনুযায়ী; আবার অন্যেরা বলল : উচ্চতা অনুযায়ী ইত্যাদি। তর্ক চলছে তো চলছেই। খাবার জুড়িয়ে যাচ্ছে, তবু কেউ বসতে রাজি নয়। তখন ওয়েটার সমস্যাটার সমাধান করে দিল।

"শুনুন, তরুণ বন্ধুরা," বলল সে, "যে যেখানে আছেন বসুন দেখি। আমি যা বলি শুনুন।"

তরুণেরা তার কথা মেনে নিল। ওয়েটার তখন বলল :

"আপনাদের কেউ-একজন, এখন আপনারা যে-ক্রমানুসারে বসেছেন, সেটা লিখে রাখুন। কাল আবার এখানে এসে ভিন্ন কোনো ক্রমানুসারে বসবেন। পরশু দিন এসে আবার অন্য কোনো ক্রমানুসারে বসবেন। এবং যতোদিন না বসবার এই সমস্ত রকমের বিন্যাস শেষ হয়ে যাচ্ছে ততোদিন পর্যন্ত এইভাবে চলুক। তারপর, এখন আপনারা যে-ক্রমানুসারে বসেছেন, আবার ঠিক এই ভাবেই বসার পালা যেদিন ফিরে আসবে, সেদিন আপনাদের ইচ্ছে মতো যে কোনো সুখাদ্য আমি আপনাদের বিনামূল্যে পরিবেশন করব বলে প্রতিজ্ঞা করছি।"

প্রস্তাবটা লোভনীয় এবং প্রতিদিন এই রেস্তরাঁয় সবাই জড়ো হয়ে টেবিলটাকে ঘিরে বসার সমস্ত সম্ভাব্য উপায় যাচাই করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হল যাতে ওয়েটারের প্রতিশ্রুতি অনুযায়ী বিনা মূল্যে ভোজটা খাওয়া যেতে পারে।

সেই দিনটি কিন্তু কোনোদিনই আসেনি। এবং সেটা এই কারণে নয়

www.pathagar.com

যে, ওয়েটার তার কথা রাখতে পারেনি। সেটা এই কারণে যে দশজন লোকের পক্ষে ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস অনুযায়ী টেবিলে বসার সংখ্যাটা অত্যন্ত বেশি—বাস্তবিকপক্ষে, 36,28,800 বার ভিন্ন ভিন্ন ভাবে বসা যায়। এবং, এই এতো বার বসতে হলে, দেখতে পাবেন, তাদের প্রায় 10,000 বছর লেগে যাবে।

দশজন লোকের পক্ষে টেবিলে বসার যে এতোগুলি উপায় আছে, সেটা বোধহয় আপনার বিশ্বাস হচ্ছে না? ব্যাপারটা যতোদূর সম্ভব সহজে বুঝবার জন্যে, তিনটি জিনিস নিয়ে শুরু করা যাক। এই জিনিস তিনটিকে আমরা বলব A, B আর C।

এই জিনিসগুলিকে কতো রকম ভিন্ন ভিন্ন ভাবে সাজিয়ে রাখা যায়, সেটাই আমরা বের করতে চাই। প্রথমে C-কে সরিয়ে রেখে আমরা মাত্র দুটি জিনিস ধরছি। দেখতে পাব—মাত্র দুই ভাবে এই দুটি জিনিসকে সংস্থাপন করা যায় (চিত্র 37)।

এবার এই প্রত্যেকটি জোড়ের সঙ্গে C-কে যোগ করা যাক। ভিন্ন ভিন্ন তিন রকম ভাবে আমরা তা করতে পারি। আমরা C-কে বসাতে পারি।

(1) জোড়াটির পিছনে,

(2) জোড়াটির সামনে, এবং

(3) জোড়াটির মাঝখানে।

স্পষ্টতঃই C-কে বসানোর আর কোনো উপায় নেই। এবং যেহেতু আমাদের দুটি জোড়া রয়েছে—AB এবং BC, সেই হেতু আমরা জিনিসগুলিকে $2 \times 3 = 6$ রকমে সাজাতে পারি।

কতো রকমে এই জিনিস তিনটিকে সাজানো যেতে পারে, তা 38নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

এবার আমরা চারটি জিনিস নেব—A, B, C এবং D। আপাততঃ আমরা D-কে সরিয়ে রেখে, বাকি তিনটি জিনিসকে যতো রকমে সাজানো যায় তাই সাজাব। আমরা আগেই জেনেছি যে ছয় রকমে সেটা করা যায়। এই অন্য তিনটি জিনিসের ছয়টি সংস্থাপনের প্রত্যেকটিতে চতুর্থ জিনিস D-কে যোগ করার কতো রকম উপায় আছে? দেখা যাক। আমরা D-কে বসাতে পারি।

(1) তিনটি জিনিসের পিছনে,

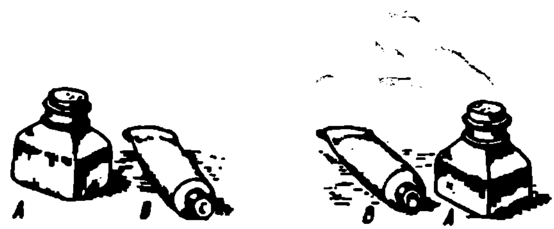
(2) তাদের সামনে,

(3) প্রথম ও দ্বিতীয় জিনিস দুটির মাঝখানে,

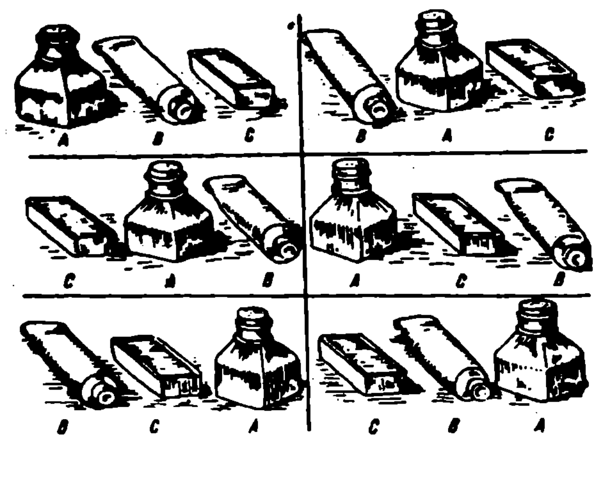
(4) দ্বিতীয় ও তৃতীয় জিনিস দুটির মাঝখানে।

অতএব, আমরা $6 \times 4 = 24$টি বিন্যাস পাচ্ছি।

www.pathagar.com



চিত্র 37 : দুটি জিনিসকে মাত্র দুই ভাবেই সাজানো যেতে পারে



চিত্র 38 : তিনটি জিনিসকে ছয় রকমে সাজানো যেতে পারে

www.pathagar.com

এবং, যেহেতু $6=2\times3$ এবং $2=1\times2$, সেই হেতু এই সমস্ত রকমের বিন্যাসের সংখ্যাটিকে এই ভাবে লেখা যেতে পারে :

$$1\times2\times3\times4=24$$

এখন, আমরা যদি এই একই পদ্ধতি পাঁচটি জিনিসের বেলায় প্রয়োগ করি, তাহলে আমরা নিম্নলিখিত সংখ্যাটি পাচ্ছি :

$$1\times2\times3\times4\times5=120\ ;$$

এবং ছয়টি জিনিসের বেলায় :

$$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$$ ইত্যাদি।

এবার ওই দশজন তরুণের কথায় ফিরে আসা যাক। এক্ষেত্রে সম্ভাব্য-বিন্যাসগুলির সংখ্যাটা দাঁড়াবে :

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$$

এটা গুণ করার কষ্টটুকু যদি আমরা স্বীকার করি, তাহলে সংখ্যাটা দাঁড়াবে—আগেই যেটা উল্লেখ করা হয়েছে : 36,28,800।

হিসেব কষাটা ঢের বেশি জটিল হয়ে দাঁড়াত যদি এই তরুণ বয়সীদের অর্ধেক মেয়ে হত আর তারা প্রত্যেকে যদি ক্রমান্বয়ে প্রত্যেক তরুণের সঙ্গে পাশাপাশি বসতে চাইত। এ ক্ষেত্রে যদিও বিন্যাসের সংখ্যাটা অনেক কম হবে, তবু সেটা বের করাটা হবে ঢের বেশি কঠিন।

একজন তরুণকে, টেবিলের যে-কোনো জায়গায় সে বসতে চায়, সেইখানেই বসাতে দেওয়া হোক। অন্য চারজন, নিজেদের মধ্যে মেয়েদের জন্যে খালি চেয়ার ছেড়ে দিয়ে, $1\times2\times3\times4=24$ রকম বিভিন্ন বিন্যাসে বসতে পারে। 10টি চেয়ার আছে বলে প্রথম তরুণটি 10টি ভিন্ন ভিন্ন স্থানে বসতে পারে। অতএব, $10\times24=240$টি বিভিন্ন রকমে ওই ছেলেরা টেবিল ঘিরে তাদের আসনে বসতে পারে।

ছেলেদের চেয়ারের ফাঁকে ফাঁকে পাঁচটি মেয়ের আসন দখল করে বসার কতো রকম সংস্থান আছে? স্পষ্টতঃই $1\times2\times3\times4\times5=120$ রকম। প্রত্যেক ছেলের এই 240টি অবস্থানের প্রতিটির সঙ্গে, প্রত্যেকটি মেয়ের 120টি অবস্থানের প্রত্যেকটিকে যুক্ত করে, আমরা পাচ্ছি সম্ভাব্য বিন্যাসের সংখ্যাটি। এটা দাঁড়াচ্ছে : $240\times120=28,800$।

অবশ্যই এটা এই তরুণদের জন্যে 36,28,800 বিন্যাসের চেয়ে অনেক কম এবং এর জন্যে সময় লাগবে 79 বছরের যৎসামান্য কম। এবং, এর অর্থ : এই তরুণরা—স্বয়ং এই ওয়েটারটির কাছ থেকে না হলেও, তার কোনো উত্তরাধিকারীর কাছ থেকে—ওই বিনি পয়সার ভোজটি খেতে পাবে যখন তাদের বয়স হবে প্রায় 100 বছর—যদি তারা অতোদিন বাঁচে।

www.pathagar.com

এতোক্ষণে আমরা বিভিন্ন রকমের সংস্থাপনের সংখ্যা বের করার হিসেব শিখে গেছি ; তাই, "পনেরোর ধাঁধা"য় (দ্বিতীয় অধ্যায়) ব্লকগুলোর* সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি। ভিন্ন ভাষায় বলতে গেলে, এই খেলাটি কোনো খেলোয়াড়ের সামনে যেসব সমস্যা উপস্থিত করে থাকে, সেই সমস্যাগুলির সংখ্যা আমরা হিসেব কষে বের করতে পারি। সহজেই দেখা যাচ্ছে যে, ব্লকগুলিকে যে কতো রকমে সাজানো যেতে পারে, তার মোট সংখ্যাটি নির্ণয় করাটাই আমাদের কাজ। সেটা করার জন্যে আমাদের এই গুণটির ফল বের করতে হবে :

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15$

উত্তরটা হল : 13,07,67,43,65,000।

এই বিরাট সংখ্যক সমস্যার অর্ধেকই সমাধানের অতীত। সুতরাং, 6,00,00,00,00,000-এরও বেশি সংখ্যক সমস্যার কোনো সমাধান নেই। লোকে যে এটা সন্দেহ পর্যন্ত করেনি—এই তথ্যটা থেকেই "পনেরোর ধাঁধা"র উন্মত্ত নেশার ব্যাখ্যা পাওয়া যাচ্ছে।

এটাও লক্ষ্য করা যাক যে, যদি প্রতি সেকেণ্ডে একটা করে ব্লক সরানো সম্ভব হত এবং যদি কেউ মুহূর্তের জন্যেও বিরতি না দিয়ে খেলাটায় লেগে থাকত, তাহলে সম্ভাব্য সমস্ত বিন্যাস করে দেখতে 40,000 বছরেরও বেশি লেগে যেত।

বিভিন্ন জিনিসকে ভিন্ন ভিন্ন রকমে সাজানো সম্বন্ধে এই আলোচনার উপসংহারে, আসুন, সরাসরি আমাদের স্কুল জীবন থেকে নেওয়া একটি সমস্যার সমাধান করা যাক।

ধরা যাক, একটি ক্লাসে 25 জন ছাত্র রয়েছে। কতো রকম ভাবে আমরা তাদের বসাতে পারি ?

ওপরে আমরা যেসব সমস্যার সমাধান করেছি, সেগুলি যাঁরা ভালো ভাবে বুঝেছেন, তাঁদের পক্ষে এটার সমাধান করাটা কঠিন কিছু নয়। আমাদের শুধু ওই 25টি সংখ্যা গুণ করতে হবে, এই ভাবে : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times 23 \times 24 \times 25$;

গণিত আমাদের বিভিন্ন অংকের হিসেবকে সরল করে নেবার নানা পদ্ধতি দেখিয়ে দিয়েছে। কিন্তু উপরের এই অংকটি কষার সেরকম সরলীকৃত কোনো পদ্ধতি নেই। সঠিক গুণফলটি বের করার একমাত্র উপায় হল এই সমস্ত

---

* নিচে ডানদিকের কোণের ঘরটি অবশ্যই সবসময়ে খালি থাকবে।

www.pathagar.com

সংখ্যাকে গুণ করা।* এবং সময় বাঁচাবার একমাত্র পথ হল গুণকগুলিকে যথাযথ ভাবে সাজিয়ে নেওয়া। গুণফলটি স্তম্ভিত করে দেবার মতো—26টি অঙ্কের সংখ্যাটি এতোই বিরাট যে সেটা আমাদের কল্পনাশক্তির অতীতে। সংখ্যাটি হল এই: 1,55,11,21,00,43,33,09,85,98,40,00,000

এ পর্যন্ত আমরা যতোগুলো সংখ্যার মুখোমুখি হয়েছি, এটাই—বলা বাহুল্য—সেগুলির মধ্যে বৃহত্তম। সুতরাং রাক্ষুসে সংখ্যা হিসেবে এটা আর সবাইকে হার মানিয়েছে। এর তুলনায় সমস্ত সমুদ্র আর মহাসাগরের জলবিন্দুর সংখ্যা বেশ কিছুটা পরিমিত।

59. মুদ্রার কৌশল : মনে পড়ছে, ছেলেবেলায় আমার দাদা কয়েকটি মুদ্রা নিয়ে একটি আগ্রহ জাগাবার মতো খেলা দেখিয়েছিল। প্রথমে তিনটি পিরিচ পাশাপাশি রেখে, প্রথম পিরিচটিতে বিভিন্ন মূল্যের পাঁচটি মুদ্রা—এক-রুবল মুদ্রা, 50-কোপেক মুদ্রা, 20-কোপেক মুদ্রা, 15-কোপেক মুদ্রা, এবং 10-কোপেক মুদ্রা† —এই ক্রমান্বয়ে একটির উপরে অপরটি সাজিয়ে রাখল সে। যেটা করতে হবে, তা হল—নিচের এই তিনটি নিয়ম মেনে - ওই মুদ্রাগুলিকে তৃতীয় পিরিচটিতে স্থানান্তরিত করতে হবে :

(1) একবারে মাত্র একটি মুদ্রাকেই স্থানান্তরিত করা যাবে ;

(2) কোনো ছোট আকারের মুদ্রার ওপরে তার চেয়ে বড়ো আকারের কোনো মুদ্রাকে রাখা চলবে না ; এবং

(3) উপরোক্ত দুটি নিয়ম মেনে, মাঝখানের পিরিচটিকে **সাময়িক ভাবে** ব্যবহার করা যাবে ; কিন্তু শেষে সব মুদ্রাগুলিকে অবশ্যই তৃতীয় পিরিচে আনা চাই এবং আদিতে তারা যে ক্রমান্বয়ে সাজানো ছিল ঠিক সেই ভাবেই সাজানো চাই।

---

* প্রসঙ্গতঃ বলা যায়, এটা **মোটামুটি** হিসেব করা যেতে পারে অপেক্ষাকৃত সহজে। গণিতে প্রায়ই 1 থেকে অন্য কোনো সংখ্যা—ধরা যাক, সেটা n— পর্যন্ত সমস্ত পূর্ণসংখ্যার গুণফল হিসেব করার দরকার হয়। এই গুণফলের গাণিতিক সংকেত-চিহ্ন হল n ! এবং একে বলা হয় n-গৌণিক। যেমন, ওপরের গুণটি বোঝানো হচ্ছে 26 ! লিখে। অষ্টাদশ শতকে স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জেমস স্টার্লিং একটি সূত্র তৈরি করেন – যার দ্বারা বিভিন্ন গৌণিকের মোটামুটি বা খুব কাছাকাছি ফল বের করা সম্ভব হয়ে দাঁড়ায়। ওই সূত্রটি এই রকম :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

যেক্ষেত্রে π ('পাই') = 3·141 ...
এবং e (লগারিদমের নিধান বা base) = 2·718..., যে-দুটি সংখ্যা বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধানে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নিয়ে থাকে। স্টার্লিং-এর সূত্র প্রয়োগ করে (এক্ষেত্রে n = 26) এবং লগারিদম্‌ সারণি দেখে, এই সংখ্যাটি সহজেই পাওয়া যাচ্ছে :

$$25! \approx 1{\cdot}55 \times 10^{25}$$

† বিভিন্ন আকারের যে-কোনো পাঁচটি মুদ্রা নিয়ে এটা খেলা যেতে পারে।

www.pathagar.com

দাদা বলেছিল, "দেখতেই পাচ্ছ, নিয়মগুলো দিব্যি সহজ। এবার কাজে লেগে যাও দিকি।"

আমি 10-কোপেক মুদ্রাটিকে তুলে নিয়ে তৃতীয় পিরিচের ওপরে রাখলাম, তারপর 15-কোপেক মুদ্রাটিকে রাখলাম মাঝখানের পিরিচে। আর, তারপরেই আটকে গেলাম। 20-কোপেক মুদ্রাটিকে রাখব কোথায়?

"কি হল?" দাদা আমাকে সাহায্য করল। "10 কোপেক মুদ্রাটাকে 15-কোপেক মুদ্রাটির ওপরে রাখো। এবার তৃতীয় পিরিচটি খালি পাবে 20-কোপেক মুদ্রাটি রাখার জন্যে।"

তাই করলাম। কিন্তু তাতে যে আমার সমস্ত বাধার অবসান ঘটল, তা নয়। 50-কোপেক মুদ্রাটিকে এবার কোথায় রাখা যায়? সমাধানের পথটা দেখতে পেলাম কিছুক্ষণের মধ্যেই: 10-কোপেক মুদ্রাটিকে রাখলাম প্রথম পিরিচে, 15 কোপেক মুদ্রাটিকে রাখলাম তৃতীয় পিরিচে আর তারপর 10-কোপেক মুদ্রাটিকেও সেখানেই স্থানান্তরিত করলাম। এবার আমি 50-কোপেক মুদ্রাটিকে দ্বিতীয় পিরিচে রাখবার সুযোগ পেলাম। তারপর বহুবার চালাচালি করার পর আমি রুবল-মুদ্রাটিকে প্রথম পিরিচ থেকে স্থানান্তরিত করতে সফল হলাম এবং শেষ পর্যন্ত পুরো স্তূপটাকে তৃতীয় পিরিচে আনলাম।

সমস্যাটির যেভাবে সমাধান করেছি, তার জন্যে আমার প্রশংসা করে দাদা জিজ্ঞেস করল, "তাহলে, সর্বমোট কতোবার চালাচালি করেছ?"

"জানিনে। গুণে রাখিনি।"

"ঠিক আছে। এসো গোণা যাক। সবচেয়ে কম বার চালাচালি করে কি ভাবে এটা করা যায়, তা জেনে রাখার মতো। ধরা যাক, আমাদের মাত্র দুটি মুদ্রা ছিল—পাঁচটি নয়—15-কোপেক আর 10-কোপেক মুদ্রা। সেক্ষেত্রে তোমার ক'বার চালাচালি করার দরকার হচ্ছে?"

"তিন বার। 10-কোপেক মুদ্রাটিকে মাঝখানের পিরিচে রাখব, 15-কোপেক মুদ্রাটিকে রাখব তৃতীয় পিরিচে। আর তারপরে, সেটার ওপরে 10-কোপেক মুদ্রাটিকে রাখব।"

"ঠিক। একবার আরেকটি মুদ্রা—20-কোপেক মুদ্রাটি—যোগ করা যাক এবং দেখা যাক তিনটি মুদ্রার এই স্তূপটিকে স্থানান্তরিত করতে ক'বার চালাচালি করতে হয়। প্রথমে আমরা ছোট মুদ্রা দুটিকে মাঝখানের পিরিচে স্থানান্তরিত করলাম। আমরা জানি, সেটার জন্যে আমাদের তিনবার চালাচালি করা দরকার। তারপর আমরা 20-কোপেকটাকে রাখছি তৃতীয় পিরিচে—এটা

www.pathagar.com

আরেকটি চাল। এরপর আমরা দ্বিতীয় পিরিচের মুদ্রা দুটিকে তৃতীয় পিরিচে নিয়ে যাচ্ছি এবং সেটা করতে গিয়ে আরও তিনবার চালতে হচ্ছে। সুতরাং আমাদের $3+1+3=7$ বার চালাচালি করতে হচ্ছে।"

"চারটে মুদ্রার বেলায় আমাদের কতোবার চালাচালি করতে হবে, সেটা আমাকে হিসেব করতে দাও", আমি দাদার কথায় বাধা দিয়ে বললাম, "প্রথমে আমি তিনটি ছোট মুদ্রাকে মাঝের পিরিচটিতে নিয়ে যাচ্ছি। এর জন্যে সাতবার চালতে হচ্ছে। তারপর আমি 50-কোপেকটাকে তৃতীয় পিরিচে রাখছি। এটা আরেকটা চাল। এবং, শেষ পর্যন্ত তিনটি ছোট মুদ্রাকে নিয়ে যাচ্ছি তৃতীয় পিরিচে—যার জন্যে আরও সাতবার চালতে হচ্ছে। মোট দাঁড়াচ্ছে $7+1+7=15$টি চাল।"

"চমৎকার। তাহলে পাঁচটি মুদ্রার বেলায় ?"

"সহজ : $15+1+15=31$" তৎক্ষণাৎ জবাব দিলাম আমি।

"বেশ, বেশ। বুঝে গেছ দেখছি। কিন্তু আমি তোমাকে সেটা হিসেব করার আরও সহজ একটা উপায় দেখিয়ে দিচ্ছি। এই-যে সংখ্যাগুলো আমরা পেয়েছি, সেগুলো লক্ষ্য করো : 3, 7, 15 আর 31। এই সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটাই পাওয়া যাচ্ছে, 2-কে 2 দিয়ে একবার বা কয়েক বার গুণ করে আর গুণফল থেকে 1 বিয়োগ করে। এই দ্যাখো।"

দাদা এই সারণিটা লিখল :

$$3=2\times2-1$$

$$7=2\times2\times2-1$$

$$15=2\times2\times2\times2-1$$

$$31=2\times2\times2\times2\times2-1$$

"এবার বুঝেছি। যতোগুলো মুদ্রা স্থানান্তরিত করতে হবে, ঠিক ততোবার 2-কে 2 দিয়ে গুণ করব এবং গুণফল থেকে 1 বিয়োগ করব। এবার জেনে গেছি মুদ্রার যে-কোনো স্তূপের বেলায় কতোবার চালাচালি করতে হবে। যেমন, যদি সাতটা মুদ্রা থাকে তাহলে হিসেবটা দাঁড়াবে এই রকম :

$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2-1=128-1=127$"

"বেশ," বলল দাদা, "এবারে এই অতি প্রাচীন খেলাটা জেনে গেছ তো। শুধু আরেকটি নিয়ম মনে রাখা চাই : মুদ্রার সংখ্যা যদি বেজোড় হয়, তাহলে প্রথম মুদ্রাটি রাখবে তৃতীয় পিরিচে ; জোড় হলে, দ্বিতীয় পিরিচটি দিয়ে শুরু করবে।"

www.pathagar.com

"খেলাটি কি সত্যিই খুব প্রাচীন? আমি ভেবেছিলাম তুমি নিজেই এটা বের করেছ!" বলে উঠলাম আমি।

"না, আমি শুধু মুদ্রা দিয়ে খেলাটাকে আধুনিক করে তুলেছি। খেলাটি অতি সুদূর অতীতের এবং এটা ভারত থেকে এসেছে বলে মনে হয়। এটার সঙ্গে খুব আগ্রহ জাগাবার মতো একটা কিংবদন্তী জড়িত আছে। বারাণসীতে একটি মন্দির আছে। শোনা যায়, ব্রহ্মা যখন বিশ্ব সৃষ্টি করেন, তখন তিনি সেই মন্দিরে তিনটি হীরক দণ্ড স্থাপন করেন এবং একটি দণ্ডের মধ্যে 64টি সোনার বালা এমন ভাবে পর-পর ঢুকিয়ে রাখেন যাতে সবচেয়ে বড়ো বালাটি রইল সবার নিচে আর সবচেয়ে ছোটটি সবার ওপরে। সেই থেকে ওই মন্দিরের পুরোহিতদের দিনরাত অবিরাম কাজ করে যেতে হচ্ছে ওই বালাগুলিকে একটি দণ্ড থেকে আরেকটি দণ্ডে একই ক্রমানুসারে স্থানান্তরিত করার জন্যে—তৃতীয় দণ্ডটিকে সহায়ক হিসেবে কাজে লাগিয়ে। মুদ্রাগুলির বেলায় যে-নিয়ম, এক্ষেত্রেও সেই একই নিয়ম। তাদের একবারে মাত্র একটি বালাই স্থানান্তরিত করার অনুমতি দেওয়া হয়েছে, এবং কোনো অপেক্ষাকৃত বড়ো মাপের বালার ওপরে সেটার চেয়ে ছোট মাপের বালা রাখাটা নিষিদ্ধ। এই সমস্ত বালা যখন একটি দণ্ড থেকে অন্য দণ্ডে স্থানান্তরিত হবে, তখন. এই কিংবদন্তী অনুযায়ী, পৃথিবীর অস্তিত্ব লোপ পাবে।"

চিত্র 39 :

বালাগুলিকে একটি দণ্ড থেকে অন্যটিতে চালান করার জন্যে পুরোহিতরা দিনরাত অবিরাম কাজ করে চলেছেন।

"তাহলে তো—এই কিংবদন্তী যদি বিশ্বাস করতে হয়—পৃথিবীটা বহুকাল আগেই লোপ পেত।"

"তুমি ভাবছ এই 64টি বালাকে স্থানান্তরিত করতে খুব বেশি সময় লাগার কথা নয়' তাই না?"

www.pathagar.com

"নিশ্চয়ই না। ধরা যাক, প্রত্যেকটি চালের জন্যে এক সেকেন্ড সময় লাগে। তাহলে এক ঘণ্টায় 3.600 বার চালাচালি করা যেতে পারে।"

"তারপর ?"

"তাহলে এক দিনে প্রায় 1,00,000 বার এবং দশ দিনে প্রায় 10,00,000 বার চালাচালি করা যায়। এবং আমি নিশ্চয় করে বলতে পারি, দশ লক্ষ বার চালাচালি করেই তুমি এক হাজারটা বালাকে একটি দণ্ড থেকে আরেকটিতে নিয়ে যেতে পারবে।"

"ওইখানেই ভুল হচ্ছে তোমার। এই 64টি বালাকে স্থানান্তরিত করতে তোমার লাগবে 5,00,000 নিযুত বছর—এর চেয়ে এক মুহূর্তও কম নয়।"

"তা কেন ? চালাচালি করার মোট সংখ্যাটা হবে 2-কে 64 বার 2 দিয়ে গুণ করে তা থেকে 1 বিয়োগ করলে যা হয় তাই ! অর্থাৎ, সংখ্যাটা হল…একটু দাঁড়াও, এক্ষুণি সংখ্যাটা বলে দিচ্ছি।"

"বেশ। আর, তুমি যতোক্ষণে এই গুণটা শেষ করছ, অতোক্ষণ আমি অন্য কয়েকটা কাজ সেরে আসার মতো যথেষ্ট সময় পাব।"

দাদা চলে গেল আর আমি একমনে হিসেব কষতে লেগে গেলাম। প্রথমে 2^{16} কতো হয়, বের করে নিলাম। ফল হল 65,536। এই সংখ্যাটিকে আবার ওই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলাম। দ্বিতীয় গুণফলটিকে আবার সেই একই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলাম এবং 1 বিয়োগ করলাম। এই সবকিছুর পরে যে-সংখ্যাটি পেলাম, সেটি এই :

1,84,46,74,40,73,70,95,51,615*

দাদা দেখছি ঠিকই বলেছিল।

এই প্রসঙ্গে, আমাদের পৃথিবীর বয়স জানার জন্যে আপনাদের আগ্রহ থাকতে পারে। বিজ্ঞানীরা সেটা হিসেব কষে বের করেছেন—যদিও সেটা একটা কাছাকাছি হিসেব মাত্র :

সূর্যের অস্তিত্বকাল		50,00,00,00,00,000 বছর
পৃথিবী	…	3,00,00,00,000 বছর
পৃথিবীর বুকে জীবন	…	1,00,00,00,000 বছর
মানুষ	…	5,00,000 বছরের বেশি

60. একটি বাজি ধরা : আমাদের ছুটি কাটাবার 'হলিডে হোম'-এ দুপুরের খাওয়া সারছিলাম সবাই। কথাবার্তার মধ্যে, কোনো সমাপতনের

* এই সংখ্যাটি আমরা জানি। দাবাখেলা উদ্ভাবনের জন্যে চিসসা পুরস্কার হিসেবে এতোগুলি গমের দানাই চেয়েছিলেন।

www.pathagar.com

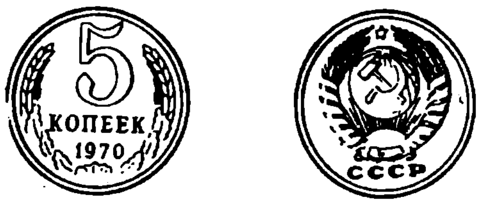
সম্ভাব্যতা নির্ধারণ করার প্রসঙ্গ উঠল। আমাদের একজন, তরুণ এক গণিতবিদ একটি মুদ্রা বের করে বলল :

"দেখুন, এই মুদ্রাটিকে টেবিলের উপরে আমি না দেখেই 'টস' করব। 'হেড' হবার সম্ভাব্যতা কতোখানি ?"

অন্য সবাই সমস্বরে বলে উঠল, "তার আগে বুঝিয়ে বলো, 'সম্ভাব্যতা' ব্যাপারটা কি। আমরা সবাই সেটা জানিনে।"

"সহজ ব্যাপার। একটি মুদ্রার মাত্র দু'রকমে পড়বার সম্ভাবনা রয়েছে : হয় 'হেড' না হয় 'টেল' হবে (চিত্র 40)। এই দুটির মধ্যে মাত্র একটাই হবে অনুকূল ঘটনা। এ থেকে আমরা এই সূত্রটি পাচ্ছি :

$$\frac{\text{অনুকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য ঘটনার সংখ্যা}}=\frac{1}{2}$$



চিত্র 40 : 'হেড' কিংবা 'টেল'

"এই $\frac{1}{2}$ ভগ্নাংশটি 'হেড' হবার সম্ভাব্যতাকে চিহ্নিত করছে।"

"একটি মুদ্রার বেলায় এটা সহজ", বাধা দিয়ে বলল একজন, "আরও জটিল কিছু নিয়ে এটা করো দিকি—যেমন ধরো, লুডো খেলার ছক্কা নিয়ে।"

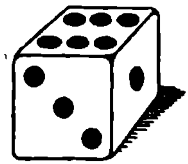
"বেশ তো," রাজি হল গণিতবিদটি, "একটা ছক্কাই নেওয়া যাক। এটা আকারে একটা ঘনক—যার প্রত্যেকটি তলে বিন্দু দিয়ে সংখ্যা চিহ্নিত আছে (চিত্র 41)। এখন ধরা যাক, 6 সংখ্যাটি হবার সম্ভাবনা কতোখানি ? সম্ভাব্য ঘটনা কতোগুলি হতে পারে ? ছক্কাটার ছ'টি তল আছে ; অতএব, 1 থেকে 6 পর্যন্ত যে-কোনো সংখ্যা দেখা দিতে পারে। আমাদের পক্ষে অনুকূল ঘটনা ঘটবে শুধু তখনই যখন 6 হবে। এক্ষেত্রে সম্ভাব্যতা দাঁড়াচ্ছে $\frac{1}{6}$।"

"যে-কোনো ঘটনার সম্ভাব্যতা হিসেব কষে বের করা কি সত্যিই সম্ভব ?" জিজ্ঞেস করল মেয়েদের মধ্যে একজন, "যেমন ধরো এই ব্যাপারটা : আমার একটা ধারণা জন্মেছে যে, প্রথম যে-মানুষটি আমাদের এই জানালার বাইরে দিয়ে এপাশ

www.pathagar.com

থেকে ওপাশে যাবে, সে হবে একজন পুরুষ। আমার এই ধারণাটা যে ঠিক, তার সম্ভাব্যতা কতোখানি ?"

"সেটার সম্ভাবনা ½—যদি আমরা এমন-কি এক বছরের একটি শিশু-ছেলেকেও পুরুষ বলে ধরে নিতে সম্মত থাকি। আমাদের এই পৃথিবীতে নারী-পুরুষের সংখ্যা মোটামুটি সমান-সমান।"



চিত্র 41 : একটি ছক্কা

"আর, প্রথম দুই ব্যক্তি যে পুরুষ হবে, তার সম্ভাব্যতা কতোটা ?" জিজ্ঞেস করল আরেকজন।

"এক্ষেত্রে হিসেব কষাটা আরও জটিল হয়ে দাঁড়াবে। সমস্ত সম্ভাব্য সমবায়গুলি যাচাই করা যাক। প্রথমতঃ, তাদের দুজনেরই পুরুষ হওয়া সম্ভব। দ্বিতীয়তঃ, প্রথমজন পুরুষ আর দ্বিতীয়জন নারী হতে পারে। তৃতীয়তঃ, এটারই বিপরীত, ক্রমে, প্রথমজন নারী আর দ্বিতীয়জন পুরুষ হতে পারে। এবং চতুর্থতঃ, তারা দুজনেই নারী হতে পারে। তাহলে সম্ভাব্য সমবায়গুলির সংখ্যা 4 এবং এগুলির মধ্যে মাত্র একটিই অনুকূল ঘটনা—প্রথমটি। তাহলে সম্ভাব্যতা হল ¼। আপনার সমস্যাটির সমাধান এটাই।"

"এটা স্পষ্টই বোঝা গেল। কিন্তু যখন সমস্যাটা তিনজন ব্যক্তিকে নিয়ে ? সেক্ষেত্রে, আমাদের জানালার ওপারে প্রথম যে-তিনজন যাবে, তাদের সকলেরই পুরুষ হবার সম্ভাবনা কতোখানি ?"

"সেটাও হিসেব করতে পারি আমরা। সম্ভাব্য সমবায়গুলির সংখ্যা গণনা করা থেকে শুরু করা যাক। দুজন পথ-চলতি ব্যক্তির বেলায়, আমরা দেখেছি, সমবায়ের সংখ্যা 4। তৃতীয় একজন পথ-চলতি ব্যক্তি যোগ করে আমরা সম্ভাব্য সমবায়ের সংখ্যা দ্বিগুণ করে তুলছি। কারণ, দুজন পথ-চলতি ব্যক্তির ওই 4টি গ্রুপের প্রত্যেকটির সঙ্গে হয় একজন পুরুষ না-হয় একজন মহিলা যুক্ত

www.pathagar.com

হতে পারে। অতএব এক্ষেত্রে সম্ভাব্য সমবায়ের সংখ্যা হবে $4 \times 2 = 8$। স্পষ্টতঃই, সম্ভাব্যতা হবে $\frac{1}{8}$—যেহেতু আমরা যেটা চাই সেই সমবায়টা হবে মাত্র একটাই। সম্ভাবনাগুলিকে গণনা করার পদ্ধতিটাকে মনে রাখা সহজ: দুজন পথিকের বেলায় সম্ভাব্যতা হল $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; তিনজনের ক্ষেত্রে সেটা $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; চারজনের বেলায় সম্ভাব্যতা হবে 4টি $\frac{1}{2}$-এর গুণফল। সম্ভাব্যতাটা, দেখতেই পাচ্ছেন, প্রতিবারই কমে যাচ্ছে।"

"তাহলে, 10 জন পথ-চলতি ব্যক্তির বেলায় সেটা কি হবে?"

"আপনি বলতে চান—প্রথম দশজন পথিকেরই পুরুষ হবার সম্ভাব্যতা কতোখানি? এর জন্যে আমাদের 10টি $\frac{1}{2}$-এর গুণফল বের করতে হবে। সেটা দাঁড়াবে $\frac{1}{1024}$, হাজার ভাগের এক ভাগেরও কম। অর্থাৎ, আপনি যদি তাই হতে যাচ্ছে বলে 1 রুবল বাজি ধরেন, তাহলে আমি তা হবে না বলে 1,000 রুবল বাজি ধরতে পারি।"

"বাজিটা খুবই লোভনীয়!" বলে উঠল উপস্থিতদের মধ্যে একজন, "এক হাজার রুবল জিতে নেবার জন্যে এক রুবল দিতে আমি এক্ষুণি রাজি।"

"কিন্তু ভুলবেন না যে জেতার সম্ভাবনা হাজার বারে একবার।"

"কুছ পরোয়া নেহি। এমন কি, প্রথম এক-শো জন পথ-চলতি মানুষই যে পুরুষ হবে—এরই সপক্ষে আমি এক হাজার রুবলের পাল্টা এক রুবল বাজি ধরতে পারি।"

"এক্ষেত্রে সম্ভাবনাটা যে কতো কম তা কি আপনার মাথায় ঢুকছে?"

"বোধহয় সম্ভাবনাটা দশ লক্ষ বারে একবার কিংবা ওই রকম কিছু।"

"না, তার চেয়ে কল্পনাতীত রকমের কম। বিশজন পথিকের ক্ষেত্রে ওই সম্ভাব্যতাটা হল দশ লক্ষ বারে একবার। 100 জনের বেলায়···দাঁড়ান, একটা কাগজ নিয়ে হিসেব করে দেখি। 100 জনের বেলায় সকলেরই পুরুষ হবার সম্ভাবনাটা দাঁড়াবে···ওঃ হোঃ—1/10000000000000000000000000000000!"

"মোটে?"

"আপনি এটাকে 'মোটে' বলে মনে করছেন? দেখুন, কোনো মহাসাগরেও এতো জলবিন্দু নেই, এমন কি, এর হাজার ভাগের এক ভাগও না।"

"হ্যাঁ, সংখ্যাটা সত্যিই মনে দাগ কাটার মতো! তা, আমার এক রুবলের পাল্টা, তুমি কতো রুবল বাজি ধরতে চাও?"

"হাঃ হাঃ! সব কিছু! আমার যা আছে সব!"

www.pathagar.com

"সব কিছু? সেটা বড্ড বেশি হয়ে যাচ্ছে। বরং তোমার বাইসাইকেলটা বাজি ধরো। যদিও, আমি নিশ্চয় জানি যে তোমার সে সাহস হবে না।"

"আমার সাহস হবে না? ঠিক আছে—আমার বাইসাইকেলটাই বাজি ধরলাম। আর যাই হোক, আমি তো কোনো কিছুরই ঝুঁকি নিচ্ছিনে!"

"আমিও না। এক রুবল এমন কিছু বেশি নয়! আমার একটা বাইসাইকেল জিতে নেবার সম্ভাবনা আছে। আর তুমি জিতলে যা পাবে, সেটা প্রায় কিছুই না।"

"কিন্তু আপনি কি বুঝতে পারছেন না যে আপনি কিছুতেই জিততে পারেন না? আপনি কখনোই বাইসাইকেলটা পাবেন না, আর আমি বলতে গেলে আপনার রুবলটা আমার পকেটে পুরেই ফেলেছি।"

"এ বাজি ধরো না," বলে উঠল গণিত-বিশারদ তরুণটির বন্ধুরা, "এক রুবলের পাল্টা একটা বাইসাইকেল বাজি ধরাটা পাগলামি।"

"বরং উল্টো," জবাব দিল গণিতবিদ, "এ হেন অবস্থায়, এমন কি, এক রুবল বাজি ধরাটাও পাগলামি। এটা সুনিশ্চিত হার! স্রেফ টাকাটা ছুঁড়ে ফেলে দেওয়া।"

"কিন্তু তবু, সম্ভাবনাটা তো আছে, না-কি?"

"হুঁ, মহাসাগরের কাছে এক বিন্দু জল যেমন। বাস্তবিকপক্ষে, দশটা মহাসাগরের বেলায় যতোটা। সম্ভাবনাটা ঠিক ততোটুকুই! আমি সেই রকমই একটা সম্ভাবনার পাল্টা দশটি মহাসাগর বাজি ধরছি। দুই আর দুইয়ে চার হয়—এ সম্বন্ধে আমি যতোটা নিশ্চিত, আমার জিত সম্বন্ধেও আমি ততোটাই নিশ্চিত।"

তার কথার মধ্যেই মন্তব্য করলেন এক বৃদ্ধ অধ্যাপকমশাই: "তোমার কল্পনার লাগাম একেবারেই ছেড়ে দিয়েছ দেখছি।"

"কি বললেন, প্রফেসর? আপনি কি সত্যিই মনে করেন যে, এঁর জেতার সম্ভাবনা আছে?"

"এই ব্যাপারটা কি তুমি ভেবে দেখেছ যে, সমস্ত ঘটনাই সমান সম্ভবপর নয়? একটা কোনো সমাপতনের সম্ভাব্যতার হিসেবটা কখন নির্ভুল হতে পারে? যেসব ঘটনা ঘটার সমান-সমান সম্ভাবনা আছে, তখনই। তাই না? আর, এক্ষেত্রে আমরা যা দেখছি···কিন্তু, ওই শোনো। মনে হচ্ছে, এখনই তোমার ভুলটা দেখতে পাবে। মিলিটারি ব্যাণ্ডের বাজনার আওয়াজ শুনতে পাচ্ছ?"

"পাচ্ছি। কিন্তু তার সঙ্গে আমাদের এই বাজি ধরাটার···" বলতে বলতে

www.pathagar.com

থেমে গেল তরুণ গণিতবিশারদটি। তার মুখে চোখে একটা ভয়ের ভাব ফুটে উঠল, জানালার কাছে ছুটে গেল সে।

"হুঁ", বিষন্ন গলায় বলল সে, "বাজি হেরেছি আমি। বিদায়, আমার বাইসাইকেল !"

এক সেকেণ্ড বাদেই আমরা দেখলাম সৈনাদের একটা ব্যাটালিয়ন কুচকাওয়াজ করে গেল আমাদের জানালার সামনে দিয়ে !

61 আমাদের ভিতরে বাইরে রাক্ষুসে সব সংখ্যা : বিরাট বিরাট সব সংখ্যা খুঁজে বের করার জন্যে খুব একটা দূরে যাবার কোনো দরকার নেই। এমন সব সংখ্যা আমাদের চারপাশে, এমন কি, আমাদের ভিতরেও রয়েছে। কি ভাবে তাদের চিনে নিতে হবে, শুধু সেটুকু জানলেই হল। উপরে আকাশ, পায়ের নিচে বালুরাশি, যে-বাতাস আমাদের ঘিরে রয়েছে, আমাদের দেহের ভিতরে রক্ত—এই সবকিছুর মধ্যেই রাক্ষুসে সব সংখ্যা লুকানো আছে।

বেশির ভাগ লোকের কাছেই মহাকাশের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বিরাট বিরাট সংখ্যা সম্বন্ধে কোনো রহস্য নেই। আকাশে তারকার সংখ্যাই হোক, পরস্পরের কাছ থেকে আর পৃথিবী থেকে তাদের দূরত্বই হোক, কিংবা তাদের আয়তন, ভার আর বয়স-ই হোক, প্রত্যেকটি ক্ষেত্রেই আমরা অনিবার্য ভাবেই এমন সব সংখ্যার মুখোমুখি হই যা আমাদের কল্পনাকে হার মানায়। লোকে যে "জ্যোতির্ষিক সংখ্যা" বলে একটা কথা তৈরি করেছে, সেটা শুধু শুধু নয়। কিন্তু কিছু লোকের মনে সন্দেহ মাত্র জাগে না যে, জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা মহাশূন্যের যেসব বস্তুপিণ্ডকে "ছোট্ট" বলে থাকেন, আসলে সেগুলি মানুষের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখলে সত্যিই অতিকায় বিপুলায়তন। আমাদের সৌরমণ্ডলে কতকগুলি গ্রহ আছে যেগুলির ব্যাস মাত্র কয়েক কিলোমিটার এবং বিরাট বিরাট সব সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে অভ্যস্ত জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা এদের "ক্ষুদে" বলে থাকেন। কিন্তু অন্য সব আরও বড়ো মহাকাশচারী বস্তুপিণ্ডের সঙ্গে তুলনামূলক ভাবেই শুধু এদের "ক্ষুদে" বলা চলে। আমাদের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে এরা মোটেই ক্ষুদে নয়। যেমন, হালে আবিষ্কৃত তিন কিলোমিটার ব্যাসের একটি গ্রহকে ধরা যাক। জ্যামিতির দিক থেকে হিসেব করা কঠিন নয় যে, এটার পৃষ্ঠদেশ 28 বর্গ-কিলোমিটার বা 2,80,00,000 বর্গ-মিটারের সমান। সাতজন লোকের পাশাপাশি খাড়া হয়ে দাঁড়াবার জন্যে এক বর্গ-মিটার যথেষ্ট। তাহলে, দেখতে পাচ্ছেন, এই "ক্ষুদে" গ্রহটির বুকে 19,60,00,000 লোকের জন্যে যথেষ্ট জায়গা রয়েছে।

আমরা যে বালির ওপর দিয়ে হেঁটে চলি, সেটাও এই রাক্ষুসে সব সংখ্যার

www.pathagar.com

জগতের সঙ্গে আমাদের পরিচয় ঘটায়। "সমুদ্রকূলে বালুকণার মতোই সংখ্যাতীত" কথাটির প্রচলন শুধু শুধুই হয়নি। প্রসঙ্গতঃ বলা যেতে পারে, প্রাচীনরা বালুকণার সংখ্যা খুব কম করেই হিসেব করেছিলেন—তাঁরা ভাবতেন এই বালুকণার সংখ্যা আকাশে তারার সংখ্যার সমান। প্রাচীন কালে দূরবীন ছিল না এবং দূরবীন বিনা মানুষ একটি গোলার্ধে প্রায় 3,500 তারা দেখতে পায়। খালি চোখে যতো তারা দেখা যায়, সমুদ্রকূলের বালুকণার সংখ্যা তার চেয়ে লক্ষ লক্ষ গুণ বেশি।

যে-বাতাস আমরা নিঃশ্বাসের সঙ্গে টেনে নিই, তার মধ্যেও একটি রাক্ষুসে সংখ্যা লুকোনো আছে। প্রতি বর্গ-সেণ্টিমিটারে রয়েছে 27000000000000 000000 অণু। এই সংখ্যাটা যে কতো বড়ো তা এমন কি, কল্পনা করাও অসম্ভব। পৃথিবীতে যদি এতো সংখ্যক লোক থাকত, তাহলে তাদের দাঁড়াবারই জায়গা হত না। বাস্তবিকপক্ষে, ভূগোলকের—সমস্ত মহাদেশ আর মহাসাগরকে হিসেবের মধ্যে ধরে—পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল হল 50 কোটি বর্গ-কিলোমিটার। এটাকে যদি আমরা বর্গ-মিটারে নিয়ে আসি, তাহলে পাচ্ছি 5000000000000 00 বর্গ-মিটার।

এবার, এই সংখ্যাটা দিয়ে 27000000000000000000-কে ভাগ করা যাক। ফল দাঁড়াচ্ছে 54,000 অর্থাৎ প্রতি বর্গ-মিটারে লোকসংখ্যা দাঁড়াচ্ছে 50,000-এরও বেশি!

আমরা বলেছি, প্রত্যেকটি মানুষ তার নিজের দেহের মধ্যে একটা রাক্ষুসে সংখ্যা বয়ে বেড়াচ্ছে। সেটা হল রক্ত। এক ফোঁটা রক্ত যদি আমরা অণুবীক্ষণ যন্ত্রের নিচে পরীক্ষা করি, তাহলে তার মধ্যে এক বিরাট সংখ্যক রক্তকণিকা দেখতে পাব। এদের দেখতে মাঝখানে চাপা ছোট ছোট চাকতির মতো (চিত্র 42)। এদের সকলেই মোটামুটি একই আয়তনের—ব্যাস 0·007 মিলিমিটার এবং 0·002 মিলিমিটার পুরু। প্রায় 1 ঘন-মিলিমিটার অত্যন্ত সামান্য এক ফোঁটা রক্তের মধ্যে রয়েছে বিপুল সংখ্যক কণিকা—50,00,000। তাহলে একজন মানুষের দেহে এই লাল কণিকার সংখ্যা কতো? একজন মানুষের দেহের ওজন যতো কিলোগ্রাম, তার 14 ভাগের 1 ভাগ লিটার রক্ত রয়েছে তার দেহে। যেমন, তার ওজন যদি হয় 40 কিলোগ্রাম, তাহলে তার দেহে রয়েছে প্রায় 3 লিটার (অথবা 30,00,000 ঘন-মিলিমিটার) রক্ত। একটা সহজ হিসেব থেকেই দেখা যাবে যে তার দেহে রয়েছে:

$$50{,}00{,}000 \times 30{,}00{,}000 = 15000000000000$$ রক্ত কণিকা।

www.pathagar.com

ভেবে দেখুন একবার! 15,00,000 কোটি রক্তকণিকা! এই কণিকাগুলি পাশাপাশি সাজালে, সেই শৃংখলটি কতোটা দীর্ঘ হবে: সেটা হিসেব করা খুব কঠিন নয়।

চিত্র 42: একটি রক্তকণিকা

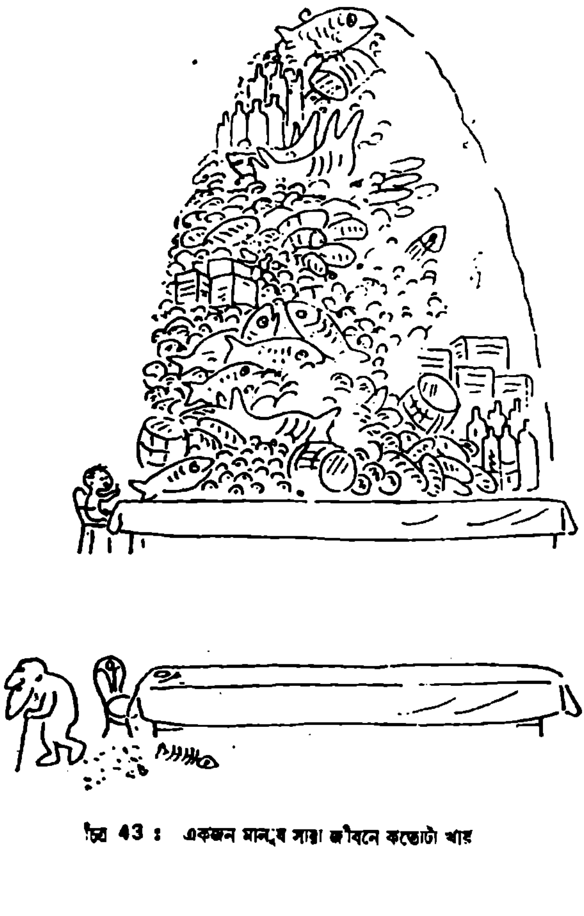
1,05,000 কিলোমিটার—পৃথিবীর নিরক্ষরেখাটিকে একাধিক পাক দিয়ে আসার পক্ষে যথেষ্ট দীর্ঘ: 1,00,000: 40,000=2·5 বার।

আমরা যদি গড় ওজনের একজন লোককে ধরি, তাহলে তার দেহের রক্ত কণিকার শৃংখলটি পৃথিবীকে 3 বার ওই ভাবে পাক দিয়ে আসার পক্ষে যথেষ্ট দীর্ঘ হবে।

এই অতি ক্ষুদ্র লাল কণিকা আমাদের দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নিয়ে থাকে। দেহের সমস্ত অংশে এরা অক্সিজেন বহন করে নিয়ে যায়। রক্ত যখন ফুসফুসের মধ্যে দিয়ে যায় তখন এই কণিকাগুলি অক্সিজেন শোষণ করে নেয় এবং তারপর রক্তপ্রবাহ যখন আমাদের দেহের কলা বা 'টিস্যু'র মধ্যে, ফুসফুস থেকে সবচেয়ে দূরের দেহাংশের মধ্যে তাদের চালিত করে, তখন তারা সেই অক্সিজেন নিঃসারণ করে। কণিকাগুলি যতো ক্ষুদে আর সংখ্যায় যতো বেশি হবে, ততোই আরও ভালো ভাবে তারা নিজেদের কাজ করে যাবে। কারণ, সেক্ষেত্রে তারা একটা বৃহত্তর বহিস্তল বা 'সারফেস' পাচ্ছে এবং এরা একমাত্র নিজেদের তলের মারফত অক্সিজেন শোষণ আর নিঃসারণ করতে পারে। হিসেব করে দেখা গেছে, এদের মোট তল মানুষের দেহের বহিস্তলের চেয়ে বহু গুণ বেশি। সেটা হচ্ছে 1,200 বর্গ-মিটার—40 মিটার লম্বা আর 30 মিটার চওড়া একটা বাগানের জমির সমান আয়তনের। এবার বুঝতে পারছেন যে জীবদেহে যতো বেশি সংখ্যক সম্ভব রক্তকণিকা থাকাটা কেন এতো গুরুত্বপূর্ণ—এরা এমন একটা বহিস্তল জুড়ে অক্সিজেন শোষণ আর নিঃসারণ করে যেটা আমাদের দেহের বহিস্তলের চেয়ে 1,000 গুণ বড়ো।

www.pathagar.com

আরেকটি রাক্ষুসে সংখ্যা হল একজন মানুষ তার সারা জীবনে (গড় আয়ু 70 বছর ধরে নিয়ে) যা খায়, সেই মোট খাদ্যের প্রকাণ্ড পরিমাণটি। একজন লোক জীবনভর যা খায়, সেই টন টন রুটি, মাংস, মাছ, সবজি, ডিম, দুধ, জল ইত্যাদি বয়ে নিয়ে যাবার জন্যে রীতিমত একটা মালগাড়ী লেগে যেত। সত্যিই বিশ্বাস করা কঠিন যে একজন মানুষ—অবশ্যই একবারে নয়—পুরো এক ট্রেন-ভর্তি খাদ্যদ্রব্য আত্মসাৎ করতে পারে।



চিত্র 43 : একজন মানুষ সারা জীবনে কতোটা খায়

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় সাত ॥

মাপজোখের যন্ত্রপাতি ছাড়াই

62. **পা ফেলে ফেলে দূরত্ব মাপা :** সব সময়ে তো আমরা গজ-ফিতে সঙ্গে রাখিনে। তাই, কি করে দূরত্ব মাপতে হয় তা জেনে রাখলে কাজ দেবে—সেটা মোটামুটি একটা হিসেব হলেও।

কিছুটা দূরত্ব মাপার সবচেয়ে সহজ উপায় হল পদক্ষেপ গুণে—ধরা যাক, আপনি যখন পায়ে হেঁটে দূরে কোথাও চলেছেন, তখন। এর জন্যে অবশ্যই আপনাকে নিজের পদক্ষেপের প্রসারটুকু জানতে হবে। মোটের ওপর এই পদক্ষেপগুলির প্রসার অল্পবিস্তর সমান এবং গড় প্রসারটুকু যদি আপনার জানা থাকে, তাহলে আপনি যে-কোনো দূরত্ব হিসেব করতে পারেন।

প্রথমে অবশ্যই প্রতিবার পা ফেলার সঙ্গে সঙ্গে আপনি গড়ে কতোটা এগুচ্ছেন, সেটা মেপে নেওয়া চাই। বলা বাহুল্য, এটা মাপকাঠি ছাড়া হতেই পারে না।

একটা মাপবার ফিতে নিয়ে সেটাকে প্রায় 20 মিটার মেলে ধরুন। দূরত্বটাকে চিহ্নিত করে, ফিতেটা সরিয়ে দিন। তারপর দেখুন ওই দূরত্বটুকু পার হবার জন্যে আপনাকে কতোবার পা ফেলতে হচ্ছে। পা ফেলার সংখ্যাটা x আর সেই সঙ্গে একটা ভগ্নাংশ হওয়া সম্ভব। ভগ্নাংশটা যদি $\frac{1}{2}$ এর কম হয়, তাহলে সেটা হিসেবের মধ্যে ধরবেন না; আর যদি $\frac{1}{2}$ এর বেশি হয়, তাহলে পূর্ণ সংখ্যা ধরবেন। তারপর পদক্ষেপের সংখ্যাটি দিয়ে 20 মিটারকে ভাগ করুন। এ থেকেই আপনার পদক্ষেপের গড় প্রসার পেয়ে যাবেন। সেটা মনে করে রাখুন।

কতোবার পা ফেলছেন—বিশেষতঃ দীর্ঘ দূরত্ব পার হবার সময়ে—সেটা যাতে ভুলে না যান, সেজন্যে সবচেয়ে ভালো হবে 10 পর্যন্ত গোণার পর আপনার বাঁ হাতের একটা আঙুল মুড়ে রাখা। সবগুলো আঙুল মোড়া হয়ে যাবার পর, অর্থাৎ 50 বার পা ফেলার পর, আপনার ডান হাতের একটা আঙুল মুড়ে রাখুন। এইভাবে আপনি 250টা পদক্ষেপ গুণতে পারবেন, আর তারপরে আবার গোড়া থেকে শুরু করুন। শুধু আপনাকে মনে রাখতে হবে যে মোট কতোবার আপনি ডান হাতের সবগুলো আঙুল মুড়েছেন। যেমন ধরুন, আপনি যদি গন্তব্যস্থলে পৌঁছাতে আপনার ডান হাতের সবগুলো আঙুল দুবার মুড়ে থাকেন আর ওই ডান হাতেরই আরও তিনটি আঙুল মুড়ে থাকেন এবং সেই সঙ্গে বাঁ হাতের চারটি আঙুল মুড়ে থাকেন, তাহলে বুঝতে হবে আপনি—

$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690$ বার পা ফেলেছেন।

www.pathagar.com

এই মোট সংখ্যাটির সঙ্গে অবশ্যই আপনাকে যোগ করতে হবে—আপনার বাঁ হাতের যে-আঙুলটি সব শেষে মুড়েছেন, সেটা মোড়ার পর—আপনি যে-ক'বার পদক্ষেপ করেছেন, সেই সংখ্যাটা—যদি ব্যাপারটা সেরকম দাঁড়ায়।

প্রসঙ্গক্রমে বলছি, এক্ষেত্রে একটা প্রাচীন নিয়ম চালু আছে : একজন পূর্ণবয়স্ক লোকের পদক্ষেপের গড় প্রসার হল তার চোখ থেকে পায়ের আঙুল পর্যন্ত মাপের অর্ধেক।

হেঁটে চলার গতিবেগের ক্ষেত্রেও আরেকটি পুরাতন নিয়ম প্রযোজ্য : একজন লোক তিন সেকেণ্ডে যতোবার পদক্ষেপ করে, এক ঘণ্টায় সে ততো কিলোমিটার যায়। কিন্তু এই নিয়মটি সঠিক হবে শুধু পদক্ষেপের একটা নির্দিষ্ট প্রসারের ক্ষেত্রে, এবং সেটাও আবার বেশ বড়ো রকমের পদক্ষেপ হওয়া চাই। বাস্তবিক-পক্ষে, কারু পদক্ষেপের প্রসারটা যদি হয় x মিটার এবং তিন সেকেণ্ডে পা ফেলার সংখ্যা হয় n, তাহলে তিন সেকেণ্ডে সে nx মিটার অতিক্রম করছে এবং এক ঘণ্টায় (3,600 সেকেণ্ডে) সে পার হচ্ছে 1,200 nx মিটার বা $1 \cdot 2\,nx$ কিলোমিটার। এই দূরত্বটা যদি তিন সেকেণ্ডের মধ্যে পা ফেলার সংখ্যার সমান হয়, তাহলে এই সমীকরণটা হবেই : $1 \cdot 2nx = n$ অথবা $1 \cdot 2x = 1$ অতএব, $x = 0 \cdot 83$ মিটার।

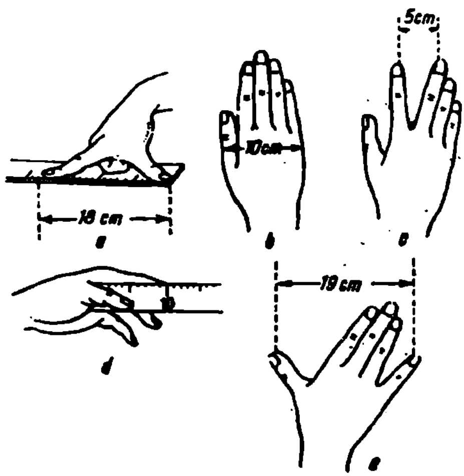
কোনো লোকের পদক্ষেপের প্রসার তার উচ্চতার ওপরে নির্ভর করে—এই নিয়মটা সঠিক। দ্বিতীয় নিয়মটা—যেটা আমরা এইমাত্র যাচাই করলাম—প্রযোজ্য শুধু গড় উচ্চতার লোকের ক্ষেত্রে, অর্থাৎ যারা 1·75 মিটার লম্বা, তাদের বেলায়।

63. "জীবন্ত" মাপকাঠি : হাতের কাছে যখন কোনো মাপকাঠি বা মাপবার ফিতে নেই, তখন গড়-আয়তনের কোনো জিনিসের দৈর্ঘ্য প্রস্থ মাপার একটা ভালো উপায় হল এই : একটা প্রসারিত হাতের অগ্রভাগ থেকে বিপরীত কাঁধ পর্যন্ত একটা ছড়ি বা সুতো টানটান করে ধরুন। একজন পূর্ণবয়স্ক লোকের ক্ষেত্রে এটা হবে সামান্য কম-বেশি এক মিটার। এই মোটামুটি এক মিটার মাপার আরেকটা উপায় হল আঙুলগুলো দিয়ে : বুড়ো আঙুল আর তর্জনী যতোটা সম্ভব ফাঁক করে ধরলে, এই দুই আঙুলের ডগার মধ্যে দূরত্ব দাঁড়ায় প্রায় 18 সেণ্টিমিটার। তাহলে ছ'বার পাশাপাশি সেই মাপটা হবে 1 মিটারের কাছাকাছি (চিত্র 44*a*)।

এথেকে আমরা "খালি হাতে" মাপার কাজটা শিখে নিতে পারি। এর জন্যে শুধু নিজের হাতের চেটোর আয়তন জানা আর সেটা মনে রাখা দরকার।

www.pathagar.com

আপনার হাতের চেটোর প্রস্থটা আপনাকে মনে রাখতে হবে—44b নং চিত্রে যেটা দেখানো হয়েছে। পূর্ণবয়স্ক লোকের ক্ষেত্রে এটা সাধারণতঃ 10 সেণ্টি-মিটার। আপনারটা এর চেয়ে বেশি বা কম হতে পারে। অবশ্যই আপনাকে জানতে হবে কতোটা। তারপর আপনাকে জানতে হবে—তর্জনী আর মধ্যমা যতোদূর সম্ভব প্রসারিত করার পরে ওই আঙুল দুটির মধ্যে ফাঁকটা কতোটা হয় (চিত্র 44c)। এটা হয়ে থাকে কম-বেশি 5 সেণ্টিমিটার। বুড়ো আঙুল আর তর্জনীর সংযোগস্থল থেকে তর্জনীর ডগা পর্যন্ত দৈর্ঘ্যটা জেনে রাখাও ভালো (চিত্র 44d)। এবং, সব শেষে, প্রসারিত অবস্থার বুড়ো আঙুল আর ছোট আঙুলের অগ্রভাগের মধ্যে ফাঁকটুকু মেপে নিন (চিত্র 44e)।



চিত্র 44 : হাতকে কিভাবে মাপকাঠি হিসেবে ব্যবহার করা যায়

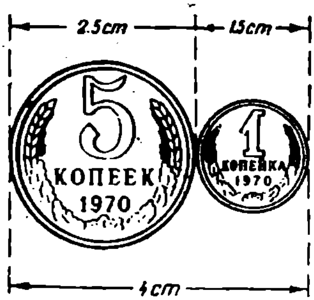
এইসব "জীবন্ত মাপকাঠি" কাজে লাগিয়ে আপনি ছোট আকারের সব জিনিসের খুব কাছাকাছি মাপ পেতে পারেন।

64. মুদ্রার সাহায্যে মাপা : এক্ষেত্রে বিভিন্ন মুদ্রাও খুব কাজে লাগে। যেমন, একটি সোভিয়েত এক-কোপেক মুদ্রার ব্যাস কাঁটায় কাঁটায় 1·5 সেণ্টি-মিটার এবং একটি পাঁচ-কোপেক মুদ্রার ব্যাস 2·5 সেণ্টিমিটার। দুটিকে পাশাপাশি রাখলে আপনি 4 সে. মি. পাচ্ছেন (চিত্র 45)। তাহলে, কতকগুলো মুদ্রা থাকলে, আর সেগুলির ব্যাস জানা থাকলে, আপনি কোনো জিনিসের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ মাপতে পারবেন। বিভিন্ন সোভিয়েত তামার মুদ্রা দিয়ে আপনি এই দৈর্ঘ্যগুলি মাপতে পারেন :

—৮

www.pathagar.com

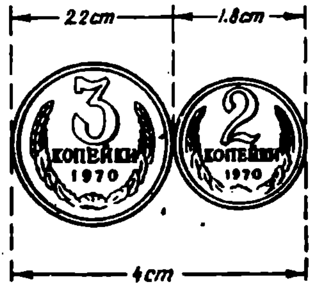
এক-কোপেক মুদ্রা	1·5 সে. মি.
পাঁচ-কোপেক মুদ্রা	2·5 সে. মি
দুটি এক-কোপেক মুদ্রা ···	3 সে. মি.
এক-কোপেক ও পাঁচ-কোপেক মুদ্রা ···	4 সে. মি.
দুটি পাঁচ-কোপেক মুদ্রা	5 সে. মি. ইত্যাদি।



চিত্র 46 :
একটি পাঁচ-কোপেক ও এক-কোপেক মুদ্রা পাশাপাশি রাখলে হবে 4 সেন্টিমিটার

একটি 5-কোপেক মুদ্রার ব্যাস থেকে একটি 1-কোপেক মুদ্রার ব্যাস বাদ দিয়ে আপনি 1 সেন্টিমিটার পাচ্ছেন।

আপনার কাছে যদি 5-কোপেক আর 1-কোপেক মুদ্রা না থাকে আর যদি শুধু 2-কোপেক আর 3-কোপেক মুদ্রা থাকে, তাহলে এই দুটি মুদ্রাও আপনাকে কিছুটা সাহায্য করতে পারে—যদি মনে রাখেন যে, এই দুটি মুদ্রাকে পাশাপাশি রাখলে তাদের ব্যাসের যোগফল দাঁড়ায় 4 সেন্টিমিটার (চিত্র 46)। একটা চার সেন্টিমিটার কাগজের ফালি প্রথমে



চিত্র 46 :
একটি তিন-কোপেক আর একটি দুই-কোপেক মুদ্রা পাশাপাশি রাখলে 4 সেন্টিমিটার হবে

www.pathagar.com

মাঝখানে ভাঁজ করে, তারপরে সেই ভাঁজ করা কাগজটা আরেকবার মাঝখানে ভাঁজ করলেই, আপনি চার সেণ্টিমিটার লম্বা একটা মাপকাঠি পেয়ে যাবেন।

তাহলে এইভাবে, মাপবার ফিতে সঙ্গে না থাকলেও আপনি জ্ঞান আর উদ্ভাবন-শক্তির সাহায্যে প্রয়োগ ক্ষেত্রে মাপজোখ করতে পারেন।

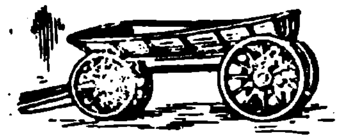
এই কথাটাও যোগ করা যেতে পারে যে, দরকার হলে মুদ্রাকে বাটখারা হিসেবেও ব্যবহার করা যেতে পারে। যেসব মুদ্রা বহুকাল ধরে চালু রয়েছে সেগুলি নতুন মুদ্রার চেয়ে সামান্য মাত্র—বাস্তবিকপক্ষে নিতান্তই যৎসামান্য—ওজনে কম। হাতের কাছে প্রায় ক্ষেত্রেই এক থেকে দশ গ্রাম পর্যন্ত ওজনের বাটখারা থাকে না বলে বিভিন্ন মুদ্রার ওজন জেনে রাখলে কাজ দেবে।

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় আট ॥

জ্যামিতিক হেঁয়ালি

এই অধ্যায়ের ধাঁধাগুলোর সঠিক উত্তর দেবার জন্যে আপনার খুব খুঁটিয়ে জ্যামিতি জানার দরকার নেই। গণিতের এই শাখাটিতে প্রাথমিক জ্ঞান আছে —এমন যে কোনো লোক সেটা করতে পারবে। পাঠক যতোটা জ্যামিতি জানেন বলে মনে করেন, সত্যিই অতোখানি জ্ঞান তাঁর আছে কি-না, সেটা যাচাই করতে সাহায্য করবে এখানে যে দু'ডজন সমস্যা বলা হয়েছে, সেগুলি। সত্যিকার



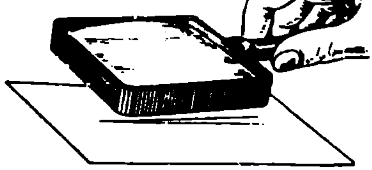
চিত্র 47 : সামনের ধুরাটা তাড়াতাড়ি ক্ষয়ে যায় কেন

জ্ঞান বলতে শুধু জ্যামিতিক আকারগুলির বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে জানাটাই বোঝায় না; সেটা হল বাস্তব সমস্যাগুলির সমাধানে সেটাকে প্রয়োগ করা। যে-লোক বন্দুক ছুঁড়তেই জানে না, তার কাছে বন্দুকের আর সার্থকতা কি?

এই জ্যামিতিক লক্ষ্যস্থলগুলির দিকে 24 বার গুলি ছুঁড়ে পাঠক কতোবার লক্ষ্যভেদ করতে পারেন তা তিনি নিজেই দেখুন।

65. টানা-গাড়ি? টানা-গাড়ির সামনের ধুরাটা (বা অক্ষ অ্যাক্সলটা) পিছনের ধুরাটার চেয়ে তাড়াতাড়ি ক্ষয়ে যায় কেন?

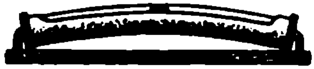
66. বিবর্ধক পরকলার মধ্যে দিয়ে: কোনো জিনিসের চার গুণ বিবর্ধন ঘটাতে পারে, এমন একটা পরকলা বা 'ম্যাগ্‌নিফাইং' কাচের মধ্যে দিয়ে আপনি যদি $1\frac{1}{2}$ ডিগ্রি একটা কোণকে দেখেন, (চিত্র 48) তাহলে কোণটিকে কতোটা বড়ো দেখাবে?



চিত্র 48 : কোণটিকে কতোটা বড়ো দেখাবে

www.pathagar.com

67 ছুতোর-মিস্ত্রির লেভেল : আপনি হয়তো ছুতোর-মিস্ত্রিদের লেভেল বা সমতল দেখার যন্ত্র দেখে থাকবেন : একটা কাচের নলের মধ্যে একটা বুদ্বুদ (চিত্র 49) যেটা কোনো ঢালু তলের ওপরে রাখলে কেন্দ্র থেকে সরে যায়। ঢালটা যতো বেশি হবে, বুদ্বুদটা ততো বেশি করে কেন্দ্রচিহ্ন থেকে সরে যাবে। এটার সরে যাবার কারণ হল, সবাই জানেন, নলের ভিতরে তরল পদার্থটির চেয়ে হালকা হওয়ায়, ওই বাতাসের বা গ্যাসের বুদ্বুদটি উপরিতলে উঠে আসে। নলটা যদি খাড়া হত, তাহলে বুদ্বুদটা নলের প্রান্তে, অর্থাৎ সর্বোচ্চ স্থানে, চলে আসত। সহজেই দেখা যাবে যে, সেরকম কোনো লেভেল খুবই অসুবিধাজনক। সেইজন্যেই নলটা সাধারণতঃ 49 নং চিত্রতে যেমনটি দেখানো হয়েছে, সেইরকম ধনুকের মতো বাঁকানো হয়



চিত্র 49 : ছুতোর-মিস্ত্রির লেভেল

তলটা যখন অনুভূমিক হবে, তখন নলটির সর্বোচ্চ বিন্দুতে অবস্থিত বুদ্বুদটা আসবে ঠিক মাঝখানটিতে। তলটা যদি ঢালু হয়, তাহলে সর্বোচ্চ স্থানটি মাঝখানে হবে না—কিছুটা এপাশে বা ওপাশে হবে এবং মধ্যস্থানের চিহ্নটি থেকে সেটা নলের অন্য কোনো অংশে সরে যাবে।* এখন, সমস্যাটা হল তলটা যদি ½ ডিগ্রি ঢালু হয় এবং নলটার ধনুকাকৃতি বৃত্তাংশটির ব্যাসার্ধ হয় 1 মিটার, তাহলে বুদ্বুদটা মাঝখানের চিহ্নটা থেকে কতোটা দূরে সরে যাবে?

68 কতোগুলো তল ? : এটা এমন একটা প্রশ্ন যেটা হয়তো খুবই সাদাসিধা আর না-হয় তার উলটো—অত্যন্ত কৌশলী বলে মনে হবে।

একটা ষড়ভুজ পেন্সিলের কতোগুলো তল বা কিনারা আছে? উত্তরটা দেখার আগে খুব ভালো করে ভেবে দেখুন।

69. চন্দ্রকলা : একটি চন্দ্রকলাকে (চিত্র 50) আপনি কি মাত্র দুটি সরলরেখা টেনে ছয়টি অংশে ভাগ করতে পারেন কি?

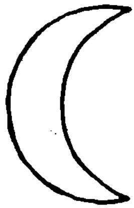
70. দেশলাই-কাঠির খেলা : 12টি দেশলাই-কাঠি দিয়ে আপনি 5টি "দেশলাই-কাঠির বর্গক্ষেত্রের" সমান আয়তন জুড়ে একটি ক্রুশ তৈরি করতে পারেন (চিত্র 51)।

* "চিহ্নটাই কেন্দ্র থেকে সরে যাবে" বললে আরও ঠিক হত — কারণ বাস্তবক্ষেত্রে বুদ্বুদটা তার জায়গাতেই থাকে, নল আর চিহ্নটা তার অনুপাতে সরে সরে যায়।

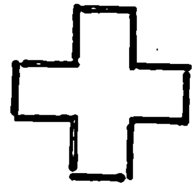
www.pathagar.com

এই দেশলাই-কাঠিগুলিকে আপনি এমন ভাবে পুনঃস্থাপন করতে পারেন কি যাতে আয়তনটা মাত্র চারটি "দেশলাই কাঠির বর্গক্ষেত্রের" সমান হবে?

মাপকাঠি ব্যবহার করা চলবে না।

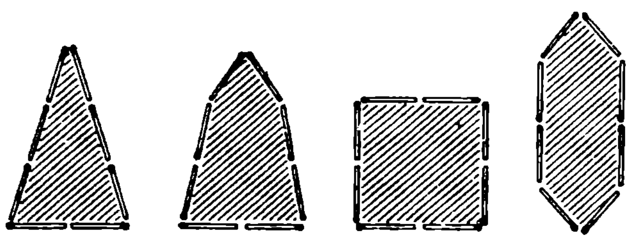


চিত্র 50 : একটি চন্দ্রকলা



চিত্র 51 : 12টি দেশলাই-কাঠি দিয়ে তৈরি একটি ক্রুশ

71. আরেকটি দেশলাই-কাঠির খেলা : 8টি দেশলাই-কাঠি দিয়ে আপনি বহু রকমের ছক তৈরি করতে পারেন। 52 নং চিত্রে এইরকম কতকগুলি ছক



চিত্র 52 :

আটটি দেশলাই-কাঠিতে সম্ভাব্য সবচেয়ে আকারে বড়ো ছকটি কি ভাবে করা যেতে পারে

দেখানো হয়েছে। এগুলি সবই আয়তনে ভিন্ন ভিন্ন। কাজটা হল, এই আটটি দেশলাই-কাঠি দিয়ে সবচেয়ে বড়ো মাপের যে ছকটি করা সম্ভব সেইটে করতে হবে।

72. মাছিটা কোন্ পথ ধরে যাবে ? : একটি বেলনাকার কাচের পাত্রের ভিতরের দেওয়ালে, ওপরের বৃত্তাকার প্রান্তের তিন সেণ্টিমিটার নিচে, এক ফোটা মধু রয়েছে। ঠিক তার ব্যাস-অনুসারী উলটো দিকে পাত্রটির বাইরের দেওয়ালে রয়েছে একটি মাছি (চিত্র 53)।

মাছিটাকে মধুর কাছে পৌঁছাবার সবচেয়ে সংক্ষিপ্ত পথটা দেখিয়ে দিন!

কাচের বেলনাকার পাত্রটির ব্যাস 10 সেণ্টিমিটার এবং উচ্চতা 20 সে. মি. মাছিটা ওই সংক্ষিপ্ততম পথটি নিজে থেকে খুঁজে নিয়ে চলে যাবে বলে

www.pathagar.com

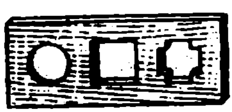
আশা করবেন না : সেটা করতে গেলে তার জ্যামিতির জ্ঞান থাকা চাই এবং সেটা নিশ্চয়ই কোনো মাছির সামর্থ্যের বাইরে।

চিত্র 53 : মাছিটাকে মধুর কাছে পৌঁছাবার সবচেয়ে সংক্ষিপ্ত পথটা দেখিয়ে দিন

73 **একটি প্লাগ তৈরি করুন :** একটা ছোট তক্তা দেওয়া হয়েছে আপনাকে যাতে তিনটি ভিন্ন রকমের ছিদ্র আছে : চৌকোণা, তিনকোণা আর গোল। এমন **একটা** 'প্লাগ' বা ছিপি আপনি তৈরি করতে পারেন কি—যেটা ওই তিনটি ছিদ্রতেই ঠিক মতো 'ফিট' করবে বা আঁট হয়ে লেগে যাবে ?

74 **দ্বিতীয় প্লাগ :** আগের সমস্যাটির যদি সমাধান করে থাকেন, তাহলে এবার এমন **একটি** 'প্লাগ' তৈরি করার চেষ্টা করুন যেটা 55 নং চিত্রে যে-ছিদ্রগুলি দেখানো হয়েছে, সেগুলির সবগুলিতেই 'ফিট' করবে।

চিত্র 54 : এই **তিনটি** ছিদ্রের জন্যে একটি প্লাগ তৈরি করুন



চিত্র 55 : এমন কোনো-একটি প্লাগ আছে কি যেটা দিয়ে এই তিনটি ছিদ্রই বন্ধ করা যায়

চিত্র 56 : এই তিনটি ছিদ্রই বন্ধ করা যাবে এমন একটি প্লাগ তৈরি করতে পারেন কি

75. **তৃতীয় 'প্লাগ' :** একই ধরনের আরও একটি সমস্যা। 56 নং চিত্রে যে-তিনটি ছিদ্র দেখানো হয়েছে, সেগুলির জন্যে **একটি** 'প্লাগ' তৈরি করুন।

76 **একটি মুদ্রার কৌশল :** দুটি মুদ্রা নিন—একটি 5-কোপেক, একটি 2-কোপেক (18 মিলিমিটার আর 25 মিলিমিটার ব্যাসের যে-কোনো অনুরূপ দুটি মুদ্রা হলেই হবে)। তারপর, এক টুকরো কাগজ নিয়ে সেটার ওপরে 2-কোপেক মুদ্রাটি রেখে পরিধি বরাবর একটি সমান ব্যাসের বৃত্ত কেটে বাদ দিন।

www.pathagar.com

এখন, এই-যে গর্তটি হল, এটার মধ্যে দিয়ে 5-কোপেক মুদ্রাটি বেরিয়ে যেতে পারবে বলে আপনি কি মনে করেন ?

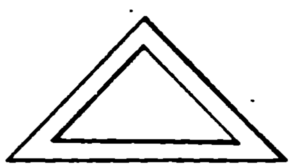
সমস্যাটির মধ্যে কিন্তু কোনোরকম ধোঁকা দেবার চেষ্টা নেই। এটা একটা খাঁটি জ্যামিতিক সমস্যা।

77 মিনারের উচ্চতা : আপনার শহরে মস্ত একটা মিনার আছে, কিন্তু আপনি জানেন না সেটা কতো উঁচু। আপনার কাছে অবশ্য মিনারটার একটা ফটোগ্রাফ আছে। ওই ফটোগ্রাফটার সাহায্যে আপনি কি মিনারটির আসল উচ্চতা বের করতে পারেন ?

78 সদৃশ রেখাচিত্র : এই সমস্যাটি শুধু তাদেরই জন্যে যারা জ্যামিতিক সাদৃশ্য বোঝেন। নিচের এই দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

(1) 57 নং চিত্রে দুটি ত্রিকোণ কি সদৃশ ?

(2) 58 নং চিত্রে, ছবির ফ্রেমটির বাইরের আর ভেতরের আয়তক্ষেত্র দুটি কি সদৃশ ?



চিত্র 57 : এই দুটি ত্রিকোণ কি সদৃশ

চিত্র 58 : বাইরের আর ভেতরের আয়তক্ষেত্র দুটি কি সদৃশ

79 তারের ছায়া : একটি রৌদ্রোজ্জ্বল দিনে, 4 মিলিমিটার ব্যাসের একটি তারের নিখুঁত ছায়া কতোদূর পর্যন্ত প্রসারিত হবে ?

80. একটি ইঁট : একটি নিয়মিত-মাপের ইঁটের ওজন 4 কিলোগ্রাম। একই উপাদানে তৈরি একটি ক্ষুদে খেলনার ইঁট—লম্বা, চওড়া আর উচ্চতা এই-

www.pathagar.com

সবগুলি মাত্রার দিক থেকে বড়ো ইঁটটির এক-চতুর্থাংশ। এই খেলনা-ইঁটটির ওজন কতো?

81. দৈত্য ও বামন: 2 মিটার লম্বা একজন লোকের ওজন মাত্র 1 মিটার উঁচু একজন বেঁটে-বামনের ওজনের চেয়ে কতো বেশি?

82 দুটি তরমুজ: একজন লোক দুটি তরমুজ বিক্রি করতে বসেছে। একটি তরমুজের ব্যাস অন্যটির চেয়ে এক-চতুর্থাংশ বড়ো; কিন্তু বড়োটির দাম ছোটটির দামের দেড় গুণ। আপনি কোন্‌টি কিনবেন?

83 দুটি খরমুজ: একই ধরনের দুটি খরমুজ বিক্রি হচ্ছে। একটির পরিধি 60 সেন্টিমিটার, অন্যটির 50 সে মি। প্রথমটির দাম দ্বিতীয়টির দামের দেড় গুণ। দুটির মধ্যে কোন্‌টি কেনা বেশি লাভজনক?

84. একটি চেরি ফল: একটি চেরি ফলের আঁটি যতোটা পুরু, আঁটিটাকে ঘিরে তার শাঁসটাও ঠিক ততোটাই পুরু। ধরে নেওয়া যাক যে, চেরি ফলটা আর তার আঁটিটা গোল। মনে মনে হিসেব করে বলুন তো, ওই চেরি ফলে আঁটির চেয়ে শাঁসের পরিমাণ কতোটা বেশি?

85 ইফেল টাওয়ার: প্যারিস শহরের 300 মিটার উঁচু ইফেল টাওয়ার ইস্পাতে তৈরি—মোট 80,00,000 কিলোগ্রাম ইস্পাতের কাঠামো। আমি এই ইফেল টাওয়ারের এক কিলোগ্রাম ওজনের একটি মডেল তৈরি করে দেবার জন্যে বায়না দেব স্থির করেছি।

ওই মডেলটির উচ্চতা কতো হবে? একটা জল খাওয়ার গেলাসের চেয়ে সেটা ছোট হবে না বড়ো হবে?

86. দুটি প্যান: গড়নের দিক থেকে একই রকম আর সমান মোটা পাতে তৈরি দুটি প্যান। একটিতে অন্যটির চেয়ে আট গুণ বেশি জিনিস ধরে।

এই বড়ো প্যানটি ছোটটির চেয়ে কতো গুণ ভারী?

87. শীতের দিনে: অনুরূপ পোশাক পরা একটি শিশু আর একজন প্রাপ্তবয়স্ক লোক শীতের দিনে রাস্তায় দাঁড়িয়ে রয়েছে।

কার বেশি শীত লাগছে?

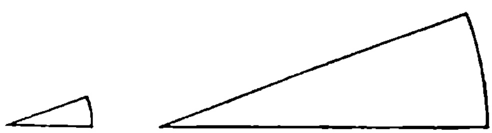
65 থেকে 87নং প্রশ্নের উত্তর

65. প্রথম নজরে এই প্রশ্নটিকে আদৌ জ্যামিতিক বলে মনে হয় না। কিন্তু জ্যামিতির জ্ঞান যাদের আছে, তাঁরা ভালো করেই জানেন যে নানা খুঁটিনাটি বাহুল্যের আড়ালে চাপাপড়া সমস্যাটির একটা জ্যামিতিক ভিত্তি কি ভাবে বের করতে হয়। এটা একটা জ্যামিতিক সমস্যা এবং জ্যামিতি ছাড়া এটার সমাধান অসম্ভব।

www.pathagar.com

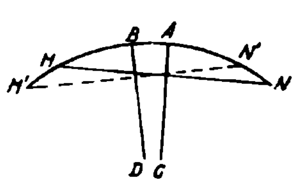
প্রশ্নটা হল, কোনো টানা-গাড়ির সামনের ধুরীটা পিছনের ধুরীটার চেয়ে তাড়াতাড়ি ক্ষয়ে যায় কেন? 47 নং চিত্রটা যদি ভালো করে লক্ষ্য করেন, তাহলে দেখবেন যে সামনের চাকাগুলো পিছনের চাকাগুলোর চেয়ে ছোট। জ্যামিতি থেকে আমরা জানি: একই দূরত্ব পার হবার জন্যে ক্ষুদ্রতর পরিধির একটি বৃত্তকে বৃহত্তর পরিধির বৃত্তের চেয়ে বেশি বার ঘুরতে হয়। এবং এটা স্বাভাবিক যে কোনো চাকা যতো বেশি ঘুরবে, ততোই তাড়াতাড়ি তার ধুরীটা ক্ষয়ে যাবে।

66 যদি ভেবে থাকেন যে ম্যাগ্‌নিফাইং কাঁচটি ওই কোণটিকে $1\frac{1}{2} \times 4 = 6°$ বাড়িয়ে তুলবে, তাহলে আপনার নিতান্তই ভুল হবে। বিবর্ধক কাঁচটি ওই কোণটির পরিমাণ বা 'ম্যাগ্‌নিচুড'কে বাড়িয়ে তোলে না। একথা ঠিক যে কোণটির মাপ নির্দেশক চাপটি বেড়ে যাচ্ছে, কিন্তু সেই সঙ্গে ব্যাসার্ধও তো আনুপাতিক ভাবে বেড়ে যাচ্ছে। ফলে, কেন্দ্রীয় কোণটির পরিমাণও অপরিবর্তিত থেকে যাচ্ছে। 59 নং চিত্র থেকে এটার ব্যাখ্যা পাওয়া যাচ্ছে।



চিত্র 59

67 লেভেল্-এর চাপটির আদি অবস্থান (চিত্র 60) হল MAN; M'BN' হল সেটার নতুন অবস্থান—যে-অবস্থানে M'N' ও MN জ্যা দুটির মধ্যে $\frac{1}{2}$ ডিগ্রি কোণ সৃষ্টি হয়েছে। বুদ্বুদটি আগে যে A বিন্দুতে ছিল,



চিত্র 60

সেখানেই আছে: কিন্তু MN চাপটির মধ্যবিন্দু সরে গেছে B-তে। আমাদের এবার AB চাপটির দৈর্ঘ্য হিসেব করে বের করতে হবে—যেটার ব্যাসার্ধ 1 মিটার এবং কোণের পরিমাণ $\frac{1}{2}$ ডিগ্রি (এটা পাওয়া যাচ্ছে এই তথ্যটি থেকে

www.pathagar.com

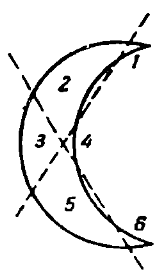
যে আমরা দুটি লম্ব বাহু [AC, BD] সমেত সংশ্লিষ্ট সূক্ষ্ম কোণ দুটিকে ধরছি)।

সেটা হিসেব করা কঠিন নয়। ব্যাসার্ধ 1 মিটার (1,000 মিলিমিটার) হওয়ায়, পরিধি হবে 2 × 3·14 × 1000 = 6,280 মিলিমিটার। এবং বৃত্ত-পরিধি জুড়ে 360 ডিগ্রি অথবা 720 আধ-ডিগ্রি আছে বলেই, এই বিশেষ ক্ষেত্রে ½ ডিগ্রির দৈর্ঘ্য হবে—6,280 ꞉ 720 = 8·7 মি মি।

অতএব, বুদ্বুদটি চিহ্ন থেকে সরে যাবে (বরং বলা উচিত, চিহ্নটি বুদ্বুদ থেকে সরে যাবে) 9 মিলিমিটারের কাছাকাছি। স্পষ্টতঃই, নলটার বক্রতার ব্যাসার্ধ যতো বড়ো হবে, লেভেল্ যন্ত্রটাও ততো বেশি করে সাড়া দেবে।

68. এই সমস্যাটির মধ্যে কোনো চালাকি নেই। প্রশ্নটা ঘুলিয়ে যায় শুধু 'ষড়্ভুজ' কথাটির ভুল ব্যাখ্যার দ্বারা। কোনো ষড়্ভুজ পেন্সিলের তল—বেশির ভাগ লোকই বোধহয় যা ভাবেন—ছয়টি নয়। যদি লেখার উদ্দেশ্যে পেন্সিলটির একটা দিক কেটে ফেলা না হয়ে থাকে, তাহলে সেটার আটটি তল আছে ꞉ ছয়টি দৈর্ঘ্য বরাবর তল এবং দুই প্রান্তে দুটি ছোট ভূমিতল। কোনো পেন্সিলের যদি মোট ছয়টি তল থাকে, তাহলে সেটার আকার হবে সম্পূর্ণ ভিন্ন রকম—তার ছেদটা হবে আয়তক্ষেত্র।

69. এটা করতে হবে 61 নং চিত্রতে যেভাবে দেখানো হয়েছে, সেইভাবে। চন্দ্রকলাটিকে ছয়টি অংশে ভাগ করা হয়েছে এবং বুঝতে সুবিধা হবে বলে প্রত্যেকটি অংশকে নম্বর দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে।

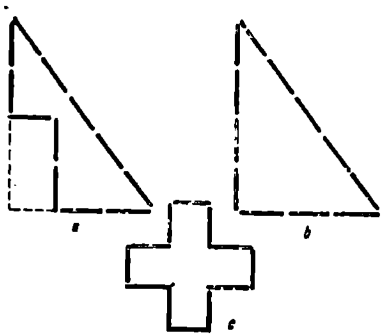


চিত্র 61

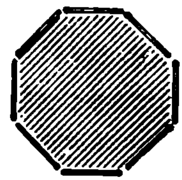
70. দেশলাই-কাঠিগুলিকে সাজাতে হবে 62*a* নং চিত্রে যেমনটি দেখানো হয়েছে, সেইভাবে। এই নকশাটির ক্ষেত্রফল একটি "দেশলাই-কাঠি-বর্গক্ষেত্রে"র আয়তনের চতুর্গুণ। স্পষ্টতঃই তাই। মনে মনে এই নকশাটিকে ভরাট করে একটি ত্রিকোণ তৈরি করা যাক (চিত্র 62b)। এমন একটি সমকোণী-ত্রিভুজ পাওয়া গেল, যেটার ভূমি তিনটি দেশলাই-কাঠির সমান আর উচ্চতা চারটির

www.pathagar.com

সমান।* এটার ক্ষেত্রফল হল—ভূমিকে উচ্চতা দিয়ে গুণ করে, তার অর্ধেক যা হয়, তাই : $3\times4\times\frac{1}{2}=6$টি "দেশলাই-কাঠি-বর্গক্ষেত্রের" সমান। কিন্তু



চিত্র 62



চিত্র 63

আমাদের নকশাটির ক্ষেত্রফল স্পষ্টতঃই সেটার চেয়ে দুটি "দেশলাই-কাঠি-বর্গক্ষেত্র" কম। অতএব এটি ওইরকম চারটি বর্গক্ষেত্রের সমান।

71. এটা প্রমাণ করা যায় যে সমস্ত রকমের সমতলীয় বদ্ধ-নকশার মধ্যে বৃত্তই হচ্ছে বৃহত্তম। অবশ্যই, দেশলাই-কাঠি দিয়ে বৃত্ত তৈরি করা অসম্ভব। তবু, আটটি দেশলাই-কাঠি দিয়ে এমন একটি নকশা রচনা করা সম্ভব (চিত্র 63) যেটা একটি বৃত্তের সবচেয়ে কাছাকাছি চেহারা পাচ্ছে—একটি সুষম অষ্টভুজ। ঠিক এই সুষম অষ্টভুজটিই আমাদের দরকার। কারণ, এটার ক্ষেত্রফলই বৃহত্তম।

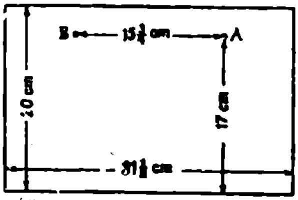
72. এই সমস্যাটির সমাধান করতে হলে আমাদের বেলনাকার পাত্রটিকে খাড়াখাড়ি চিরে নিয়ে একটি সমতলের ওপরে সমান-সমান করতে হবে। ফলে, আমরা এমন একটি আয়তক্ষেত্র পাব (চিত্র 64) যেটার প্রস্থ 20 সেন্টিমিটার আর দৈর্ঘ্য পরিধির সমান, অর্থাৎ, $10\times3\frac{1}{7}=31\cdot5$ সে মি (মোটামুটি)। এবার এই আয়তক্ষেত্রটিতে মাছির আর মধুর বিন্দুটির অবস্থান চিহ্নিত করা যাক। মাছিটা রয়েছে, ভূমি থেকে 17 সে মি উঁচুতে A বিন্দুতে। আর, এক ফোঁটা মধু লেগে রয়েছে—একই উচ্চতায়, কিন্তু বেলনাকার পাত্রটির অর্ধ-পরিধি দূরে—B বিন্দুতে : অর্থাৎ, $15\frac{3}{4}$ সে মি দূরে।

মাছিটা যে ঠিক কোন্ বিন্দুতে পাত্রটির উপরের প্রান্ত ডিঙিয়ে ভিতরের দিকে আসবে, সেটা বের করার জন্যে আমাদের এটাই করতে হবে : B বিন্দু

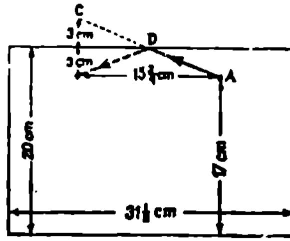
* পিথাগোরীয় প্রতিভার সঙ্গে পরিচিত পাঠকরা বুঝবেন, আমাদের এই ত্রিভুজটি যে সমকোণ, সে সম্বন্ধে আমরা কেন এতো সুনিশ্চিত : $3^2+4^2=5^2$।

www.pathagar.com

থেকে (চিত্র 65) আমরা পাত্রটির ওপর দিকের প্রান্তে একটা লম্ব রেখা টানব এবং সেই রেখাটিকে আরও উপরের দিকে সমান দূরত্বে টেনে নিয়ে যাব।



চিত্র 64



চিত্র 65

এই ভাবে আমরা পাব C বিন্দুটিকে এবং A আর C-কে যুক্ত করব একটি সরলরেখা টেনে। তাহলে D বিন্দুটা হবে সেই জায়গাটা—যেখান দিয়ে মাছটা পাত্রটির প্রান্ত ডিঙিয়ে ভিতরে ঢুকবে। ADB-বরাবর যাওয়াটাই হবে তার পক্ষে সংক্ষিপ্ততম পথ।

সমতলে সাঁটা এই আয়তক্ষেত্রটির ওপরে সংক্ষিপ্ততম পথটি ছকে নেবার পর, আমরা সেটাকে আবার বেলনের আকারে গুটিয়ে নিয়ে দেখে নিতে পারি—কি ভাবে মাছিটাকে ওই এক ফোঁটা মধুর কাছে যেতে হবে (চিত্র 66)।

এসব ক্ষেত্রে মাছিরা ঠিক এই পথ ধরেই যায় কি-না, তা জানিনে। সম্ভবতঃ, ভালো ঘ্রাণশক্তি থাকায়, মাছিরা বাস্তবিকপক্ষে এই সংক্ষিপ্ততম পথ ধরেই এগোয়—সম্ভবতঃ, কিন্তু সাধারণতঃ নয়। জ্যামিতির জ্ঞান ছাড়া, শুধু ভালো ঘ্রাণশক্তি যথেষ্ট নয়।

73 এরকম প্লাগ আছে। 67 নং চিত্রে সেটা দেখানো হয়েছে, এবং দেখতেই

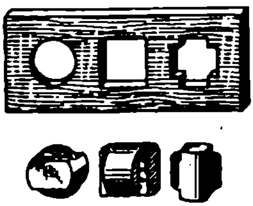
চিত্র 66

চিত্র 67

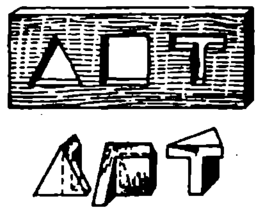
www.pathagar.com

পাচ্ছেন, এটা বাস্তবিকই—চারকোণা, তিনকোণা আর গোল—এই তিনটি ছিদ্রই বন্ধ করে দিতে পারে।

74. 68 নং চিত্রে যা দেখানো হয়েছে, সেই রকম—গোল, চারকোণা আর ক্রুশাকার—তিনটি ছিদ্র বন্ধ করার মতো প্লাগও আছে। প্লাগটির তিনটি দিকই দেখানো হয়েছে।



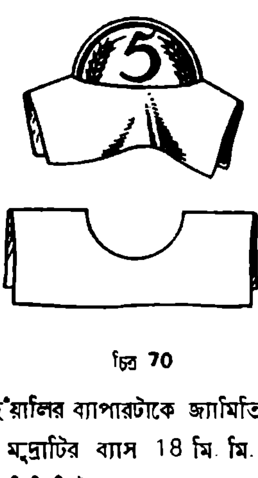
চিত্র 68



চিত্র 69

75. সবশেষে, এরকম প্লাগও আছে। 69 নং চিত্রে এর সবগুলি দিক দেখতে পাবেন।

76. একটু অবাক লাগলেও, এরকম একটি ছোট ছিদ্রের মধ্যে দিয়ে একটি পাঁচ-কোপেক মুদ্রাকে সেঁধিয়ে দেওয়া রীতিমতো সম্ভব। কাগজটাকে ভাঁজ করে, দুই প্রান্ত টেনে ধরলে ফাঁকটা বড়ো হয়ে যাবে (চিত্র 70), এবং সেই ফাঁকের মধ্যে দিয়ে 5-কোপেক মুদ্রাটি গলে যাবে।



চিত্র 70

আপাতদৃষ্টিতে এই হেঁয়ালির ব্যাপারটাকে জ্যামিতির সাহায্যে সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়। 2-কোপেক মুদ্রাটির ব্যাস 18 মি. মি.। এর পরিধির মাপ বের করাটা কঠিন নয়ঃ 56 মিলিমিটারের যৎসামান্য বেশি। সুতরাং, কাগজটার দুই প্রান্ত টেনে ধরার পর সরলরেখায় পরিণত ছিদ্রটির দৈর্ঘ্য দাঁড়াবে তার

www.pathagar.com

অর্ধেক বা 28 মিলিমিটার। এবং একটি 5-কোপেক মুদ্রার ব্যাস 25 মি. মি হওয়ায়, সেটা সহজেই 28 মি. মি. লম্বা একটা ফাঁক দিয়ে সেঁধিয়ে যাবে—এমন কি, সেটা 1·5 মিলিমিটার পুরু হওয়া সত্ত্বেও।

77. মিনারটির আসল উচ্চতা বের করার আগে, প্রথমে দরকার ফটোগ্রাফটিতে সেটার উচ্চতা আর ভিত্তির সঠিক মাপ পাওয়া। ধরা যাক, এ দুটি যথাক্রমে 95 ও 19 মিলিমিটার। এরপর আপনি আসল মিনারটির ভিত্তি মাপবেন। ধরা যাক, সেটা 14 মিটার চওড়া।

জ্যামিতির দিক থেকে, ফটোগ্রাফের মিনার আর আসল মিনার আনুপাতিক ভাবে একই। অর্থাৎ, ফটোগ্রাফের মিনারটির উচ্চতা আর ভিত্তির প্রস্থের অনুপাত এবং আসল মিনারটির উচ্চতা আর ভিত্তির প্রস্থের অনুপাত সমান-সমান। প্রথম ক্ষেত্রে সেটা 95 : 19, অর্থাৎ 5। অতএব, মিনারটির উচ্চতা তার ভিত্তির প্রস্থের চেয়ে পাঁচ গুণ বেশি। সুতরাং, আসল মিনারটির উচ্চতা : $14 \times 5 = 70$ মিটার।

অবশ্য, একটা "কিন্তু" আছে। মিনারের উচ্চতা স্থির করার জন্যে আপনার একটি সত্যিই ভালো ফটোগ্রাফ চাই—অনভিজ্ঞ, শখের ফটোগ্রাফাররা মাঝে মাঝে যেরকম অস্পষ্ট বাঁকাতেড়া ফটো তোলে, সে রকম নয়।

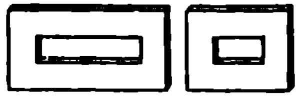
78. এই প্রশ্ন দুটির উত্তরে প্রায়ই 'হ্যাঁ' বলা হয়। বাস্তবিকপক্ষে, শুধু ত্রিকোণ দুটিই সদৃশ। চিত্রের ফ্রেমের বাইরের আর ভিতরের আয়তক্ষেত্র দুটি, সাধারণ ভাবে বলতে গেলে, সদৃশ নয়। ত্রিকোণগুলির বেলায়, তাদের অনুরূপ কোণগুলির সমান-সমান হলেই তারা সদৃশ হবে! এবং, যেহেতু ভিতরের ত্রিকোণটির বাহুগুলি বাইরের ত্রিকোণটির সমান্তরাল, সেইহেতু চিত্র দুটিও সমরূপ। দুটি বহুভুজকে সদৃশ হতে হলে কিন্তু শুধু তাদের কোণগুলি সমান-সমান (অথবা—বলতে গেলে, একই কথা—তাদের ভুজগুলি সমান্তরাল) হলেই চলবে না : বহু ভুজগুলির বাহুগুলিরও সমানুপাতিক হওয়া চাই।

কোনো ছবির ফ্রেমের বাইরের আর ভিতরের আয়তক্ষেত্র দুটির কথা বলতে গেলে, শুধু বর্গক্ষেত্রের (সাধারণ ভাবে, রম্বসের) বেলাতেই এই দুটি সদৃশ হতে পারে। অন্য সমস্ত ক্ষেত্রেই, বাইরের আর ভিতরের আয়তক্ষেত্রগুলির বাহুগুলি সমানুপাতিক নয়, অতএব চিত্রগুলিও সদৃশ নয়। এই অসাদৃশ্য আরো স্পষ্ট হয়ে ওঠে সেটা আয়তক্ষেত্রাকার ফ্রেমের বেলায় (চিত্র 71)। বাঁ দিকে ফ্রেমটিতে বাইরের দুটি ভুজের অনুপাত হল 2 : 1 এবং ভিতরেরটির হল 4 : 1 ; ডান দিকের ফ্রেমটির বেলায় যথাক্রমে 4 : 3 এবং 2 : 1।

79. বহু লোক জেনে অবাক হবেন যে এই সমস্যাটির সমাধানের জন্যে

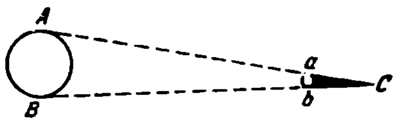
www.pathagar.com

জ্যোতির্বিদ্যার জ্ঞান থাকা চাই : পৃথিবী আর সূর্যের মধ্যে দূরত্ব আর



চিত্র 71

সূর্যের ব্যাসের মাপ জানা চাই। 72 নং চিত্রে যে জ্যামিতিক চিত্রটি দেখানো হয়েছে, তা থেকেই নির্ণীত হচ্ছে তারাটির নিখুঁত ছায়ার দৈর্ঘ্য। সহজেই দেখা যাবে যে, পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যে দূরত্বটা (15,00,00,000 কিলো-



চিত্র 72

মিটার) সূর্যের ব্যাসের (14,00,000 কিলোমিটার) চেয়ে যতো গুণ বড়ো, তারের ছায়াটাও সেটার ব্যাসের চেয়ে ততো গুণ বড়ো। কাছাকাছি পূর্ণ সংখ্যা ধরলে, প্রথম ক্ষেত্রে অনুপাত হচ্ছে 115 ; অতএব, তারটির নিখুঁত ছায়া প্রসারিত হয়ে দাঁড়াবে :

$4 \times 115 = 460$ মিলিমিটার $= 46$ সেণ্টিমিটার।

নিখুঁত ছায়াটির এই যৎসামান্য দৈর্ঘ্য থেকে বোঝা যাবে, কেন সেটাকে সব সময়ে মাটির ওপরে অথবা দেয়ালের গায়ে দেখা যায় না ; যে অস্পষ্ট ডোরাটা দেখা যায় সেটা ছায়া নয়, উপচ্ছায়া মাত্র।

এ ধরনের সমস্যা সমাধানের আরেকটি পদ্ধতি বলা হয়েছে প্রথম অধ্যায়ের আট নম্বর প্রশ্নের উত্তরে।

80. খেলনা-ইঁটটির ওজন এক কিলোগ্রাম—অর্থাৎ, আসল ইঁটের চার ভাগের এক ভাগ—এই উত্তরটা সম্পূর্ণ ভুল! ক্ষুদে ইঁটটি আসল ইঁটের চেয়ে শুধু উচ্চতায় এক-চতুর্থাংশ নয় ; সেই সঙ্গে সেটা দৈর্ঘ্যে আর প্রস্থেও বড়ো ইঁটটির চার ভাগের এক ভাগ ; সুতরাং সেটার আয়তন হবে $4 \times 4 \times 4 = 64$ ভাগের এক ভাগ। অতএব, সঠিক উত্তরটা হবে : $4{,}000 : 64 = 62 \cdot 5$ গ্রাম।

81. এই সমস্যাটি উপরের সমস্যাটিরই অনুরূপ। সুতরাং, এটার সঠিক সমাধান আপনার করতে পারা উচিত। মানুষের দেহের গড়ন যেহেতু অল্প-

www.pathagar.com

বিস্তর একই রকম. সেই হেতু দ্বিগুণ দীর্ঘকায় লোকটির ওজন দ্বিগুণ নয়, আট গুণ বেশি।

সারা পৃথিবীতে সবচেয়ে লম্বা যে-মানুষটির কথা জানা আছে, তিনি ছিলেন 2·75 মিটার লম্বা একজন আলসেশিয়ার অধিবাসী—গড় উচ্চতার একজন লোকের চেয়ে প্রায় এক মিটার দীর্ঘতর। এবং, সবচেয়ে ছোটখাটো মানুষটি ছিলেন উচ্চতায় 40 সেন্টিমিটারের চেয়েও কম একজন বামন; কিংবা, সবচেয়ে কাছাকাছি হিসেবে বলা যায়, তিনি ছিলেন ওই আলসেশিয়াবাসীর চেয়ে সাত ভাগের এক ভাগ খাটো। আমরা যদি এঁদের দুজনকে ওজন করার জন্যে, দাঁড়িপাল্লার একদিকে ওই আলসেশিয়ানকে চাপাতাম, তাহলে অন্যদিকে সেই বামনাকৃতি মানুষটির অনুরূপ $7 \times 7 \times 7 = 343$ বামনকে চাপাতে হত ভারসাম্যের জন্যে এবং সেটা হয়ে দাঁড়াত রীতিমতো একটা বিরাট জনসমাবেশ।

82. ছোট তরমুজটির চেয়ে, বড়ো তরমুজটির আয়তন $1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}$ গুণ; অথবা, প্রায় দ্বিগুণ।

সুতরাং বড়ো তরমুজটি কেনাই ভালো। এটার দাম মাত্র দেড় গুণ বেশি, কিন্তু শাঁস আছে দ্বিগুণ।

আপনি জিজ্ঞাসা করতে পারেন যে তাহলে দোকানী এরকম একটা তরমুজের জন্যে দ্বিগুণ দাম না চেয়ে, মাত্র দেড় গুণ দাম চাইবে কেন? ব্যাখ্যাটা সহজ: বেশির ভাগ দোকানী জ্যামিতিতে তেমন দড়ো নয়। কিন্তু তেমনি আবার, ক্রেতারাও তা নয়। এবং, একারণেই ক্রেতারা প্রায়ই এমন লাভজনক লেনদেন করতে চায় না। এই কথাটা সুনির্দিষ্ট ভাবে খুব জোরের সঙ্গেই বলা যায় যে, ছোট আকারের চেয়ে বড়ো আকারের তরমুজ কেনাই ভালো। কারণ, বড়ো তরমুজের দাম সব সময়ে সত্যিকার যা দাম হওয়া উচিত তার চেয়ে কম হয়ে থাকে—কিন্তু বেশির ভাগ ক্রেতাই সেটা সন্দেহও করে না।

এবং, একই কারণে, ছোট ডিমের চেয়ে বড়ো ডিম কেনাটাই বেশি লাভজনক—অর্থাৎ, সেগুলি যদি ওজন দরে বিক্রি করা না হয়।

83. দুটি বৃত্তের পরিধি দুটির অনুপাত তাদের দুই ব্যাসের অনুপাতের সমান। একটি খরমুজের পরিধি যদি হয় 60 সেন্টিমিটার এবং অপরটির 50 সে. মি. তাহলে তাদের ব্যাস দুটির অনুপাত হবে $60 : 50 = \frac{6}{5}$ এবং তাদের আয়তনের অনুপাত দাঁড়াচ্ছে:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1 \cdot 73$$

বড়ো মাপের খরমুজটির দাম—যদি সেটার আয়তন (বা ওজন) অনুযায়ী দাম নির্ধারিত হত, তাহলে হওয়া উচিত ছোট মাপের খরমুজটির দামের চেয়ে 1·73

www.pathagar.com

গুণ অথবা 73 শতাংশ বেশি। তা সত্ত্বেও, দোকানী চেয়েছে মাত্র 50 শতাংশ বেশি। সুতরাং স্পষ্টতঃই বড়ো মাপের খরমুজটি কেনাই বেশি লাভজনক।

84. সমস্যাটির মধ্যেই বলে দেওয়া হয়েছে—চেরি ফলের ব্যাস তার আঁটির ব্যাসের তিনগুণ। সুতরাং, চেরি ফলের আয়তন তার আঁটির $3 \times 3 \times 3 = 27$ গুণ। অর্থাৎ, আঁটিটা চেরি ফলটির $\frac{1}{27}$ ভাগ দখল করে রয়েছে এবং বাকি $\frac{26}{27}$ ভাগই হল সেটার শাঁস। অতএব, শাঁসের আয়তন আঁটির আয়তনের চেয়ে 26 গুণ বেশি।

85. মডেলটি যদি আসল ইফেল টাওয়ারের 80 লক্ষ ভাগের এক ভাগ হয় এবং দুটোই যদি একই ধাতু দিয়ে গড়া হয়, তাহলে মডেলটির আয়তন হবে আসল টাওয়ারের আয়তনের 80 লক্ষ ভাগের এক ভাগ। আমরা জানি, হুবহু অনুরূপ দুটি জিনিসের আয়তনের অনুপাত তাদের উচ্চতার ঘনাংকের অনুপাতের সমান। অতএব, মডেলটিকে অবশ্যই আসল টাওয়ারটির 200 ভাগের এক ভাগ ছোট হতে হবে। কারণ, 80,00,000-র ঘনমূল হল 200 $(200)^3 = 200 \times 200 \times 200 = 80,00,000$।

আসল টাওয়ারটির উচ্চতা 300 মিটার। সুতরাং, মডেলটির উচ্চতা হবে $300 : 200 = 1\frac{1}{2}$ মিটার।

তাহলে, দেখা যাচ্ছে, মডেলটি হবে প্রায় একজন মানুষের সমান উঁচু।

86. জ্যামিতিক দিক থেকে দুটি প্যানই সদৃশ। বড়োটির ধারণক্ষমতা যদি আট গুণ বেশি হয়, তাহলে সেটার সবগুলি রৈখিক মাপই দ্বিগুণ: উচ্চতায় ও প্রস্থে দ্বিগুণ বড়ো। কিন্তু সেক্ষেত্রে, এর উপরিতল $2 \times 2 = 4$ গুণ বড়ো। কারণ, অনুরূপ দুটি জিনিসের উপরিতলে অনুপাত তাদের রৈখিক মাপগুলির বর্গের অনুপাতের সমান। প্যান দুটির চারপাশ সমান পুরু হওয়ায়, তাদের ওজন নির্ভর করছে উপরিতলের আয়তনের ওপরে। সুতরাং উত্তর হল: বড়ো প্যানটির ওজন ছোটটির চেয়ে চতুর্গুণ বেশি।

87. প্রথম নজরে সমস্যাটিকে মোটেই গাণিতিক সমস্যা বলে মনে হয় না। কিন্তু বাস্তবিকপক্ষে, পূর্ববর্তী সমস্যাটির মতোই, এটার সমাধান করতে হবে জ্যামিতিক ভাবে।

এই সমস্যাটির সমাধানের কাজে নামার আগে, আরেকটি সমস্যা—একই ধরনের, কিন্তু আরও সহজ একটি সমস্যা সম্বন্ধে একটু ভেবে দেখা যাক। অন্যটির চেয়ে আয়তনে বড়ো—গরম জলে ভর্তি করা হয়েছে। দুটির মধ্যে কোন্ বয়লারের জল আগে ঠাণ্ডা হবে?

যে কোনো জিনিস সাধারণতঃ বহিস্তল থেকে ঠাণ্ডা হয়। সুতরাং, যে-বয়লারের আয়তনের প্রতি এককে বৃহত্তর বহিস্তল রয়েছে, সেটাই বেশি তাড়াতাড়ি ঠাণ্ডা

www.pathagar.com

হতে থাকবে। একটি বয়লার যদি অন্যটির চেয়ে n গুণ উঁচু আর প্রশস্ত হয়, তাহলে সেটার বহিস্তল n^2 গুণ এবং আয়তন n^3 গুণ বৃহত্তর হবে ; কারণ, বড়ো বয়লারটির বহিস্তলের প্রতি এককে n গুণ বেশি আয়তন রয়েছে। অতএব, ছোট বয়লারটি আরও তাড়াতাড়ি ঠাণ্ডা হচ্ছে।

একই কারণে, শীতের দিনে রাস্তায় দাঁড়িয়ে থাকা একটি শিশুর, অনুরূপ পোশাক পরা একজন প্রাপ্তবয়স্ক লোকের চেয়ে, বেশি ঠাণ্ডা লাগবে। উভয়ের ক্ষেত্রেই দেহের প্রতি ঘন-সেণ্টিমিটারে তাপের পরিমাণ মোটামুটি সমান। কিন্তু প্রাপ্তবয়স্ক লোকটির চেয়ে, শিশুটির দেহের প্রতি ঘন-সেণ্টিমিটারে ঠাণ্ডা লাগার মতো জায়গা বেশি।

এই কারণেই কোনো মানুষের দেহের অন্য যে-কোনো অংশের চেয়ে আঙুলে আর নাকে বেশি ঠাণ্ডা লাগে আর ওই সব জায়গাতেই বেশির ভাগ ক্ষেত্রে তুষারের কামড়ে ক্ষত সৃষ্টি হয়। কারণ, দেহের অন্যান্য অংশের বহিস্তল সেইসব অংশের আয়তনের তুলনায় ততো বড়ো নয়।

এবং সবশেষে, এটা থেকেই—একটা উদাহরণ হিসেবে—এই সমস্যাটির ব্যাখ্যা পাওয়া যাচ্ছে : ছোট করে কাটা টুকরো কাঠ কেন—যে গুঁড়িটা কেটে ওই ছোট টুকরোগুলো বের করা হয়েছে, সেই গুঁড়িটার চেয়ে—তাড়াতাড়ি আগুন ধরে ?

কোনো জিনিসের বহিস্তল থেকেই সেটার পুরো আয়তন জুড়ে তাপ ছড়িয়ে পড়ে ; তাই, টুকরো কাঠ আর কাঠের গুঁড়ি—এই উভয় ক্ষেত্রে প্রতি এক ঘন-সেণ্টিমিটারে বহিস্তলের আকার নির্ণয় করার জন্যে, টুকরো কাঠের বহিস্তল আর আয়তনের সঙ্গে (যেমন, ধরা যাক, বর্গ-ছেদের সঙ্গে) গুঁড়িটার সমান দৈর্ঘ্যের আর সমান বর্গ-ছেদের তুলনা হিসেব করা দরকার। কাঠের টুকরোটার চেয়ে গুঁড়িটা যদি দশ গুণ মোটা হয়, তাহলে গুঁড়িটার পার্শ্ব-তল হবে টুকরো কাঠটির পার্শ্ব-তলের চেয়ে দশগুণ বড়ো এবং আয়তন হবে 100 গুণ বড়ো। সুতরাং, টুকরো কাঠের বহিস্তলের প্রতি এককের আয়তন গুঁড়িটির প্রতি এককের আয়তনের দশ ভাগের একভাগ : একই পরিমাণ তাপ টুকরো কাঠের যতোটা উপাদানকে উত্তপ্ত করে, সেটা গুঁড়িটার উপাদানের দশ ভাগের এক ভাগ। সেইজন্যেই, একই তাপের উৎস গুঁড়িটার চেয়ে টুকরো কাঠটিতে আরও তাড়াতাড়ি পোড়ায়।

একই উপাদানে তৈরি আর হুবহু সদৃশ আকারের দুটি বয়লার—একটি (কাঠের তাপ পরিবাহিতা খুব কম হওয়ার দরুন, এই তুলনাটাকে শুধু একটা মোটামুটি হিসেব বলেই গণ্য করতে হবে—এটা পুরো প্রক্রিয়াটির বৈশিষ্ট্য-সূচক, পরিমাণগত দিকের নয়।)

www.pathagar.com

।। অধ্যায় নয় ।।

বৃষ্টি আর তুষারের জ্যামিতি

৪৪. প্লুভিওমিটার : সোভিয়েত ইউনিয়নে লেনিনগ্রাদ শহরে খুব বেশি রকম বৃষ্টিপাত হয় বলে ধরে নেওয়াটা রীতি হয়ে দাঁড়িয়েছে : যেমন, ধরা যাক, মস্কোর চেয়ে সেটা নাকি ঢের বেশি বৃষ্টিপাতের শহর। কিন্তু বিজ্ঞানীরা একথা অস্বীকার করেন। তাঁরা দাবি করেন, লেনিনগ্রাদের চেয়ে মস্কোয় বেশি বৃষ্টিপাত হয়। কি ভাবে তাঁরা জানলেন এটা ? বৃষ্টির জল মাপার সত্যিই কোনো উপায় আছে কি ?

কাজটা আপাতদৃষ্টিতে কঠিন বলে মনে হলেও, আপনি সেটা নিজেই করতে পারেন। মাটির বুকে যতো জল এসে পড়ছে সেই সবই যে আপনাকে সংগ্রহ করতে হবে, তা ভাববেন না। বৃষ্টির জলটা যদি ছড়িয়ে না পড়ত আর মাটি যদি সেটা শুষে না নিত, তাহলে শুধু জলস্তরের **গভীরতা** মাপলেই চলত। এবং সেটা করা মোটেই কঠিন হত না।

বৃষ্টিপাত যখন হয়, তখন তা সর্বত্র সমান ভাবে ঝরে পড়ে : কোনো একটি বাগানে তার পাশের বাগানটির চেয়ে বেশি জল পড়ছে—এমন ব্যাপার হতেই পারে না। সুতরাং, পুরো এলাকা জুড়ে জলের গভীরতা জানার জন্যে কোনো একটা জায়গায় জলের গভীরতা মাপলেই যথেষ্ট।

এবার আপনি বোধহয় বুঝেছেন যে বৃষ্টিজলের পরিমাণ মাপার জন্যে আপনাকে কি করতে হবে। আপনাকে শুধু এমন একটা ছোট জায়গা বেছে নিতে হবে যেখানে জলটা ছড়িয়ে পড়বে না কিংবা মাটির গভীরে মিলিয়ে যাবে না। এজন্যে যেকোনো মুখ-খোলা পাত্র ধরা যাক, একটা বালতি হলেই চলে। চোঙার আকারের কোনো পাত্র (যেটার চারপাশ খাড়াখাড়ি উঁচু) যদি আপনার থাকে, তাহলে সেটা বৃষ্টির মধ্যে রেখে দিন।* বৃষ্টি থেমে গেলে, পাত্রটির মধ্যে জলের গভীরতা মেপে নিন। তাহলেই হিসেব করার মতো সবই হাতে পাবেন।

আমাদের এই হাতে বানানো প্লুভিওমিটারটিকে কি ভাবে কাজে লাগানো হচ্ছে, দেখা যাক। বালতিতে জলের গভীরতা মাপা হবে কি ভাবে ? মাপকাঠি দিয়ে। যদি সেটাতে প্রচুর পরিমাণে জল জমে ওঠে, তাহলে এটা মন্দ হবে না। কিন্তু সাধারণতঃ বালতিটায় জলের পরিমাণ দাঁড়ায় 2-3

* চোঙাটা যতো উঁচুতে রাখা সম্ভব, তাই রাখবেন যাতে মাটির ওপরে পড়ে বৃষ্টির ফোঁটাগুলো ছিটকে সেটার ভিতরে গিয়ে না ঢোকে।

www.pathagar.com

সেণ্টিমিটার, কখনও বা এমন-কি কয়েক মিলিমিটার মাত্র। এবং সে ক্ষেত্রে সেটা নিখুঁত ভাবে করা অসম্ভব। আমাদের কাজের জন্যে সেটার প্রত্যেক মিলিমিটার—বাস্তবিকপক্ষে সেটার প্রতিটি ভগ্নাংশ পর্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। তাহলে কি করতে হবে আমাদের ?

সবচেয়ে ভালো হবে জলটাকে বালতি থেকে আরও সরু কোনো একটা কাচের পাত্রে ঢেলে নেওয়া। এতে জলের স্তরটা আরো উঁচু হবে এবং স্বচ্ছ পাশগুলোর মধ্যে দিয়ে ওই জলস্তরটা কতোটা উঁচু সেটা সহজেই দেখা যাবে। অবশ্যই, জলের যে-গভীরতা আমরা মাপতে চাচ্ছি, সরু পাত্রটিতে জলের গভীরতা তা হবে না ; কিন্তু তা না হলেও, একটা মাপকে অন্য একটা মাপে পরিবর্তিত করে নেওয়া সহজ। সরু আধারটির তলদেশের (বা ভূমির) ব্যাস যদি হয় বালতি প্লুভিওমিটারের তলদেশের ব্যাসের এক-দশমাংশ, তাহলে সেটার তলদেশের ক্ষেত্রফল হবে 10×10=100 ভাগের এক ভাগ। স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে কাচের আধারটির জলস্তর হবে বালতির জলস্তরের 100 গুণ উচ্চতর। সুতরাং, বালতিটায় যদি 2 মিলিমিটার বৃষ্টির জল জমে থাকে, তাহলে কাচের আধারটায় সেই জলের উচ্চতা হবে 200 মিলিমিটার, অথবা 20 সেণ্টিমিটার।

এই হিসেবটা থেকে আপনি দেখতে পাচ্ছেন যে, বালতি প্লুভিওমিটারের চেয়ে এই আধারটির খুব বেশি সরু হওয়া উচিত নয়। কারণ, তাহলে বৃষ্টির জলের গভীরতা মাপার জন্যে আমাদের অন্ততঃ উঁচু একটা কাচের আধার দরকার হবে। পাঁচ ভাগের এক ভাগ সরু হলেই যথেষ্ট। এক্ষেত্রে এর তলদেশের ক্ষেত্রফল হবে বালতির তলদেশের 25 ভাগের এক ভাগ এবং জলস্তরটি হবে 25 গুণ উচ্চতর। বালতির প্রতি মিলিমিটার জল হবে কাচের আধারটির 25 মিলিমিটারের সমান। মাপতে যাতে সুবিধে হয়, তার জন্যে কাচের পাত্রটির বাইরের গায়ে একটা লম্বা ফালি কাগজ সেঁটে দিন এবং সেটাকে 27 মিলিমিটার ভাগে ভাগ করে প্রত্যেকটি ভাগকে 1,2,3 ইত্যাদি সংখ্যায় চিহ্নিত করুন। এবার কাচের আধারটিতে জলের উচ্চতা দেখে নিয়ে আপনি হিসেবটাকে পরিবর্তিত না করেই বালতি-প্লুভিওমিটারে তার গভীরতা জেনে যাচ্ছেন। কাচের আধারটির ব্যাস যদি হয় বালতিটার ব্যাসের এক-পঞ্চমাংশ নয়—এক-চতুর্থাংশ, তাহলে কাগজের ফালিটাকে 16 মিটারে ভাগ করতে হবে।

বালতি থেকে কোনো সরু পাত্রে জল ঢালাটা খুবই অসুবিধাজনক। একটা ভালো উপায় হল বালতিটার পাশে একটা ছ্যাঁদা করে নিয়ে একটা কাচের নলের মধ্যে দিয়ে (কলের জলের মতো) জলটা বের করে নেওয়া।

www.pathagar.com

তাহলে, এবার আপনি বৃষ্টির জলের গভীরতা মাপার মতো প্রয়োজনীয় সরঞ্জামটি পেয়ে গেছেন। একটা বালতি আর ঘরে তৈরি একটি বৃষ্টি মাপার গেজ, স্বভাবতই আবহাওয়া দপ্তরগুলিতে ব্যবহৃত আসল প্লুভিওমিটার বা মাপ-চিহ্নিত কাঁচের পাত্রের মতো নিখুঁত নয়। তবু, এই সাদাসিধে আর খুব অল্প খরচে তৈরি সরঞ্জামটি আপনাকে জানাবার মতো নানা মাপজোখ করতে সমর্থ করে তুলবে।

এখানে কয়েকটি সমাস্যা দেওয়া গেল।

৪৭. বৃষ্টিপাতের পরিমাণ কতো : আপনার একটি খিড়কি বাগান আছে, যেটা লম্বায় 40 মিটার, চওড়ায় 24 মিটার। সবে বৃষ্টি থেমেছে—আপনি জানতে চান : ওই বাগানের ওপরে কতোটা জল ঝরে পড়েছে।

এটা কি ভাবে হিসেব করতে হবে ?

বৃষ্টির জলের গভীরতা মাপা থেকে আপনাকে কাজটা শুরু করতে হবে : এটা না জেনে আপনি কিছুই করে উঠতে পারবেন না। ধরে নেওয়া যাক যে আপনার হাতে তৈরি প্লুভিওমিটার 4 মিলিমিটার বৃষ্টির জল নির্দেশ করছে। এবার আমরা হিসেব করব—খিড়কি-বাগানটির প্রতি বর্গ-মিটারে কতো ঘন-সেণ্টিমিটার জল দাঁড়িয়েছে--অর্থাৎ, মাটি যদি জলটাকে শুষে না নিত। এক বর্গমিটার মানে লম্বায় 100 সেণ্টিমিটার আর চওড়ায় 100 সেণ্টিমিটার। এটার ওপরে জমেছে 4 মিলিমিটার, অর্থাৎ, 0·4 সেণ্টিমিটার জলস্তর। সুতরাং এই মাপের একটা জলস্তরের আয়তন দাঁড়াবে $100 \times 100 \times 0{\cdot}4 = 4{,}000$ ঘনসেণ্টিমিটার।

আপনি জানেন, 1 ঘন সে মি. জলের ওজন 1 গ্রাম। অতএব, খিড়কি-বাগানটির প্রতি বর্গমিটারে রয়েছে 4,000 গ্রাম বা 4 কিলোগ্রাম জল। আপনার বাগানটির আয়তক্ষেত্র : $40 \times 24 = 960$ বর্গমিটার।

অর্থাৎ, আপনার খিড়কি-বাগানে ঝরে পড়া বৃষ্টিজলের ওজন : $4 \times 960 = 3{,}840$ কেজি অথবা, 4 টনের সামান্য কম।

এমনি একটু মজা পাবার জন্যে, হিসেব করে দেখুন তো—বৃষ্টি আপনার বাগানটুকুর ওপরে যতো জল ঢেলেছে, ততোটা জলসেচ করার জন্যে আপনাকে কতো বালতি জল বয়ে আনতে হত ? একটা সাধারণ বালতিতে প্রায় 12 কিলো-গ্রাম জল ধরে। সুতরাং, বৃষ্টি আপনার খিড়কি বাগানটার ওপরে $3840 : 12 = 320$ বালতি জল ঢেলেছে।

তাহলে, প্রায় 15 মিনিটের মধ্যে বৃষ্টি আপনার খিড়কি-বাগানটির ওপরে

www.pathagar.com

যে-পরিমাণ জল ঢেলেছে, সেই পরিমাণ জল তোলার জন্যে আপনাকে 300 বালতিরও বেশি জল বয়ে এনে ঢালতে হত।

প্রবল বর্ষণ বা ঝিরঝির বৃষ্টিকে কি আমরা সংখ্যায় প্রকাশ করতে পারি? সেটা করার জন্যে এক মিনিটে কতো মিলিমিটার বৃষ্টিপাত হচ্ছে, সেটা জানা দরকার। বৃষ্টিটা যদি এমন হয় যে প্রতি মিনিটে 2 মিলিমিটার করে বারিপাত হচ্ছে, তাহলে সেটা হবে অসাধারণ রকমের প্রবল বর্ষণ। আর, যদি সেটা হয় শরৎকালের ঝিরঝির বৃষ্টি, তাহলে সাধারণত এক মিলিমিটার জল জমতে এক ঘন্টা, এমন কি, কখনও বা তারও বেশি সময় লেগে যায়।

দেখতেই পাচ্ছেন, বৃষ্টিজলের গভীরতা মাপা শুধু যে সম্ভব, তাই নয়: বেশ সহজও বটে। এ ছাড়াও, আপনি যদি চান, তাহলে এমন কি বৃষ্টির জলবিন্দুর সংখ্যাটাও মাপতে পারেন—যদিও সেটা হবে মোটামুটি একটা হিসেব।* বাস্তবিক পক্ষে, সাধারণ রকমের বৃষ্টিতে গড়পড়তা 12 বিন্দু জলে এক গ্রাম হয়। তাহলে, যে-বৃষ্টির কথা আমরা ওপরে বলেছি, সেই বৃষ্টি ধরলে আমরা দেখতে পাব যে, সে ক্ষেত্রে এক বর্গমিটারে 48,000 জলবিন্দু রয়েছে।

পুরো খিড়কি-বাগানটি জুড়ে কতোগুলি জলবিন্দু পড়েছে, সেটা হিসাব করাও কঠিন নয়। কিন্তু এ ধরনের হিসেব, আগ্রহ জাগাবার মতো হলেও, কোন কাজে লাগে না। আমরা এটা উল্লেখ করলাম শুধু এটাই দেখবার জন্যে যে, সবচেয়ে অবিশ্বাস্য রকমের নানা মাপজোখ করা সম্ভব—শুধু যদি আপনার জানা থাকে যে কিভাবে তা করতে হবে।

90. কতোটা তুষার পড়েছে: বৃষ্টিজলের গভীরতা কিভাবে মাপতে হয় তা আমরা জেনে গেছি। শিলাবৃষ্টির বেলায় জলের গভীরতা মাপব কি ভাবে? পুরোপুরি একই ভাবে। শিলাগুলি আপনার বৃষ্টিমাপক যন্ত্রের (রেন-গেজ) মধ্যে পড়ে গলে যাচ্ছে। তারপর আপনি জলের গভীরতাটুকু মেপে নিচ্ছেন।

কিন্তু তুষার-গলা জলের বেলায় ব্যাপারটা ভিন্ন রকম দাঁড়াচ্ছে। এক্ষেত্রে প্লুভিওমিটার থেকে আপনি সঠিক হিসেব পাবেন না। কারণ, তুষারের একাংশ বাতাসের ঝাপটায় উড়ে গিয়ে বালতিটার বাইরে পড়বে। কিন্তু তা হলেও, প্লুভিওমিটার ছাড়াই তুষার-জলের গভীরতা মাপা সম্ভব। একটা কাঠের ডান্ডার সাহায্যে আঁঙিনার বা মাঠের বুকে যতোটা তুষার জমেছে, সেটার গভীরতা মেপে নিতে পারেন। এবং তুষারটা গলে যাবার পরে জলের গভীরতাটুকু কতোখানি হবে, সেটা জানার জন্যে আপনাকে একটা পরীক্ষা করতে হবে:

* বৃষ্টি সব সময়েই বিন্দু বিন্দু ঝরে পড়ে—এমন কি, আমাদের যখন ঢল নেমেছে বলে মনে হয়, তখনও।

www.pathagar.com

সমান রকম জমাট-বাঁধা তুষার নিয়ে একটা বালতি ভর্তি করুন, গালিয়ে নিন এবং জলের গভীরতা মাপুন। এইভাবে, এক সেণ্টিমিটার তুষার থেকে কতো মিলিমিটার জল পাওয়া যাচ্ছে, সেটা আপনি জেনে যাচ্ছেন। এটা জানার পর, তুষারের গভীরতাকে জলের গভীরতায় পরিবর্তিত করে নেওয়াটা আপনার পক্ষে কঠিন হবে না।

একদিনও বাদ না দিয়ে যদি প্রতিদিন আপনি গরম কালে বৃষ্টি জলের গভীরতা মাপেন এবং তার সঙ্গে শীতকালে তুষার-গলা জলের গভীরতা যোগ করেন, তাহলে আপনার এলাকায় বার্ষিক বারিপাতের পরিমাণ জানতে পারবেন।

এখানে কতকগুলো সোভিয়েত শহরের গড় বারিপাতের পরিমাণ দেওয়া যাচ্ছে :

লেনিনগ্রাদ	47 সে. মি	কুতাইসি	179 সে. মি
ভোলোগদা	45 ,,	বাকু	24 ,,
আর্খাঙ্গেল্‌স্ক্	41 ,,	স্ভের্দ্‌লোভস্ক	36 ,,
মস্কো	55 ,,	তোবোল্‌স্ক্	43 ,,
কস্ত্রোমা	49 ,,	সেমিপালাতিন্‌স্ক	21 ,,
কাজান	44 ,,	আল্‌মা-আতা	51 ,,
কুইবিশেভ	39 ,,	তাশখন্দ	31 ,,
ওরেনবুর্গ	43 ,,	ইয়েনেসেইস্ক্	39 ,,
ওদেসা	40 ,,	ইরকুৎস্ক্	44 ,,
আস্ত্রাখান	14 ,,		

এই শহরগুলির মধ্যে আকাশ থেকে সবচেয়ে বেশি জল পায় কুতাইসি (179 সে. মি.) এবং সবচেয়ে কম পায় আস্ত্রাখান (14 সে. মি.)—কুতাইসির 13 ভাগের এক ভাগ। কিন্তু পৃথিবীতে এমন জায়গাও আছে যেখানে কুতাইসির চেয়েও ঢের বেশি বারিপাত হয়। যেমন, ভারতে এমন একটি জায়গা আছে (চেরাপুঞ্জি—অ), যেটা বাস্তবিকপক্ষে বৃষ্টিজলে প্লাবিত হয়ে থাকে—সেখানে বার্ষিক বৃষ্টিপাতের পরিমাণ 1,260 সেণ্টিমিটার, অর্থাৎ 12·5 মিটারেরও বেশি! একবার সেখানে একদিনের বৃষ্টিপাত 100 সেণ্টি-মিটারকেও ছাড়িয়ে গিয়েছিল। তেমনি, এমন সব জায়গাও আছে যেখানে আস্ত্রাখানের চেয়েও কম বৃষ্টিপাত হয়। যেমন, চিলিতে বৃষ্টিপাতের পরিমাণ বছরে এক সেণ্টিমিটারেরও কম।

যেসব অঞ্চলে বৃষ্টিপাতের পরিমাণ বছরে 25 সেণ্টিমিটারের নিচে, সেগুলি

www.pathagar.com

খরা এলাকা। এসব জায়গায় মানুষের নিজের হাতে তৈরি জলসেচের ব্যবস্থা ছাড়া কৃষি অসম্ভব।

সহজেই দেখা যাচ্ছে, ভূগোলকের বিভিন্ন অঞ্চলের বার্ষিক বৃষ্টিপাত মেপে নিয়ে, গোটা পৃথিবী জুড়ে এটার বার্ষিক গড় হিসেব করা সম্ভব। স্থলভাগের ওপরে গড় বার্ষিক বৃষ্টিপাত 78 সেন্টিমিটার। স্থলভাগে যে-পরিমাণ বৃষ্টি পড়ে, সাগর-সমুদ্রের বুকেও মোটামুটি সেই পরিমাণ বৃষ্টি পড়ে বলে মনে করা হয়। এটা জানার পর, পৃথিবীর সমগ্র পৃষ্ঠদেশের ওপরে মোট অধঃক্ষেপণের —বৃষ্টি, শিলাবৃষ্টি, তুষারপাত ইত্যাদির পরিমাণ হিসেব করাটা কঠিন নয়। এর জন্যে আপনাকে ভূপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল জানা চাই। যদি সেটা জানা না থাকে তাহলে কিভাবে সেটা হিসেব কষে বের করতে হবে, তা দেখানো হচ্ছে :

এক মিটার হল ভূগোলকের পরিধির প্রায় নিখুঁত ভাবে 1/4,00,00,000 অংশের সমান। অর্থাৎ এই পরিধিটা হল 40 কোটি মিটার বা 40 হাজার কিলোমিটার। ভূগোলকের ব্যাস সেটার পরিধির $3\frac{1}{7}$ ভাগের এক ভাগের খুব কাছাকাছি। এটা জানা থাকায়, আমরা সহজেই ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসেব করতে পারি :

40,000 : $3\frac{1}{7}$ = 12,700 কিলোমিটার

গোলকের উপরিতলের ক্ষেত্রফল বের করতে হয় যে-নিয়ম অনুসারে, সেটা হল : ব্যাসকে ওই ব্যাস দিয়েই গুণ করুন, তারপর আবার $3\frac{1}{7}$ দিয়ে গুণ করুন :

12,700 × 12,700 × $3\frac{1}{7}$ = 50,90,00,000 বর্গ-কিলোমিটার।

(সংখ্যাটির চতুর্থ স্থান থেকে আমরা শূন্য লিখেছি। কারণ, শুধু প্রথম তিনটি অংকই নির্ভরযোগ্য।)

তাহলে, ভূগোলকের উপরিতলের ক্ষেত্রফল 509 নিযুত বর্গ-কিলোমিটার।

এবার আমাদের সমস্যাটিতে ফিরে আসা যাক। প্রথমে আমরা হিসেব করব, পৃথিবীর উপরিতলের প্রতি বর্গ-কিলোমিটারে কতোখানি বৃষ্টিপাত হয়। এক বর্গমিটারে অথবা 10,000 বর্গ-সেন্টিমিটারে পরিমাণটা দাঁড়াবে 78 × 10,000 = 7,80,000 ঘন-সেন্টিমিটার।

এক বর্গ-কিলোমিটারে রয়েছে 1,000 × 1,000 = 10,00,000 বর্গ-মিটার। অতএব, 1 বর্গ-কিলোমিটারে বৃষ্টিপাতের পরিমাণ 7,80,00,00,00,000 ঘন-সেন্টিমিটার অথবা 7,80,000 ঘন-মিটার।

এবং ভূগোলকের সমগ্র উপরিতলের বেলায় সংখ্যাটি দাঁড়াবে :

7,80,000 × 50,90,00,000 = 39,70,00,00,00,00,000 ঘন-মিটার।

www.pathagar.com

এটাকে ঘন-কিলোমিটারে নিয়ে আনার জন্যে সংখ্যাটিকে 1,000 × 1,000 × 1,000 দিয়ে—অর্থাৎ 100 কোটি দিয়ে ভাগ করতে হবে। ভাগফল দাঁড়াচ্ছে 397,000 ঘন-কিলোমিটার।

তাহলে, আমাদের পৃথিবীর ওপরে আবহমণ্ডল থেকে গড়ে বছরে 4,00,000 ঘন-কিলোমিটার (পূর্ণ সংখ্যায়) জল ঝরে পড়ে।

বৃষ্টি আর তুষারের জ্যামিতি সম্বন্ধে এই সংক্ষিপ্ত আলোচনাটুকু আমরা এখানেই শেষ করছি। এ সম্বন্ধে আরো বিস্তারিত সব তথ্য আমরা পেতে পারি আবহবিজ্ঞান বিষয়ের বই থেকে।

www.pathagar.com

॥ অধ্যায় দশ ॥

গণিত ও মহাপ্লাবন

91. মহাপ্লাবন : বাইবেলের গল্পে আমরা পড়েছি—কিভাবে সমস্ত পৃথিবীটা একবার বন্যায় প্লাবিত হয়ে গিয়েছিল, সবচেয়ে উঁচু পাহাড়ের চূড়াকেও সেই জলস্তর ছাড়িয়ে গিয়েছিল। গল্পটিতে বলা হয়েছে "পৃথিবীতে তিনি মানুষ সৃষ্টি করেছিলেন বলে ঈশ্বরের মনে অনুশোচনা জেগেছিল।"

ঈশ্বর বললেন, "আমি যাকে সৃষ্টি করেছি, সেই মানুষকে আমি পৃথিবীর বুক থেকে নিশ্চিহ্ন করে দেব—মানুষ আর জন্তু উভয়ই, এবং গাছ-গাছালি আর আকাশচারী পাখি, সবই।"

একমাত্র যে-মানুষটিকে ঈশ্বর রেহাই দিতে মনস্থ করেন, তিনি হলেন ন্যায়-পরায়ণ নোয়া। ঈশ্বর তাঁকে আসন্ন ধ্বংসকাণ্ড সম্বন্ধে সাবধান করে দিয়ে বললেন 300 হাত লম্বা, 50 হাত চওড়া আর 30 হাত উঁচু একটা বিশাল নৌকো বানাতে। তিনতলা উঁচু এই নৌকাটা শুধু যে নোয়াকে, তাঁর পরিবারকে আর তাঁর প্রাপ্তবয়স্ক সন্তানদের পরিবারের লোকজনকে রক্ষা করবে, তাই নয়; পৃথিবীতে সমস্ত প্রাণিকুলের প্রজাতিকেও রক্ষা করবে। ওই নৌকোটায় দীর্ঘ-কালের জন্যে যথেষ্ট পরিমাণে খাদ্যদ্রব্য সংগ্রহ করে, ওইসব পশু পাখি-কীট-পতঙ্গের সমস্ত বর্গের প্রত্যেকটিকে একজোড়া করে আশ্রয় দেবার জন্যে ঈশ্বর তাঁকে নির্দেশ দিলেন। পৃথিবী থেকে সমস্ত প্রাণীকে ধ্বংস করে ফেলার উপায় হিসেবে ঈশ্বর মহাপ্লাবনকেই বেছে নিয়েছিলেন। এই জলই সমস্ত মানুষ আর প্রাণিকুলকে ধ্বংস করবে। তারপর নোয়া এবং তিনি যেসব প্রাণীকে বাঁচাবেন তারা নতুন করে বংশবৃদ্ধি ঘটিয়ে এক নতুন মানবজাতি আর নতুন প্রাণিজগৎ সৃষ্টি করবে।

বাইবেলে বলা হয়েছে, "এবং সাত দিন বাদে দেখা গেল, বন্যার জল পৃথিবীকে ঢেকে ফেলতে শুরু করেছে···চল্লিশ দিন আর চল্লিশ রাত ধরে পৃথিবীর বুকে বৃষ্টি ঝরে পড়ল···জল বেড়েই চলল আর নৌকোটাকে ভাসিয়ে তুলে ধরল ওপরের দিকে···বিপুল পরিমাণ জল জমে উঠল পৃথিবীর ওপরে; এবং সমস্ত আকাশের নিচে যতো উঁচু পাহাড় আছে. সবই জলে ঢাকা পড়ল। পনেরো হাত উঁচু জল জমে উঠল···এবং পৃথিবীর বুকে যতো প্রাণী ছিল সকলেই মারা গেল···একমাত্র নোয়া আর নৌকোটায় যারা তাঁর সঙ্গে ছিল তারাই বেঁচে রইল"। বাইবেলের কাহিনী অনুযায়ী, আরও 110 দিন পৃথিবী জলে ডুবে ছিল। তারপর সেই জল নেমে গেল এবং যেসব প্রাণীকে নোয়া রক্ষা

www.pathagar.com

করেছেন তাদের সবাইকে নিয়ে নৌকো থেকে বেরিয়ে এলেন পৃথিবীকে ফের প্রাণিকুলে সমৃদ্ধ করে তোলার জন্যে।

মহাপ্লাবনের এই কাহিনী থেকে দুটি প্রশ্ন উঠেছে :

(1) সবচেয়ে উঁচু পাহাড়-পর্বতের চেয়েও উঁচু হয়ে জলস্তর জমে উঠে পুরো পৃথিবীকে ঢেকে ফেলার মতো বৃষ্টিপাত হতে পারে কি ?

(2) পৃথিবীতে যতো বর্গের প্রাণী আছে, নোয়ার নৌকায় তাদের প্রত্যেকটির একজোড়ার স্থান সংকুলন হতে পারে কি ?

92. এই মহাপ্লাবন কি সম্ভব ছিল ? : উপরের দুটি প্রশ্নেরই গাণিতিক সমাধান করা যেতে পারে।

মহাপ্লাবনের ওই জল এসেছিল কোথা থেকে। স্বভাবতই, আবহমণ্ডল থেকে। তারপরে সেটা গেল কোথায় ? গোটা পৃথিবীব্যাপী একটা জলসমুদ্রকে মাটি শুষে নিতে পারে না, অন্য কোনো ভাবেও সেটা অদৃশ্য হয়ে যেতে পারে না। একমাত্র আবহমণ্ডলেই ওই জল ফিরে যেতে পারে—অর্থাৎ, বাষ্পীভূত হয়ে যেতে পারে। তাহলে, ওই মহাপ্লাবনের সমস্ত জলটার এখন আবহমণ্ডলেই থাকা উচিত। সুতরাং, আবহমণ্ডলের সমস্ত বাষ্প যদি জলবিন্দুতে ঘনীভূত হয়ে পৃথিবীর উপরে ঝরে পড়ত, তাহলে সবচেয়ে উঁচু পাহাড়গুলিকে ঢেকে দিয়ে আরেকটি মহাপ্লাবন হতে পারত। তা হতে পারে কি না দেখা যাক।

আবহবিজ্ঞানের বই থেকেই আমরা জেনে নিতে পারি আবহমণ্ডলে আর্দ্রতা রয়েছে কতোখানি ওই বইগুলিতে বলছে, প্রতি বর্গমিটারের উপরে বায়ুর যে স্তম্ভ রয়েছে, সেই বায়ুস্তম্ভের মধ্যে গড়ে 16 কিলোগ্রাম বাষ্প রয়েছে, এবং কোনো ক্ষেত্রেই সেটা 20 কিলোগ্রামের বেশি কখনোই নয়। এই সমস্ত বাষ্প যদি ঘনীভূত হয়ে পৃথবীর উপরে এসে পড়ত, তাহলে ওই বৃষ্টির জলের গভীরতা কতোটা হত, তা হিসেব করে দেখা যাক। 25 কিলোগ্রাম, অর্থাৎ, 25,000 গ্রাম জল ঘন মানের দিক থেকে 25,0 0 ঘন-সেণ্টিমিটার জলের সমান। এটাই দাঁড়াত এক বর্গ-মিটার, অর্থাৎ, 100 × 100 = 10,000 বর্গ-সেন্টিমিটার, ক্ষেত্রফলের ওপরে জমে ওঠা জলস্তরের ঘনমান। এই ঘনমানকে ভূমির ক্ষেত্রফল দিয়ে ভাগ করে আমরা জলস্তরটির গভীরতা পাচ্ছি :

25,000 : 10,000 = 2·5 সে. মি

বন্যার জল 2·5 সেণ্টিমিটারের বেশি উঁচুতে উঠতে পারত না। কারণ, আবহমণ্ডলে এর চেয়ে বেশি জল নেই।* এমন কি, এই উচ্চতাও সম্ভব হত যদি মাটি একটুও জল শোষণ না করত।

* অনেক জায়গাতেই কখনও কখনও বৃষ্টিপাত 2·5 সে.মি. ছাড়িয়ে যায় ; কিন্তু সেই সব

www.pathagar.com

আমাদের হিসেব থেকে দেখা যাচ্ছে যে, মহাপ্লাবন যদি হয়েও থাকত, তাহলেও বন্যার জল 2·5 সেন্টিমিটারের বেশি উঁচুতে উঠতে পারত না। আর, 9 কিলোমিটার উঁচু এভারেস্ট পর্বতশৃঙ্গে পৌঁছানো তো বহু দূরের কথা। বন্যার জলস্তরের উচ্চতাটাকে বাড়িয়ে তুলেছে মাত্র···3,60,000 গুণ।

এবং, যদি কোনো বৃষ্টি-"প্লাবন"ও হত তাহলেও সেটা বাস্তবে সম্ভব হতে পারত না, সেটা হত শুধু ঝিরঝির বৃষ্টি। কারণ, 40 দিন ধরে একটানা বৃষ্টির ফলে অধঃক্ষেপণ হত মাত্র 25 মিলিমিটার—দিনে 0·5 মিলিমিটারেরও কম। শরৎ-কালের ঝিরঝির বৃষ্টি যদি সারাদিন ধরেও চলে, তাহলে তার ফলে এর 20 গুণ বারিপাত হয়।

93. এমন একটা বিশাল নৌকো হতে পারে কি: এবার দ্বিতীয় প্রশ্নটার আলোচনায় আসা যাক। যেসব প্রাণীকে নোয়ার রক্ষা করার কথা, তাঁর নৌকোয় তাদের সকলেরই সংকুলান হতে পারত কি?

নৌকোটায় কতোখানি স্থান ছিল দেখা যাক। বাইবেলের গল্প অনুযায়ী, নৌকোটা ছিল তিনতলা উঁচু। প্রত্যেক তলা 300 হাত লম্বা, 50 হাত চওড়া। পশ্চিম এশিয়ায় প্রাচীন জাতিগুলির কাছে এক হাত লম্বা মাপটা ছিল 45 সেন্টিমিটার বা 0·45 মিটারের খুব কাছাকাছি। মেট্রিক পদ্ধতিতে পরিবর্তিত করে নিলে এর অর্থ দাঁড়ায়, প্রত্যেকটি তলা ছিল।

$300 \times 0{\cdot}45 = 135$ মিটার লম্বা এবং $50 \times 0{\cdot}45 = 22{\cdot}5$ মি. চওড়া।

সুতরাং প্রত্যেকটি তলার ক্ষেত্রফল ছিল: $135 \times 22{\cdot}5 = 3{,}040$ বর্গ-মিটার (পূর্ণ সংখ্যায়)।

এবং এই তিনটি তলার সবগুলিতে মোট "বাসযোগ্য স্থান" ছিল:

$3{,}040 \times 3 = 9120$ বর্গমিটার।

ধরা যাক, শুধু স্তন্যপায়ী জন্তুদের পক্ষেই কি এই জায়গাটুকু যথেষ্ট? প্রায় 3,500 রকমের বিভিন্ন স্তন্যপায়ী জন্তু আছে, এবং নোয়াকে শুধু এইসব স্তন্যপায়ীর জন্যে থাকার জায়গাই নয়, জলস্তর সম্পূর্ণ নেমে না যাওয়া পর্যন্ত 150 দিন চালাবার মতো যথেষ্ট পরিমাণে খাদ্যের সংস্থানও করতে হয়েছে। তাছাড়া, একথাও ভুললে চলবে না যে শিকার ধরে খায় যেসব জন্তু, তাদের শুধু নিজেদের জন্যেই নয়, তাদের ওইসব শিকারযোগ্য জন্তুদের জন্যেও থাকার জায়গা দরকার,

ক্ষেত্রে সেটা শুধু নির্দিষ্ট এলাকাটির উপরের আবহমণ্ডল থেকেই সরাসরি আসে না, আশপাশের জায়গার আবহমণ্ডল থেকেও বায়ুস্রোতের দ্বারা বাহিত হয়ে আসে। বাইবেলের বর্ণনা অনুযায়ী, মহাপ্লাবন পৃথিবীর সমগ্র উপরিতলকে যুগপৎ প্লাবিত করে দিয়েছিল এবং সেইজন্যেই একটা কোনো জায়গা অন্য জায়গা থেকে আর্দ্রতা "ধার করে" আনতে পারে না।

www.pathagar.com

এবং সেই সঙ্গে ওইসব শিকারযোগ্য জন্তুদের জন্যে খাদ্য সংগ্রহ করে রাখার মতো জায়গাও দরকার। ওই নৌকোয় একজোড়া করে প্রত্যেকটি স্তন্যপায়ী জন্তুর জন্যে 9,120 : 3,500 = 2·6 বর্গমিটার জায়গা ছিল।

এটা নিশ্চয়ই যথেষ্ট নয়, বিশেষ করে এই তথ্যটি যদি আমরা বিবেচনার মধ্যে ধরি যে, নোয়া আর তাঁর বিরাট পরিবারের জন্যেও কিছুটা বাসযোগ্য স্থান প্রয়োজন ছিল এবং খাঁচাগুলোর মধ্যে কিছুটা ফাঁক রাখারও দরকার ছিল।

স্তন্যপায়ী জন্তু ছাড়াও, নোয়াকে অন্যান্য বহু প্রাণীকে নিতে হয়েছে। এরা হয়তো স্তন্যপায়ীদের মতো অতো বড়ো নয় কিন্তু তাদের বৈচিত্র্য বিভিন্নতা ঢের বেশি। এদের সংখ্যা এই রকম :

পাখি		13,000
সরীসৃপ		3,500
উভচর	...	1,400
মাকড়সা	...	16,000
পতঙ্গ	...	360,000

শুধু স্তন্যপায়ী জন্তুদেরই যদি স্থানাভাব ঘটে থাকে, তাহলে অন্য প্রাণীদের জন্যে তো বিন্দুমাত্র জায়গা ছিল না। পৃথিবীর সমস্ত প্রাণিকুলের একজোড়া করে প্রতিনিধিকে স্থান দেবার জন্যে, নৌকোটা বাস্তবিকপক্ষে যতো বড়ো ছিল, তার চেয়ে ঢের বেশি বড়ো হওয়া দরকার ছিল। বাস্তবিকপক্ষে বাইবেলের বর্ণনা অনুযায়ী, নৌকোটা ছিল একটি বিশাল ভাসমান আধার—জাহাজীদের পরিভাষায় বলতে গেলে, সেটা ভাসমান অবস্থায় 20,000 টন জলকে স্থানচ্যুত করেছিল। সেই প্রাচীনকালে যখন জাহাজ তৈরির কৃৎকৌশল ছিল নিতান্তই শৈশবাবস্থায়, তখন এ হেন বিরাট আকারের জলযান তৈরির কায়দাকানুন লোকের জানা ছিল—এটা খুবই অবিশ্বাস্য। কিন্তু মস্ত বড়ো হলেও, বাইবেল-নির্দিষ্ট কর্তব্য পালন করার মতো এমন একটা বিশালকায় জাহাজ সেটা ছিল না। প্রশ্নটা হল পাঁচ মাসের মতো যথেষ্ট খাদ্যদ্রব্য সমেত রীতিমত একটা চিড়িয়াখানার ব্যবস্থা করা!

সংক্ষেপে বলতে গেলে, বাইবেলের মহাপ্লাবনের কাহিনীটি গণিতের দ্বারা সত্য নয় বলেই প্রমাণিত হচ্ছে। বাস্তবিকপক্ষে, এরকম কিছু ঘটার সম্ভাবনা নেই বললেই চলে। আর, যদিই বা ঘটে থাকে, তাহলে সেটা সম্ভবত কোনো স্থানীয় বন্যার ঘটনা—বাদবাকিটা প্রাচ্যদেশীয় উর্বর কল্পনাপ্রসূত।

www.pathagar.com

www.pathagar.com

www.pathagar.com

```
      * * * * * * 4 | * * *
                    |--------
        * * *       | * 4 * *
      -------------
        * * * 4
        * * * *
      -------------
          * * * *
            * 4 *
      -------------
            * * * *
            * * * *
      -------------
```

এই সমস্যাটি সমাধান করার কতকগুলি উপায় আছে।

আরেকটি ভাগ : আরেকটি একই ধরনের ভাগ দেওয়া গেল—শুধু আপনাকে এবার 7 দিয়ে শুরু করতে হবে :

```
          7 * * * * * * * | * * * * 7 *
                          |-------------
    * * * * * *           | *   7 * *
    ---------------------
    * * * * * 7 *
    * * * * * * *
    ---------------------
          * 7 * * * *
          * 7 * * * *
    ---------------------
          * * * * * * *
          * * * * 7 * *
    ---------------------
              * * * * * *
              * * * * * *
    ---------------------
```

109. দৈর্ঘ্যটা কতো দাঁড়াবে ? এক বর্গমিটার স্থানের মধ্যে যতোগুলো এক মিলিমিটার বর্গক্ষেত্র আছে, সেই সবগুলিকে পাশাপাশি সাজালে, দৈর্ঘ্যটা কতো দাঁড়াবে তা মনে মনে হিসেব করে বলুন।

110. প্রায় একই ধরনের আরেকটি : মনে মনে হিসেব করে বলুন—এক ঘন-মিটার আয়তনের মধ্যে যতোগুলি মিলিমিটার-ঘনক রয়েছে সেগুলি একটার ওপরে আরেকটা পরপর সাজিয়ে রাখলে কতোটা উঁচু হবে।

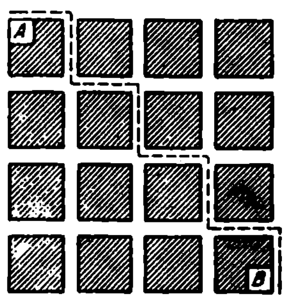
www.pathagar.com

111. উড়োজাহাজ : একটা উড়োজাহাজের বিস্তার 12 মিটার। খাড়াখাড়ি মাথার ওপর দিয়ে উড়ে যাবার সময়ে সেটার একটা ফটোগ্রাফ তোলা হয়েছে। ক্যামেরাটির ভিতরের গভীরতা (অর্থাৎ, লেনস-এর কেন্দ্রবিন্দু থেকে ফিল্মের দূরত্ব) 12 সেন্টিমিটার। ফটোগ্রাফটিতে উড়োজাহাটির বিস্তার দাঁড়িয়েছে 8 মিলিমিটার।

স্ন্যাপশটি নেবার সময়ে উড়োজাহাজটি কতোটা উ'চু দিয়ে যাচ্ছিল ?

112. দশ লক্ষ জিনিস : একটা জিনিসের ওজন 89·4 গ্রাম। মনে মনে হিসেব করে বলুন তো—ওইরকম দশ লক্ষ জিনিসের ওজন কতো মেট্রিক টন দাঁড়াবে।

113. পথের সংখ্যা : 74নং চিত্রতে একটা খামার-মহালকে সমান আকারের কতকগুলো বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা হয়েছে আর সেগুলির ফাঁক দিয়ে পথ গেছে নানা ভাগে ভাগ হয়ে গিয়ে। একজন লোক A জায়গাটি থেকে B



চিত্র 74 : খামার-মহালকে ভাগ করে দিয়েছে যে রাস্তাগুলি

জায়গাটিতে গেছে বিন্দু-চিহ্নিত পথটি ধরে। অবশ্যই, A আর B-র মধ্যে যাতায়াতের এটাই একমাত্র পথ নয়। একই দৈর্ঘ্যের কতোগুলি ভিন্ন ভিন্ন পথ রয়েছে ?

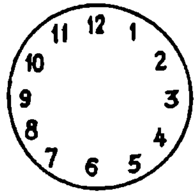
114. ঘড়ির ডায়াল : 75নং চিত্রতে যে ঘড়ির ডায়াল দেখানো হয়েছে, সেটাকে যে-কোনো আকারের ছয় অংশে ভাগ করুন, কিন্তু প্রত্যেকটি অংশে সংখ্যাগুলির মোট যোগফল একই হওয়া চাই।

এই সমস্যাটি আপনার উদ্ভাবনী ক্ষমতার ও মৌলিক চিন্তার একটি পরীক্ষা।

115. আট-কোণা তারা : 76নং চিত্রতে, সরলরেখাগুলি যেখানে পরস্পরকে ছেদ করে গেছে, সেই বিন্দুগুলিতে 1 থেকে 16 পর্যন্ত

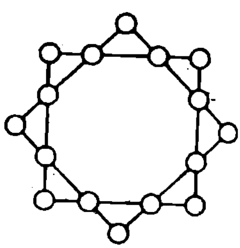
www.pathagar.com

সংখ্যাগুলি এমনভাবে বসান যাতে বর্গক্ষেত্র দুটির প্রত্যেকটি বাহুর যোগফল 34 এবং তাদের শীর্ষবিন্দুগুলির যোগফলও 34 হয়।

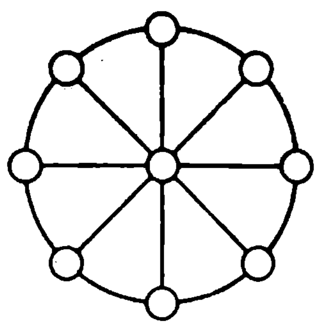


চিত্র 75 : ঘড়ির ডায়ালটাকে ছ'টি অংশে ভাগ করুন

116. একটি সংখ্যা-চক্র : 77নং চিত্রতে, 1 থেকে 9 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির একটিকে কেন্দ্রবিন্দুতে এবং বাকিগুলি প্রত্যেকটি ব্যাসের প্রান্তে এমনভাবে লিখুন যাতে প্রত্যেকটি ব্যাসের তিনটি সংখ্যার যোগফল 15 হয়।



চিত্র 76 : আট-কোণা তারা



চিত্র 77 : সংখ্যাচক্র

117. তেপায়া : খুব জোর দিয়েই বলা হয় যে-কোনো তেপায়া সব সময়ে দৃঢ়ভাবে দাঁড়িয়ে থাকে—এমন কি, সেটার তিনটে পায়ের দৈর্ঘ্য অসমান হলেও। কথাটা কি ঠিক ?

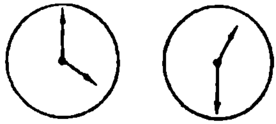
118. কোণ : 78নং চিত্রতে, ঘড়ির কাঁটা দুটি যে-কোণ সৃষ্টি করেছে, সেই কোণটি কতো ডিগ্রি ? সমস্যাটির সমাধান মনে মনে করতে হবে—কোণ মাপনী ব্যবহার না করে।

119. নিরক্ষরেখা ধরে : আমরা যদি পৃথিবীর নিরক্ষরেখা ধরে হেঁটে যেতে পারতাম, তাহলে আমাদের মাথার চাঁদিটা এমন একটা বৃত্ত রচনা করত

www.pathagar.com

যেটার পরিধি দাঁড়াত—আমরা হেঁটে চলার সময়ে পায়ে পায়ে যে-বৃত্তটি রচনা করেছি, সেটার—অর্থাৎ, নিরক্ষরেখার পরিধির চেয়ে বেশি।

কতোটা বেশি ?

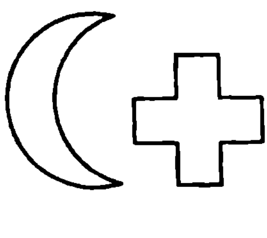


চিত্র 78 : কোণ দু'টি কতো ডিগ্রি

120. ছয় সারি : আস্তাবলের দশটা কুঠরির প্রত্যেকটিতে একটা করে—মোট ন'টা ঘোড়াকে রাখা সম্বন্ধে সেই মজার গল্পটা বোধহয় আপনি শুনে থাকবেন। তা, এখানে যে-সমস্যাটার কথা বলা হচ্ছে, সেটার সঙ্গে আপাত দৃষ্টিতে ওই গল্পটার খুবই মিল আছে—তফাতটুকু শুধু এই যে, এটার সত্যিই সমাধান করা যায়। সমস্যাটি হল এই :

প্রত্যেকটি সারিতে পাঁচজন করে, মোট ছ'টা সারিতে 24 জন লোককে দাঁড় করিয়ে দিন।

121. ক্রুশ ও চন্দ্রকলা : 79নং চিত্রতে একটি চাঁদের কলা দেখতে পাচ্ছেন। সমস্যাটা হল এমন একটা ক্রুশ আঁকতে হবে যেটার ক্ষেত্রফল জ্যামিতিক ভাবে চন্দ্রকলার ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

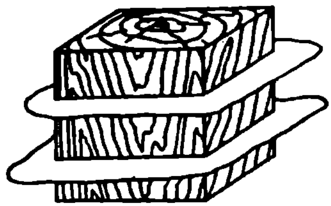


চিত্র 79 : একটা চন্দ্রকলাকে ক্রুশে পরিণত করা যাবে কিভাবে ?

122. ঘনককে ভাগ করা : একটি ঘনক আপনাকে দেওয়া হয়েছে—যেটার প্রত্যেকটি কিনারা 3 সেন্টিমিটার এবং ঘনমান 27 সেন্টিমিটার। এই ঘনকটিকে কেটে 27টি ছোট ছোট ঘনকে ভাগ করা যায়, যেগুলির প্রত্যেকটি কিনারা হবে 1 সেন্টিমিটার। এটা করা খুব সোজা—ঘনকটিকে ছ'টি সমতল দিয়ে কেটে দিলেই হল : দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল দুটি সমতল, প্রস্থের সমান্তরাল

www.pathagar.com

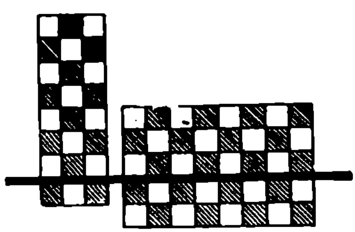
দুটি সমতল এবং উচ্চতার সমান্তরাল দুটি সমতল। কিন্তু, ধরে নেওয়া যাক, প্রতিবার ছেদ ঘটানোর পর আপনাকে অংশগুলোর বিন্যাস বদল করতে দেওয়া



চিত্র 80 : যে-কোনো একটি পাশের সমান্তরাল দুটি সমতল দিয়ে ঘনকটিকে কেটে দেওয়া দরকার

হচ্ছে : একটা অংশ কেটে নেবার পর আপনি সেটাকে অন্যগুলির উপরে এমন ভাবে রাখতে পারেন যাতে পরের বার কাটতে গেলেই তাদের সবগুলোরই ছেদ ঘটে যাবে। এই বাড়তি সুযোগটুকু কাজে লাগিয়ে, ঘনটিকে 27টি ছোট ছোট ঘনকে ভাগ করার জন্যে প্রয়োজনীয় ছেদ টানার সংখ্যাটি কি আপনি কমিয়ে আনতে পারেন?

123. আরও ভাগ করা : এই সমস্যাটি অনেকটাই আগেরটির মতো— যদিও শর্তগুলি কিছুটা ভিন্ন। একটি সাধারণ দাবার ছক যে-ভাবে চিহ্নিত, সেই অনুযায়ী ছকটিকে 64 বর্গক্ষেত্রে (8 × 8) ভাগ করতে হবে। ছেদগুলি



চিত্র 81 : প্রতি বার কাটার আগে, অংশগুলিকে পুনর্বিন্যাস্ত করা যেতে পারে

অবশ্যই সরলরেখা বরাবর ঘটাতে হবে। কিন্তু প্রতিবার কাটার পরে যে-অংশগুলি পাওয়া যাচ্ছে, সেই অংশগুলিকে একটার ওপরে আরেকটা চাপানো যেতে পারে—যাতে পরের বার কাটার সময়ে, মাত্র একটা নয়, কয়েকটা অংশ একসঙ্গে পেতে পারেন। দাবার ছকটিকে 64 বর্গক্ষেত্রে কেটে ভাগ করতে আপনাকে কতোবার সরলরেখা বরাবর ছেদ ঘটাতে হবে?

www.pathagar.com

94 থেকে 123 নং প্রশ্নের উত্তর

94. মাত্র তিনটি আংটা খুলেই কাজটা সারা যেতে পারে। অর্থাৎ, একটা অংশের আংটাগুলি খুলে নিয়ে, সেগুলি দিয়ে অন্য চারটি অংশের প্রান্ত জুড়ে দিলেই হল।

95. এই সমস্যাটির সমাধান করতে বসার আগে, আপনাকে অবশ্যই জানতে হবে—মাকড়সার কটা পা আর গুবরে পোকার কটা পা। প্রকৃতি বিজ্ঞানের বইয়ে যা পড়েছেন, তা যদি মনে থাকে, তাহলে আপনি জানেন যে মাকড়সার 8টি পা আর গুবরে পোকার 6টি পা।

এবার, ধরে নেওয়া যাক, ছেলেটির বাক্সটিতে শুধুই গুবরে পোকা ছিল—মোট 8টি গুবরে পোকা। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে পায়ের সংখ্যা দাঁড়াত $6 \times 8 = 48$ পা, অথবা অঙ্কটিতে উল্লিখিত সংখ্যার চেয়ে 6 কম। এই গুবরে পোকাগুলির মধ্যে একটির বদলে আমরা যদি একটি মাকড়সা রাখি, তাহলে পায়ের সংখ্যা 2 বেড়ে যেত। কারণ, মাকড়সার 8টি পা, 6টি নয়।

এটা স্পষ্ট যে, তিনটি গুবরে পোকার বদলে আমরা যদি তিনটি মাকড়সা রাখি, তাহলে বাক্সের ভিতরে পায়ের সংখ্যাটাকে প্রয়োজনীয় 54তে আনতে পারি। তাহলে 8টি গুবরে পোকার বদলে থাকবে 5টি এবং বাকিগুলি হবে মাকড়সা।

অতএব, ছেলেটি 5টি গুবরে পোকা আর 3টি মাকড়সা সংগ্রহ করেছিল।

মিলিয়ে নেওয়া যাক। 5টি গুবরে পোকার 30টি পা এবং 3টি মাকড়সার 24টি পা। এবং $30 + 24 = 54$।

সমস্যাটির সমাধানের আরও একটি উপায় আছে। আমরা ধরে নিতে পারি যে বাক্সের মধ্যে শুধু মাকড়সা ছিল—8টি। তাহলে আমরা পেতাম $8 \times 8 = 64$ পা, অর্থাৎ অংকটিতে উল্লিখিত সংখ্যার চেয়ে 10 বেশি। একটি মাকড়সার বদলে একটি গুবরে পোকা রাখলে সংখ্যাটি 2 কমে যাবে। পায়ের সংখ্যা প্রয়োজনীয় 54তে নামিয়ে আনার জন্য মোটামাট জন্য 5টি অনুরূপ বদল চাই। অর্থাৎ, 8টি মাকড়সার মধ্যে থেকে 3টি বাক্সে রেখে দিয়ে অন্যগুলির বদলে গুবরে পোকা রাখব।

96. একটি ওয়েস্টকোট, একটি টুপি আর একজোড়া গ্যালোশের বদলে লোকটি যদি শুধু দু জোড়া গ্যালোশ কিনত, তাহলে তাকে দিতে হত – 20 রুবল নয়—গ্যালোশের দাম ওয়েস্টকোট আর টুপির দামের চেয়ে যতোটা কম, ততো কমই দিত সে—অর্থাৎ 16 রুবল কম। ফলে দু জোড়া গ্যালোশের দাম $20 - 16 = 4$ রুবল। সুতরাং একজোড়ার দাম 2 রুবল।

এবার আমরা জানতে পেরেছি যে একত্রে ওয়েস্টকোট আর টুপির দাম

www.pathagar.com

20 − 2 = 18 রুবল। আমরা এও জানি যে ওয়েস্টকোটের দাম টুপিটার দামের চেয়ে 9 রুবল বেশি। আবার ওই একই যুক্তিকে কাজে লাগানো যাক: একটা ওয়েস্টকোট আর একটা টুপির বদলে, আসুন, দুটি টুপি কেনা যাক। সেক্ষেত্রে আমাদের দাম দিতে হবে, 18 রুবল নয়—9 রুবল কম। সুতরাং, দুটি টুপির দাম 18 − 9 = 9 রুবল, এবং একটি টুপির দাম 4 রুবল 50 কোপেক।

তাহলে প্রত্যেকটি জিনিসের দাম দাঁড়াচ্ছে এই: গ্যালোশের জোড়া—2 রুবল, টুপি—4 রুবল 50 কোপেক এবং ওয়েস্টকোট—13 রুবল 50 কোপেক।

97. যে-ঝুড়িটায় 29টা ডিম আছে, বিক্রেতা সেই ঝুড়িটার কথা ভেবেই একথা বলেছিল। মুরগির ডিম ছিল যে-ঝুড়িগুলিতে ডিমের সংখ্যা 23, 12 আর 5; হাঁসের ডিম ছিল 14 আর 6 সংখ্যক ডিমের ঝুড়িগুলিতে।

উত্তরটা যাচাই করে দেখা যাক। বিক্রির পরে থাকার কথা:

23 + 12 + 5 = 40টি মুরগির ডিম, এবং 14 + 6 = 20টি হাঁসের ডিম।

তাহলে, অঙ্কটিতে যা বলা হয়েছে, মুরগির ডিমের সংখ্যা দাঁড়িয়েছে হাঁসের ডিমের সংখ্যার দ্বিগুণ।

98. এখানে ব্যাখ্যা করার কিছু নেই। উড়োজাহাজটি উড়ে যেতে এবং ফিরে আসতে হুবহু একই সময় নিয়েছে। কারণ 80 মিনিট যা, 1 ঘণ্টা 20 মিনিটও তাই।

এই অঙ্কটি অমনোযোগী পাঠকের জন্যে, যিনি হঠাৎ ভেবে বসবেন যে 1 ঘণ্টা 20 মিনিট আর 80 মিনিটের মধ্যে হয়তো কোনো পার্থক্য আছে।

99. পুরো কৌশলটাই হল এই-যে দুই বাবার মধ্যে একজন অন্য বাবাটির ছেলে। এই সমস্যাটিতে মাত্র তিন ব্যক্তি রয়েছে, চার জন নয়: ঠাকুরদা, বাবা আর নাতি। ঠাকুরদা তাঁর ছেলেকে দিয়েছেন 150 রুবল এবং সে আবার তার ছেলেকে (অর্থাৎ, ঠাকুরদার নাতিকে) তা থেকে 100 রুবল দিয়েছে। এই ভাবে, সে তার নিজের পুঁজি বাড়িয়ে নিয়েছে 50 রুবল।

100. প্রথম গুটিটাকে 64টি চৌকোণার মধ্যে যে-কোনো একটিতে বসানো যেতে পারে। অর্থাৎ, সেটাকে বসানোর মতো 64টি ঘর আছে। সেটা বসানোর পরে, দ্বিতীয় গুটিটার জন্যে বাকি রইল 63টি ঘর। তাহলে, প্রথম গুটিটাকে রাখার মতো 64টি ঘরের যে-কোনো একটির জন্যে, দ্বিতীয় গুটিটাকে রাখার বেলায় আমরা 63টি ঘর যোগ করতে পারি। সুতরাং, ড্রাফট্‌-ছকের ওপরে দুটি গুটিকে বিভিন্ন চৌকোণায় রাখার মতো 64 × 63 = 4032 ভিন্ন ভিন্ন অবস্থান রয়েছে।

101. ক্ষুদ্রতম যে পূর্ণসংখ্যাটিকে দুটি অঙ্ক দিয়ে লেখা যেতে পারে,

www.pathagar.com

সেটা কেউ কেউ 10 বলে মনে করতে পারেন। কিন্তু তা নয়—এই ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি হল 1, যেটা এই ভাবে লেখা যেতে পারে :

$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ ইত্যাদি ক্রমান্বয়ে $\frac{9}{9}$ পর্যন্ত।

বীজগণিতের সঙ্গে যারা পরিচিত, তাঁরা অন্য ভাবেও এটা লিখতে পারেন :

$1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ ইত্যাদি ক্রমান্বয়ে 9^0 পর্যন্ত। কারণ, যে-কোনো সংখ্যাকে শূন্য ঘাতে নিয়ে গেলে সেটা 1 হয়।*

102. 1-কে দুটি ভগ্নাংশের যোগফল হিসেবে উপস্থিত করতে হবে :

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1$$

যারা বীজগণিতের সঙ্গে পরিচিত, তাঁরা অন্য উত্তরও দিতে পারেন :

123456789^0 ; 234567^{9-8-1}, ইত্যাদি—যেহেতু, আবার মনে করিয়ে দিচ্ছি, কোনো সংখ্যাকে শূন্য ঘাতে নিয়ে গেলে, সেটা 1-এর সমান হয়।

103. দুটি উদাহরণ হল :

$$9\frac{99}{99} = 10 \text{ এবং } \frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10$$

বীজগণিত জানা থাকলে আপনি হয়তো আরও কতকগুলি সমাধান যোগ করতে পারবেন। যেমন,

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10\ ; \quad 9 + 99^{9-9} = 10$$

104. এখানে চারটি সমাধান দেওয়া যাচ্ছে :

$$70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6} = 100\ ; \quad 80\frac{27}{54} + 19\frac{3}{6} = 100\ ;$$

$$87 + 9\frac{4}{5} + 3\frac{12}{60} = 100\ ; \quad 50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$$

105. একই অঙ্ক—1 বা 3—পাঁচবার ব্যবহার করে 100 লেখা সহজ। সবচেয়ে সহজ পাঁচটি 5 ব্যবহার করা। এখানে আমরা চারটি উদাহরণ দেখতে পাচ্ছি :

$$111 - 11 = 100$$

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100$$

106. প্রায় ক্ষেত্রেই লোকে বলে থাকে, সংখ্যাটা হল 1,111। কিন্তু এর চেয়ে বহু, বহু গুণ বড়ো সংখ্যা লেখা সম্ভব। যথা, 11^{11}, অর্থাৎ 11-র একাদশ ঘাত। আপনার যদি অংকটার শেষ পর্যন্ত হিসেব করার ধৈর্য থাকে (লগারিদমের সাহায্যে প্রক্রিয়াটিকে ঢের সহজ করে আনা যেতে পারে),

* $\frac{0}{0}$ কিংবা 0^0 [illegible] ভুল হবে; এরকম লেখাটা নিতান্তই অর্থহীন।

www.pathagar.com

তাহলে দেখবেন মোট সংখ্যাটি 2,80,00,00,00,000-এরও বেশি। সুতরাং এটা 1,111-এর চেয়ে 25 কোটি গুণ বেশি।

107. চারটি ভিন্ন ভিন্ন ভাবে সমস্যাটির সমাধান করা যেতে পারে, যথা :

13,37,174 : 943=1,418
13,43,784 : 949=1,416
12,00,474 : 846=1,419
12,02,464 : 848=1,418

108. এই সমস্যাটির মাত্র একটাই সমাধান আছে 7,37,54,28,413 : 1,25,473=58,781।

এই শেষোক্ত দুটি সমস্যা বেশ একটু কঠিন। এ দুটি প্রথম প্রকাশিত হয় মার্কিন পত্রিকা 'স্কুল ওয়ার্ল্ড' (1906)-এ এবং 'ম্যাথমেটিক্যাল ম্যাগাজিন' (1920)-এ।

109. এক বর্গ-মিটার 1,000×1,000=দশ লক্ষ বর্গ-মিলিমিটারের সমান। এক হাজারটি মিলিমিটার-বর্গকে একটার পর আরেকটা সাজিয়ে বসালে 1 মিটার লম্বা হবে ; তাহলে, দশ লক্ষ মিলিমিটার-বর্গকে পাশাপাশি রাখলে হবে 1,000 মিটার দীর্ঘ ; অর্থাৎ, 1 কিলোমিটার লম্বা।

110. উত্তরটা স্তম্ভিত করে দেবার মতো : মিলিমিটার-ঘনকের স্তম্ভটার উচ্চতা হবে···1,000 কিলোমিটার ! মনে মনে হিসেব করা যাক। এক ঘন-মিটার হল 1,000×1,000×1,000 ঘন-মিলিমিটারের সমান। 1,000 মিলিমিটার-ঘনককে একটার ওপরে আরেকটা রাখলে, স্তম্ভটা 1 কিলোমিটার উঁচু হবে। যেহেতু আমাদের 1,000 গুণ বেশি ঘনক রয়েছে, সেইহেতু আমাদের স্তম্ভটির উচ্চতা দাঁড়াবে 1,000 কিলোমিটার।

111. 82নং চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে, 1 এবং 2 কোণ দুটি সমান-সমান। সেইহেতু, উড়োজাহাজটির রৈখিক মাপ আর সেটার ফটোগ্রাফের রৈখিক মাপের অনুপাত হবে ক্যামেরার লেন্স থেকে উড়োজাহাজটির দূরত্ব আর ক্যামেরার গভীরতার অনুপাতের সমান।

আমাদের ক্ষেত্রে, উড়োজাহাজটির উচ্চতা যদি x মিটার বলে ধরি, তাহলে আমরা এই সমীকরণটি পাচ্ছি :

$$12,000 : 8 = x : 0{\cdot}12$$

অতএব, $x = 180$ মিটার

112. এই হিসেবটা মনে মনে করতে হবে এই ভাবে : 89·4 গ্রামকে দশ লক্ষ দিয়ে—অর্থাৎ 1,000×1,000 দিয়ে গুণ করতে হবে।

আমরা এটা করছি দুটি পর্যায়ে : 89·4 গ্রাম×1,000=89·4 কিলোগ্রাম

www.pathagar.com

—কারণ, এক গ্রামের চেয়ে এক কিলোগ্রাম 1,000 গুণ বেশি। তারপর, 89·4 কিলোগ্রাম × 1,000 = 89·4 টন। কারণ, (মেট্রিক নিয়মে) এক টন এক কিলোগ্রামের চেয়ে 1,000 গুণ বেশি।

তাহলে, যে-ওজনটা আমরা বের করতে চাই, সেটা হল 89·4 টন।

113 A থেকে Bতে যাবার মোট 70টি পথ আছে। (বীজগণিতে যে ভাবে পাস্‌কাল-এর ত্রিভুজ বোঝানো হয়েছে, তারই সাহায্যে এই সমস্যাটির প্রণালীবদ্ধ সমাধান সম্ভব।)

114. ঘড়ির ডায়ালের গায়ে যতোগুলি সংখ্যা লেখা থাকে, সেগুলির মোট যোগফল 78। সেইহেতু ছয়টি অংশের প্রত্যেকটিতে সংখ্যার যোগফল হওয়া চাই 78 : 6 = 13। এটাই সমাধান করতে সাহায্য করছে (যেটা দেখানো হয়েছে 83নং চিত্রতে।)

115 ও 116. 84নং ও 85নং চিত্র দুটিতে সমাধান দেখানো হয়েছে।

117. তেপায়ার তিনটি পা যে সবসময়ে মেঝের ওপরে দাঁড়িয়ে থাকে, তার কারণ, দেশে বা 'স্পেস-'এ অবস্থিত যে-কোনো তিনটি বিন্দুর মধ্যে দিয়ে একটি —এবং মাত্র একটিই সমতল যেতে পারে। তেপায়া যে দৃঢ় ভাবে দাঁড়িয়ে থাকে, তার কারণ এটাই। দেখতেই পাচ্ছেন, কারণটা বিশুদ্ধ জ্যামিতিক, ভৌতিক নয়।

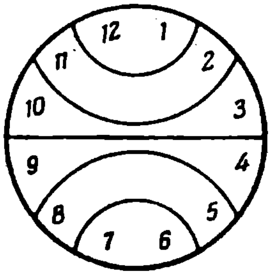
চিত্র : 82

এই কারণেই, জমি জরিপের যন্ত্রপাতি আর ফটোগ্রাফিক ক্যামেরার পক্ষে তেপায়া এতো সুবিধেজনক। চতুর্থ একটা পা সেটাকে একটুও দৃঢ়তর করে তুলত না। বরং, তার ফলে শুধু অসুবিধেই হত।

118. প্রশ্নটার উত্তর দেওয়া সহজ—বিশেষত আপনি যদি সময়টা দেখে নেন। বাঁ দিকের (78নং চিত্র) ঘড়ির কাঁটা দুটি থেকে দেখা যাচ্ছে, 7টা

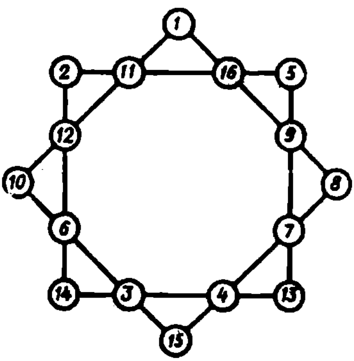
www.pathagar.com

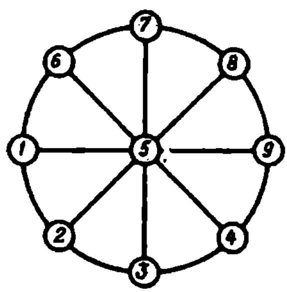
বেজেছে। অর্থাৎ, দুটি সংখ্যার মধ্যে চাপ হল পরিধির 5/12। ডিগ্রির হিসেবে এটা হল: $360° \times \frac{5}{12} = 150°$।



চিত্র 83

ডানদিকের ঘড়ির কাঁটা দুটি থেকে দেখা যাচ্ছে 9·30 বেজেছে। এখানে চাপ হল পরিধির $3\frac{1}{2}$ বা $\frac{7}{24}$। ডিগ্রির হিসেবে এটা দাঁড়াচ্ছে $360° \times \frac{7}{24} = 105°$।





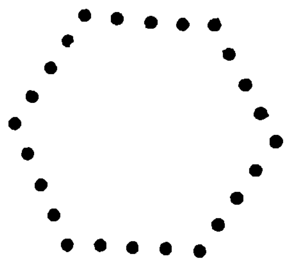
চিত্র 84

চিত্র 85

119. মানুষের গড় উচ্চতা 175 সেণ্টিমিটার বলে যদি ধরে নিই, এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধকে R ধরি, তাহলে আমরা পাচ্ছি $2 \times 3{\cdot}14 \times (R + 175) - (2 \times 3{\cdot}14 \times R) = 2 \times 3{\cdot}14 \times 175 = 1{,}100$ সেণ্টিমিটার অর্থাৎ, 11 মিটার। বিস্ময়ের ব্যাপার হল এই যে, ফলটা কোনোক্রমেই ভূগোলকের ব্যাসার্ধের ওপরে নির্ভর করে না। সুতরাং, সূর্যের মতো প্রকাণ্ড জ্যোতিষ্কই হোক বা ছোট্ট একটা বলই হোক ফলটা একই হবে।

www.pathagar.com

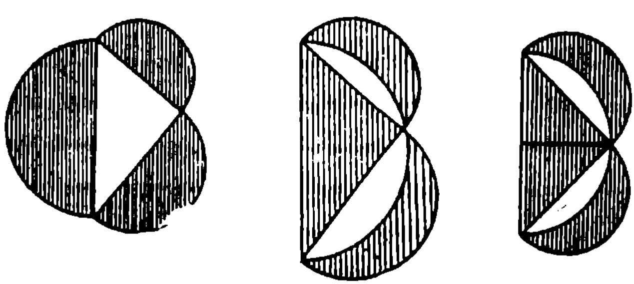
120. সমস্যাটির সমাধান করা সহজ, যদি ওই লোকদের একটি ষড়্ভুজের আকারে সাজাই চিত্র 86-তে যেভাবে দেখানো হয়েছে, সেইভাবে।



চিত্র 86

121. যেসব পাঠক শুনেছেন যে একটা বৃত্তকে বর্গক্ষেত্রে পরিণত করা অসম্ভব, তাঁরা বোধহয় ভাববেন যে, জ্যামিতিক দিক থেকে এই সমস্যাটির সমাধান করাও অসম্ভব। অনেকেই মনে করেন, বৃত্তকে যদি বর্গক্ষেত্রে পরিণত করা না যায়, তাহলে দুটো চাপ দিয়ে তৈরি যে চন্দ্রকলা, সেটাকেই বা আয়তক্ষেত্রে আনা যাবে কি করে?

তা সত্ত্বেও, সুপরিচিত পিথাগোরীয় প্রতিজ্ঞার অন্যতম আগ্রহোদ্দীপক অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে জ্যামিতিক গঠনের দ্বারা এই সমস্যাটির নিশ্চয়ই সমাধান করা যেতে পারে। পিথাগোরাসের প্রতিজ্ঞার ওই অনুসিদ্ধান্তটি হল: অতিভুজের ওপরে গঠিত অর্ধবৃত্ত অন্য দুটি ভুজের ওপরে গঠিত অর্ধবৃত্ত দুটির



চিত্র 87 চিত্র 88 চিত্র 89

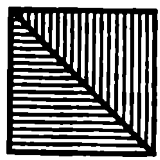
যোগফলের সমান (চিত্র 87)। বড়ো অর্ধবৃত্তটিকে অন্য পাশে সরিয়ে এনে (চিত্র 88) আমরা দেখছি: দুটি রেখাচিহ্নিত চন্দ্রকলা একযোগে ত্রিভুজটির

www.pathagar.com

সমান।* আমরা যদি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ নিই, তাহলে এই দুটি চন্দ্রকলার প্রত্যেকটি এই ত্রিভুজের অর্ধেক হবে (চিত্র 89)।

সুতরাং, জ্যামিতিক ভাবে এমন একটি সমকোণ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব—যেটার ক্ষেত্রফল হবে একটি চন্দ্রকলার ক্ষেত্রফলের সমান।

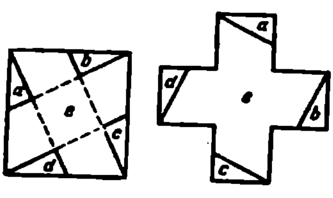
এবং, যেহেতু একটি সমকোণ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে সহজেই বর্গক্ষেত্রে পরিণত করা যায় (চিত্র 90), জ্যামিতির দিক থেকে আমাদের এই চন্দ্রকলার সমান ক্ষেত্রফলের একটি বর্গক্ষেত্র আঁকা যেতে পারে।



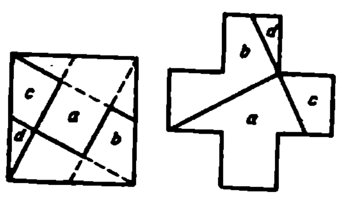
চিত্র 90

এবার শুধু বাকি রইল এই বর্গক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলের একটি ক্রুশে পরিণত করা) যে-ক্রুশটি, সকলেই জানেন, পাঁচটি সমান আকারের বর্গক্ষেত্র নিয়ে গঠিত)। সেটা করার একাধিক উপায় আছে : এগুলির মধ্যে দুটি দেখানো হয়েছে 91 ও 92 নং চিত্রে। উভয় ক্ষেত্রেই কাজটা শুরু করা হয়েছে বর্গক্ষেত্রটির শীর্ষবিন্দুগুলিকে বিপরীত ভুজের মধ্যবিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করে।

কিন্তু, এই কথাটা মনে রাখা উচিত যে, একটি চন্দ্রকলাকে অনুরূপ ক্ষেত্রফলের একটি ক্রুশে পরিণত করার জন্যে আমাদের অবশ্যই এমন একটি চন্দ্রকলা চাই যেটা বৃত্তের পরিধির দুটি চাপ দিয়ে তৈরি : একটি বহিঃস্থ চাপ,



চিত্র 91



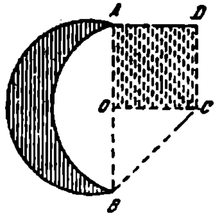
চিত্র 92

অথবা অর্ধবৃত্ত ; এবং একটি অন্তঃস্থ চাপ, অথবা অপেক্ষাকৃত বৃহত্তর ব্যাসার্ধের পরিধির সিকি ভাগ।*

* জ্যামিতিতে এই সমীকরণগুলিকে বলা হয় "হিপোক্রেটিস-এর অর্ধচন্দ্র।"

www.pathagar.com

একটি চন্দ্রকলার ক্ষেত্রফলের সমান করে কি ভাবে একটি ক্রুশ আঁকতে হবে, তা আপনাদের দেখিয়েছি। চন্দ্রকলার A আর B প্রান্ত দুটি (চিত্র 93) একটি



চিত্র 93

সরলরেখা দিয়ে যুক্ত করা হয়েছে : এই রেখাটির মধ্যবিন্দু O-তে আমরা OC লম্বটিকে এঁকেছি OA-র সমান করে (OC = OA)। তারপর এই OAC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে দ্বিগুণ করে AOCD বর্গক্ষেত্র তৈরি করা হল যেটাকে— চিত্র 91 ও চিত্র 92 তে যেভাবে দেখানো হয়েছে, সেগুলির যে-কোনো একটি উপায়ে ক্রুশে রূপান্তরিত করা যেতে পারে।

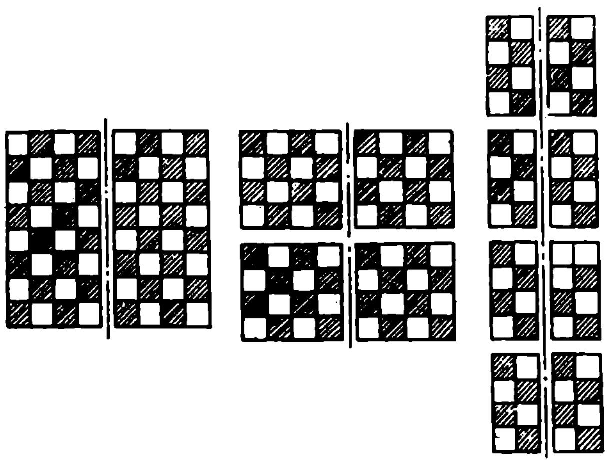
122. বাড়তি যে-সুযোগ দেওয়া হয়েছে তার ফলে সমস্যাটির সমাধানে মোটেই সুবিধা হচ্ছে না : ছটা অংশ করার দরকার পড়বেই। বড়ো ঘনকটিকে যে 27টি ক্ষুদে ঘনকে কেটে ভাগ করতে হবে, সেগুলির অন্যতম ভিতরকার ক্ষুদে ঘনকটির ছয়টি পাশ রয়েছে, এবং এমন ভাবে ছেদ ঘটানো যেতে পারে না যেটা একবারেই একই সঙ্গে সেটার দুটি পাশকে কেটে ভাগ করে দেবে—তা, আপনি অংশগুলোকে যে-ভাবেই একটার ওপরে আরেকটাকে রাখুন না কেন।

123. আগে দেখা যাক, ছকটিকে আমরা সবচেয়ে কম সংখ্যক ছেদ টেনে কি ভাবে ভাগ করতে পারি। প্রথমবার ছেদ টানার পরে ছকটি দু ভাগে ভাগ হয়ে যাচ্ছে। পরের বার এই দুটি অংশকে যদি একসঙ্গে কাটা যায়, তাহলে চারটি অংশ পাচ্ছি। তৃতীয় বারে যদি এই চারটি অংশকে একসঙ্গে রেখে ছেদ করি, তাহলে অংশগুলির সংখ্যা আবার দ্বিগুণ হয়ে যাচ্ছে এবং আমরা আটটি অংশ পাচ্ছি। চতুর্থ ছেদ ঘটানোর পরে (যদি সবগুলো অংশকে একসঙ্গে কাটা হয়) আমরা পাব ষোলটি অংশ এবং পঞ্চমবারে—32টি। তাহলে পাঁচবার কাটার পরেও আমরা 64 বর্গক্ষেত্র পাচ্ছিনে। শুধু ষষ্ঠবার ছেদ ঘটানোর পরে—সংখ্যাটা যখন আবার দ্বিগুণ হবে, তখনই—64টি বর্গক্ষেত্র পাওয়া যাবে বলে আমরা আশা করতে পারি। ফলে, আমাদের অন্তত ছয়বার ছেদ ঘটানো দরকার।

• আকাশে আমরা চাঁদের যে কলা দেখি, সেটা আকারের দিক থেকে কিছুটা ভিন্ন রকম : এটার বহিঃস্থ চাপ একটি অর্ধবৃত্ত এবং অন্তঃস্থ চাপ একটি অর্ধ-উপবৃত্ত। চিত্রকররা প্রায়ই চন্দ্রকলা আঁকেন ভুল ভাবে। তাঁরা দুটি চাপকেই বৃত্তের চাপ হিসেবে দেখিয়ে থাকেন।

www.pathagar.com

কিন্তু সেই সঙ্গে আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে সত্যিই ছয়বার এমন ভাবে কাটা যেতে পারে যাতে প্রতিবারেই অংশগুলির সংখ্যা দ্বিগুণ হয়ে যাবে এবং



চিত্র 94 : প্রথমবার কাটার পর দ্বিতীয়বার কাটার পর তৃতীয়বার কাটার পর

শেষবারে আমরা পাব $2^6=64$ আলাদা আলাদা বর্গক্ষেত্র। সেটা করা কঠিন নয়: শুধু এটুকু দেখলেই চলবে যে প্রতিবার ছেদ ঘটানোর পরে অংশগুলো যেন আকারে সমান হয় এবং প্রতিবার নতুন ছেদ ঘটানোর ফলে প্রত্যেকটি অংশই যাতে সমান দুভাগে ভাগ হয়ে যায়। চিত্র 94-তে প্রথম তিনটি ছেদ দেখানো হয়েছে।

www.pathagar.com

www.pathagar.com